Motivation
Loi comportement
Expression 1D
Interprétation
Paramètres

MEC6418 - NOTES DE COURS

La théorie de Schapery

Par: Martin Lévesque
professeur du département de génie mécanique

Motivation

▷ Motivation
Loi comportement
Expression 1D
Interprétation
Paramètres

→ Certains matériaux viscoélastiques obéissent à la viscoélasticité linéaire pour une faible gamme de chargements. Au delà d'un certain seuil, les lois viscoélastiques linéaires ne peuvent bien représenter leur comportement.

→ Il existe quelques lois de comportement viscoélastiques non-linéaires. Celle la plus utilisée est celle de Schapery. Ses travaux provenant de 4 articles de 1964 à 1971 ont été cités plus de 1000 fois, ce qui est une contribution majeure au domaine.

→ Le but de ce chapitre est de présenter les développements conduisant aux lois de comportement de type Schapery. On présentera la formulation pour les contraintes et les déformations.

Loi de comportement de Schapery

Motivation
Loi
▷ comportement
Expression 1D
Interprétation
Paramètres

→ Dans le chapitre sur la viscoélasticité linéaire, on avait défini l'énergie libre Ψ comme une expansion de Taylor. La première hypothèse dans la théorie de Schapery est que l'énergie libre est un expansion de Taylor corrigée qui a la forme:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\xi}) = \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) + p_3(\boldsymbol{\varepsilon})\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{L_2} : \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} : \mathbf{L_2}^{\mathrm{T}} : \boldsymbol{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}p_2(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\xi} : \mathbf{L_3} : \boldsymbol{\xi} \quad (1)$$

où $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})$ est une fonction non linéaire de $\boldsymbol{\varepsilon}$, p_3 et p_2 sont des fonctions positives de $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ceci garantit que la fonction Ψ est minimale dans l'état de référence, comme en viscoélasticité linéaire.

→ La seconde hypothèse est lié à l'inégalité de Clausius-Duhem, exprimée sous la forme: $\boldsymbol{\alpha} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0$. Schapery introduit:

$$\boldsymbol{\beta} = p_1(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (2)$$

ce qui ressemble beaucoup à ce qui a été fait en viscoélasticité linéaire.

Loi de comportement de Schapery

Motivation
Loi
▷ comportement
Expression 1D
Interprétation
Paramètres

→ Si on applique la même méthode qu'en viscoélasticité linéaire, on obtiendra l'équation d'évolution suivante:

$$p_1(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + p_2(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{L_3} : \boldsymbol{\xi} + p_3(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{L_2}^{\mathrm{T}} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (3)$$

→ Schapery fait l'hypothèse que pour $\boldsymbol{\varepsilon}$ petit, $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. Ceci fait en sorte que la loi de Schapery est la loi viscoélastique linéaire pour les faibles déformations. On pourra donc simultanément diagonaliser $\mathbf{B}$ et $\mathbf{L_3}$, comme en viscoélasticité linéaire. On aura donc:

$$p_1 B_{rr}\dot{\xi}_r + p_2 L_{3_{rr}}\xi_r + p_3 L_{2_{ir}}\varepsilon_i = 0 \text{ (pas de somme sur r)} \quad (4)$$

où on introduit la définition $p_z = p_z(\boldsymbol{\varepsilon})$, pour $z = \{1, 2, 3\}$.

→ Cette équation est relativement difficile à résoudre car $\boldsymbol{\varepsilon}$ dépend du temps.

→ Pour arriver à résoudre, il faut introduire un changement de variables.

Motivation
Loi
▷ comportement
Expression 1D
Interprétation
Paramètres

→ Supposons les changements de variables suivants:

$$\Phi = \int_0^t \frac{p_2(\boldsymbol{\varepsilon}(\tau))}{p_1(\boldsymbol{\varepsilon}(\tau))}\mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{p_2(\tau)}{p_1(\tau)}\mathrm{d}\tau \tag{5a}$$

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\Phi(t)) \tag{5b}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\Phi(t)) \tag{5c}$$

Avec ces définitions, on aura:

$$\begin{aligned}\frac{p_1(t)}{p_2(t)}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t} &= \frac{p_1(t)}{p_2(t)}\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\Phi(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{p_1(t)}{p_2(t)}\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\Phi)}{\mathrm{d}\Phi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{p_1(t)}{p_2(t)}\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\Phi)}{\mathrm{d}\Phi}\frac{p_2(t)}{p_1(t)}\\ &= \frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\Phi)}{\mathrm{d}\Phi}\end{aligned} \tag{6}$$

Motivation
Loi
▷ comportement
Expression 1D
Interprétation
Paramètres

→ Si on divise l'équation d'évolution par p_2, on a:

$$\frac{p_1}{p_2}B_{rr}\dot{\xi}_r + L_{3_{rr}}\xi_r + \frac{p_3}{p_2}L_{2_{ir}}\varepsilon_i = 0 \text{ (pas de somme sur r)} \tag{7}$$

→ En introduisant le changement de variables $p_z(t) = \tilde{p}_z(\Phi(t))$, $z = \{1, 2, 3\}$ et en utilisant les équations (5,6), on obtient le résultat suivant:

$$B_{rr}\frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}_r}{\mathrm{d}\Phi} + L_{3_{rr}}\tilde{\xi}_r + \frac{\tilde{p}_3}{\tilde{p}_2}L_{2_{ir}}\tilde{\varepsilon}_i = 0 \text{ (pas de somme sur r)} \tag{8}$$

→ Ce système peut se solutionner comme pour celui de la viscoélasticité linéaire et conduit à:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_r(\Phi) = -\int_0^\Phi \frac{L_{2_{ir}}}{L_{3_{rr}}}\left(1 - \exp\left[-\frac{L_{3_{rr}}}{B_{rr}}(\Phi - \Phi')\right]\right)\\ \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Phi'}\left[\frac{\tilde{p}_3(\Phi')}{\tilde{p}_2(\Phi')}\tilde{\varepsilon}_i(\Phi')\right]\mathrm{d}\Phi'\end{aligned} \tag{9}$$

ce qui n'est pas trop pratique car on fait intervenir le temps réduit Φ, qui n'a pas trop de sens physique.

Motivation
Loi
▷ comportement
Expression 1D
Interprétation
Paramètres

→ Pour tout changement de variable du type $\mathfrak{f}(\tau) = \tilde{\mathfrak{f}}(\Phi'(\tau))$, on remarque que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{f}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathfrak{f}}(\Phi'(\tau))}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathfrak{f}}(\Phi')}{\mathrm{d}\Phi'}\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}\tau} \rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathfrak{f}}(\Phi')}{\mathrm{d}\Phi'} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{f}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} \tag{10a}$$

$$\mathrm{d}\Phi' = \frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{10b}$$

On en tirera que:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathfrak{f}}(\Phi')}{\mathrm{d}\Phi'}\mathrm{d}\Phi' = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{f}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

→ Cela nous permettra d'exprimer le terme devant $\mathrm{d}\Phi'$ dans l'équation (9) en fonction de τ.

Motivation
Loi
▷ comportement
Expression 1D
Interprétation
Paramètres

→ L'intégrale (9) se fait par rapport à Φ, qui est une fonction de t. On peut donc changer la borne de l'intégrale et noter que $\Phi - \Phi' = \int_\tau^t \frac{p_2(\gamma)}{p_1(\gamma)}\mathrm{d}\gamma$. On aura donc:

$$\begin{aligned}\xi_r(t) = -\int_0^t \frac{L_{2_{ir}}}{L_{3_{rr}}}\left(1 - \exp\left[-\omega_i(\Phi - \Phi')\right]\right)\\ \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{p_3(\tau)}{p_2(\tau)}\varepsilon_i(\tau)\right]\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{12}$$

→ En utilisant le fait que $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}$, on aura que:

$$\begin{aligned}\sigma_i(t) = \frac{\partial\Psi_0}{\partial\varepsilon_i} + \left(\frac{\partial p_3}{\partial\varepsilon_i}L_{2_{jr}}\varepsilon_j + p_3 L_{2_{ir}}\right)\xi_r\\ + \frac{1}{2}\frac{\partial p_2}{\partial\varepsilon_i}L_{3_{rs}}\xi_r\xi_s\end{aligned} \tag{13}$$

→ Schapery a fait l'hypothèse de négliger le terme faisant intervenir les $\xi_r\xi_s$. Cela ne viole pas le thermodynamique car l'inégalité de Clausius-Duhem est toujours rencontrée.

Motivation
Loi
▷ comportement
Expression 1D
Interprétation
Paramètres

→ Avec ces observations, on obtient la loi de comportement:

$$\sigma_i = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \varepsilon_i} + \left(\frac{\partial p_3}{\partial \varepsilon_i}\varepsilon_j + p_3\delta_{ij}\right)\int_0^t \frac{L_{2_{ir}}L_{2_{jr}}}{L_{3_{rr}}} \times \left(1-\exp[-\omega_i(\Phi-\Phi')\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{p_3(\tau)}{p_2(\tau)}\varepsilon_i(\tau)\right]\mathrm{d}\tau \quad (14)$$

→ En ré-arrangeant les termes et en utilisant les résultats obtenus pour la viscoélasticité linéaire, on obtient:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{\partial p_3}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} + p_3\mathbf{I}\right) : \int_0^t \boldsymbol{\Delta}\mathbf{C}(\Phi-\Phi') : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{p_3(\tau)}{p_2(\tau)}\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\right]\mathrm{d}\tau \quad (15)$$

où

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{C}(t) = \sum_i \mathbf{C^{(i)}}\exp[-\omega_i t] \quad \text{avec } \mathbf{C^{(i)}} \geq 0 \text{ et } \varphi \geq 0 \quad (16)$$

Motivation
Loi
▷ comportement
Expression 1D
Interprétation
Paramètres

→ Une démarche similaire peut être faite pour exprimer les déformations en fonction des contraintes (la démonstration sort du cours mais toutes les étapes peuvent-être trouvées dans: Lévesque *et al.*, Mech. Time-Depend. Mater (2008), v.12, pp. 95 – 127). On obtient alors:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial a_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \boldsymbol{\sigma} + a_3\mathbf{I}\right) : \int_0^t \boldsymbol{\Delta}\mathbf{S}(\Omega-\Omega') : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{a_3(\tau)}{a_2(\tau)}\boldsymbol{\sigma}(\tau)\right]\mathrm{d}\tau \quad (17)$$

où:

$$\begin{gathered} \phi \geq 0; \qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{S}(t) = \sum_i \mathbf{S^{(i)}}(1-\exp[-t\lambda_i]; \\ \mathbf{S^{(i)}} \geq 0; \qquad \lambda_i \geq 0; \\ \Omega - \Omega' = \int_\tau^t \frac{a_2(\gamma)}{a_1(\gamma)}\mathrm{d}\gamma; \\ a_z = a_z(\boldsymbol{\sigma}) \text{ pour } z = \{1,2,3\} \end{gathered} \quad (18)$$

Motivation
Loi
▷ comportement
Expression 1D
Interprétation
Paramètres

→ Les fonctions a_z ou p_z ont certaines particularités:

- Elles sont des fonctions scalaires de leurs arguments, qui eux sont des tenseurs d'ordre 2.
- Elles doivent être positives afin de respecter la thermodynamique.
- Elles sont telles que $a_z(\mathbf{0}) = p_z(\mathbf{0}) = 1$

→ Une manière de définir ces fonctions est de les choisir comme étant des fonctions d'un paramètre scalaire équivalent. Par exemple, si on définit

$$h = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{Q} : \boldsymbol{\sigma} \quad (19)$$

on pourra avoir $a_z(h)$ comme des fonctions à une variable h.

→ D'autres formes pourraient exister mais leur définition sort du cadre du cours.

Motivation
Loi comportement
▷ Expression 1D
Interprétation
Paramètres

→ La théorie de Schapery a été utilisée majoritairement sous sa forme unidimensionnelle. Classiquement, la relation s'écrit:

$$\varepsilon(t) = g_0(\sigma)S_0\sigma + g_1(\sigma)\int_0^t \Delta S(\Omega-\Omega')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[g_2(\sigma)\sigma]\mathrm{d}\tau \quad (20)$$

avec

$$\Omega - \Omega' = \int_\tau^t \frac{\mathrm{d}\gamma}{g_3(\sigma(\gamma))} \quad (21)$$

→ C'est cette forme de la loi de comportement que l'on retrouve le plus fréquemment dans la littérature. Il est intéressant de noter que quelques auteurs sont partis de cette loi 1D pour la *généraliser* en 3D, en rajoutant des tenseurs à gauche à droite. Cette façon de faire n'est pas justifiée thermodynamiquement et il n'y a aucune garantie que la loi de comportement obtenue ne viole pas l'inégalité de Clausius-Duhem.

Interprétation

Motivation
Loi comportement
Expression 1D
▷ Interprétation
Paramètres

→ Afin d'interpréter les différentes fonctions non-linéaires, il est intéressant de considérer l'expression uni-dimensionnelle soumise à des cas de chargements particuliers.

→ Considérons dans un premier temps un matériau soumis à $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$, ce qui correspond à un test de fluage. Dans ce cas, on aura:

$$\varepsilon(t) = g_0(\sigma_0)S_0\sigma_0 + g_1(\sigma_0)g_2(\sigma_0)\Delta S\left(\frac{t}{g_3(\sigma_0)}\right)\sigma_0 \tag{22}$$

→ On sait que $\Delta S(0) = 0$. Alors,

$$\varepsilon(0) = g_0(\sigma_0)S_0\sigma_0 \tag{23}$$

On peut donc interpréter g_0 comme la variation de la réponse instantanée élastique S_0 en fonction de la charge appliquée.

Interprétation

Motivation
Loi comportement
Expression 1D
▷ Interprétation
Paramètres

→ On aura que:

$$\Delta S\left(\frac{t}{g_3(\sigma_0)}\right) = \sum_i S_i\left(1 - \exp\left[-\frac{t\lambda_i}{g_3(\sigma_0)}\right]\right) \tag{24}$$

Plus g_3 est faible, plus le fluage va se produire rapidement. En effet, $\Delta S \approx \sum_i S_i$ plus rapidement que si $g_3 = 1$ car pour $g_3 \ll 1$ le terme dans l'exponentielle négative devrait très grand.

→ On pourra donc dire que le terme g_3 régule la vitesse à laquelle le fluage se produit.

→ Dans un essai de fluage-recouvrance, on aura que **(demo)**:

$$\sigma(t) = \sigma_0\left(H(t) - H(t - t_0)\right) \tag{25a}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) = &\left(g_0(\sigma_0)S_0\sigma_0 + g_1(\sigma_0)g_2(\sigma_0)\Delta S\left[\frac{t}{g_3(\sigma_0)}\right]\sigma_0\right)\\ &\times\left[H(t) - H(t - t_0)\right] + \left(\Delta S\left[\frac{t_0}{g_3(\sigma_0)} + t - t_0\right]\right.\\ &\left. - \Delta S\left[t - t_0\right]\right)g_2(\sigma_0)\sigma_0 H(t - t_0)\end{aligned} \tag{25b}$$

Interprétation

Motivation
Loi comportement
Expression 1D
▷ Interprétation
Paramètres

→ Si on note par $\Delta\varepsilon_0 = g_0(\sigma_0)S_0\sigma_0$, on aura que:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{\varepsilon(t_0 - \epsilon) - \Delta\varepsilon_0}{\varepsilon(t_0 + \epsilon)}\right] = g_1(\sigma_0) \tag{26}$$

→ On peut donc lier g_1 au saut de déformation que l'on rencontre entre les moments avant et après le relâchement de le contrainte dans un essai de fluage-recouvrance.

→ L'interprétation de g_2 est plus difficile. On pourrait voir g_2 comme une modification des s_i en fonction du niveau de contrainte. On pourrait voir g_2 comme analogue à g_0 pour les déformations d'origine visqueuse.

Obtention des paramètres

Motivation
Loi comportement
Expression 1D
Interprétation
▷ Paramètres

→ L'obtention des paramètres de la loi de Schapery est une tâche assez complexe et il n'existe pas de méthodologie généralement acceptés.

→ Des travaux de Lou et Schapery en 1971 jusqu'à ceux de Lévesque et al. en 2008, plusieurs approches ont été suggérées.

→ Certaines approches utilisent les équations précédentes pour obtenir les fonction g_i points par point en fonction du niveau de chargement.

→ D'autres approches utilisent des méthodes numériques pour obtenir les paramètres à partir de chargements complexes.