Introduction
Viscoel. Linéaire ?
Expériences
Algorithme
Conclusion

MEC6418 - NOTES DE COURS

Obtention des paramètres d'une loi de comportement viscoélastique linéaire

Par: Martin Lévesque
professeur du département de génie mécanique

Introduction

▷ Introduction
Viscoel. Linéaire ?
Expériences
Algorithme
Conclusion

→ Nous avons vu la forme que devait avoir une loi de comportement viscoélastique linéaire, que ce soit en fluage ou en relaxation.

→ Nous avons aussi vu que certaines restrictions s'appliquent sur les quantités qui définissent la loi de comportement afin de rencontrer les exigences de la thermodynamique.

→ Il est maintenant temps d'aborder la méthodologie générale qui permet d'obtenir les paramètres numériques d'une loi de comportement viscoélastique linéaire.

→ Il est donc nécessaire d'effectuer les étapes suivantes:

1. Déterminer si le matériau étudié obéit vraiment à une loi de comportement viscoélastique linéaire.
2. Choisir les expériences à conduire en fonction du modèle que l'on a supposé pour le matériau.
3. Établir la procédure numérique qui nous permettra de déterminer tous les paramètres matériau.

Est-ce que le matériau est linéaire ?

Introduction
Viscoel.
▷ Linéaire ?
Expériences
Algorithme
Conclusion

→ On a vu que les lois de comportement peuvent s'écrire sous deux formes, soient $\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{F}(\boldsymbol{\varepsilon})$ ou $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathfrak{B}(\boldsymbol{\sigma})$, où $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{B}$ sont des opérateurs qui font le lien entre les histoires de contraintes et les histoires de déformations.

→ En viscoélasticité linéaire, ces opérateurs sont linéaires par rapport à $\boldsymbol{\sigma}$ ou $\boldsymbol{\varepsilon}$. En effet:

1. L'intégrale impliquée dans la loi de comportement est un opérateur linéaire.
2. Les paramètres qui définissent la souplesse de fluage et le module de relaxation sont des constantes qui ne dépendent pas du chargement.

→ Un opérateur linéaire présente deux caractéristiques:

1. $\mathfrak{F}(\lambda\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda\boldsymbol{\sigma}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $\mathfrak{F}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}\right) = \mathfrak{F}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}\right) + \mathfrak{F}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}\right) = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$

→ Ces relations doivent aussi être rencontrées pour $\mathfrak{B}$

→ On devra donc s'assurer de déterminer les histoires de chargements qui font que le matériau obéit à une loi de comportement qui soit linéaire.

Est-ce que le matériau est linéaire ?

Introduction
Viscoel.
▷ Linéaire ?
Expériences
Algorithme
Conclusion

→ De mon expérience, les matériaux polymères thermodurcissables ainsi que les matériaux composites obéissent assez bien à des lois de comportement viscoélastiques linéaires.

→ Les matériaux thermoplastiques peuvent aussi obéir à une loi de comportement viscoélastique linéaire.

- Par contre, il est de mon expérience qu'ils obéissent à ce type de loi pour un ensemble restreint d'histoires de chargement.
- Pour des contraintes ou des déformations plus ou moins importantes, le comportement devient viscoélastique non linéaire.
  - ▹ La viscoélasticité non linéaire sera étudiée plus tard dans la session.
- Il est donc important d'identifier les histoires pour lesquelles le matériau obéit à une loi de comportement viscoélastique linéaire afin de modéliser adéquatement son comportement.

Introduction
Viscoel.
▷ Linéaire ?
Expériences
Algorithme
Conclusion

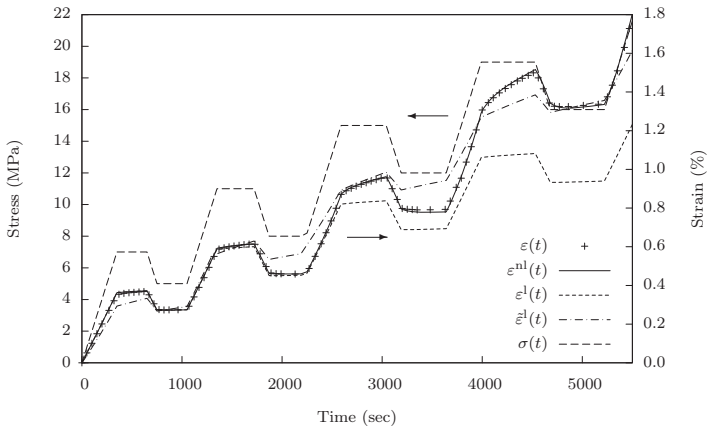

Figure 1: Réponse d'un polypropylène à une histoire de chargement $\sigma(t)$. $\varepsilon(t)$ représente des données expérimentales; $\varepsilon^{\mathrm{nl}}$ la prédiction de la réponse par un modèle viscoélastique non linéaire; ε^{l} la partie linéaire du modèle viscoélastique non linéaire et $\hat{\varepsilon}^{\mathrm{l}}$ on modèle viscoélastique linéaire dont les paramètres sont obtenus par une régression par moindres carrés. Le matériau obéit à une loi viscoélastique linéaire dans un faible intervalle de contrainte. Il est nécessaire d'avoir une loi de comportement viscoélastique non linéaire afin de bien reproduire le comportement.

Introduction
Viscoel.
▷ Linéaire ?
Expériences
Algorithme
Conclusion

→ Il peut être difficile de déterminer les histoires qui font en sorte que le matériau obéit à une loi viscoélastique linéaire.

→ Une approximation pourrait consister à établir une valeur de la contrainte ou de la déformation en dessous de laquelle le comportement est viscoélastique linéaire.

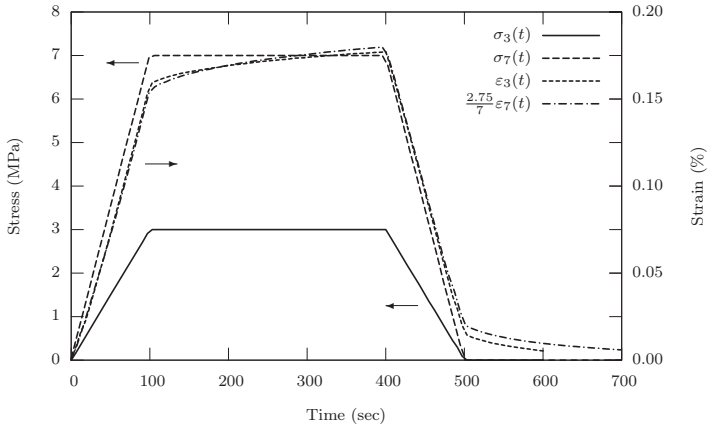

Figure 2: Exemple d'histoire de chargement utilisée pour identifier le domaine de linéarité pour un polypropylène

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
▷ Expériences
Algorithme
Conclusion

→ Les paramètres de la loi de comportement seront obtenus à partir de données expérimentales.

→ La méthodologie consistera en:

1. Déterminer la symétrie matérielle du matériau que l'on veut tester (isotrope, isotrope transverse, etc.)
2. Déterminer quelles expériences seront effectuées (essais de traction, mesure du coefficient de Poisson, essai de cisaillement, de compressibilité, etc.)
3. Réaliser des expériences où l'on applique et enregistre un chargement (que ce soit une contrainte ou une déformation) et où la réponse est mesurée et enregistrée.
4. Simuler la réponse du matériau lorsque soumis au chargement qui a été imposé. On obtiendra ainsi la réponse théorique du matériau en fonction des paramètres qui sont encore inconnus.
5. Utiliser un algorithme numérique qui permet d'obtenir les paramètres matériau faisant en sorte que le modèle représente le plus possible les données expérimentales.
6. Valider les prédictions sur des histoires de chargement différentes.

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
▷ Expériences
Algorithme
Conclusion

→ De manière générale, le degré de symétrie matérielle du matériau étudié sera déterminé à priori par l'utilisateur.

→ Cette décision est souvent prise en fonction de la microstructure du matériau étudié: polymère amorphe → isotrope, composites à fibres longues uni-directionnelles → isotrope transverse, etc.

→ Cette décision aura une influence sur le nombre de paramètres indépendants à obtenir. Par exemple, en élasticité linéaire, pour un matériau isotrope, on doit effectuer deux mesures indépendantes, pour un matériau isotrope transverse ce nombre passe à 5, etc.

→ L'utilisateur va décider, en fonction de l'équipement disponible, les essais qu'il conduira.

→ Ce choix permettra de donner une forme aux $\mathbf{C_i}$ ou aux $\mathbf{S_i}$ mais il restera quand même à déterminer les aspects temporels de la loi de comportement viscoélastique.

→ Conduire les essais tout en s'assurant que l'on enregistre la réponse du matériau en plus du chargement réel qui lui est imposé.

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
▷ Expériences
Algorithme
Conclusion

→ Il est très important de simuler le chargement réel qui a été imposé au matériau lors des expériences afin d'obtenir les paramètres de la loi de comportement.

→ Considérons par exemple un essai de relaxation idéal

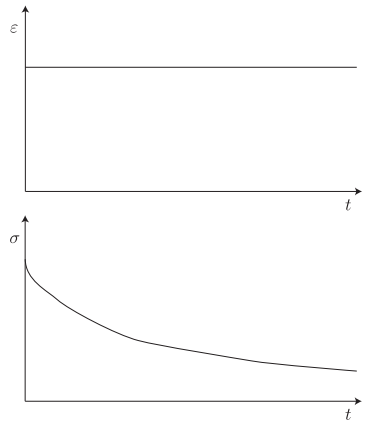

Figure 3: Essai de relaxation idéal. La déformation est appliquée de manière instantanée et l'évolution de la contrainte est mesurée.

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
▷ Expériences
Algorithme
Conclusion

→ Dans la pratique, il n'est pas possible d'appliquer instantanément une déformation.

→ Dans un essai de relaxation idéal, la partie élastique de la loi de comportement peut être évaluée avec la réponse en contrainte instantanée. Par contre, dans un essai réel, la contrainte atteinte lorsque la déformation de relaxation est atteinte peut être différente.

→ La figure à la page suivante montre un exemple où l'on a simulé la réponse d'un matériau soumis à un essai de relaxation idéal et la réponse du même matériau soumis à une rampe de déformation qui prend t_0 unités de temps avant d'atteindre la déformation de relaxation.

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
▷ Expériences
Algorithme
Conclusion

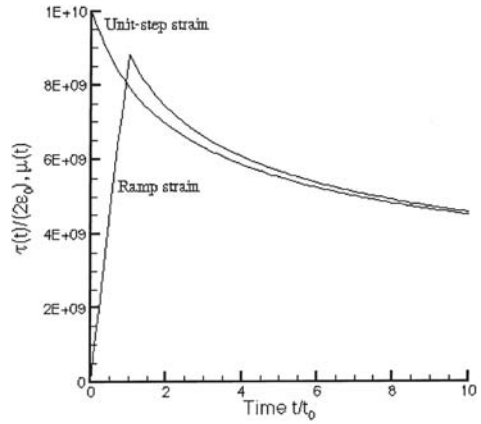

Figure 4: Simulation d'un essai idéal et d'un essai de relaxation réel. La figure montre que l'on peut faire une erreur importante si l'on suppose que l'essai réel est un essai idéal et que l'on utilise la contrainte lorsque $\varepsilon = \varepsilon_0$ pour calculer la partie élastique de la loi de comportement. La figure montre aussi qu'après un certain temps, les deux courbes se rapprochent. Cette figure est tirée de Lee and Knauss, *Mech. Time Dep. Mat.*, v.4, pp. 1 – 7, 2000.

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
Expériences
▷ Algorithme
Conclusion

→ Rappelons les loi de comportement obtenues précédemment:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{C^{(0)}} : \varepsilon(t) + \int_0^t \sum \mathbf{C^{(i)}} \exp[-\omega_i(t-\tau)] : \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \quad \text{(1a)}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{S^{(0)}} : \boldsymbol{\sigma}(t) + \int_0^t \sum \mathbf{S^{(i)}} \left(1 - \exp[-\lambda_i(t-\tau)]\right) : \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \quad \text{(1b)}$$

→ Certaines restrictions doivent être imposées sur ces lois de comportement, notamment:

1. Les $\mathbf{C^{(i)}}$ et $\mathbf{S^{(i)}}$ sont semi-définis positifs et symétriques
2. Les ω_i et λ_i sont positifs

→ Le problème à résoudre consistera donc à chercher les paramètres matériau qui font en sorte que la loi de comportement obtenue s'approche le plus possible des expériences tout en rencontrant les exigences thermodynamiques listées plus haut.

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
Expériences
▷ Algorithme
Conclusion

→ Considérons le cas d'un matériau isotrope où l'on réalise un essai de traction uniaxial où l'on impose la contrainte et l'on mesure la déformation dans le sens de l'essai (direction 1) et dans le sens transverse (direction 2). On aura alors: $\sigma_1(t) = \sigma(t) \neq 0$, $\sigma_2(t) = 0$ et $\varepsilon_1(t) \neq 0 \neq \varepsilon_2(t)$

→ On sait que l'on peut définir tout tenseur isotrope avec deux quantités. Par exemple, avec un module d'Young E qui doit être positif et un coefficient de Poisson ν qui doit être compris entre $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

→ Dans ce cas là, on aura:

$$\check{\varepsilon}_1(t) = \frac{\hat{\sigma}(t)}{E_0} + \int_0^t \sum \frac{1}{E_i} \left(1 - \exp[-\lambda_i(t-\tau]\right) \frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \qquad (2a)$$

$$\check{\varepsilon}_2(t) = -\frac{\nu_0}{E_0}\hat{\sigma}(t) - \int_0^t \sum \frac{\nu_i}{E_i} \left(1 - \exp[-\lambda_i(t-\tau]\right) \frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \qquad (2b)$$

où $\check{\varepsilon}$ représente la déformation simulée par le modèle et $\hat{\sigma}$ la contrainte réellement appliquée sur le matériau et enregistrée par la machine d'essai.

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
Expériences
▷ Algorithme
Conclusion

→ Si l'on note par $\hat{\varepsilon}$ la déformation mesurée lors des essais et enregistrée par la machine, on peut définir la quantité suivante:

$$\kappa = \left(\frac{1}{\max \hat{\varepsilon}_1}\right)^2 \sum_i \left[\hat{\varepsilon}_1(t_i) - \check{\varepsilon}_1(t_i)\right]^2 + \left(\frac{1}{\max \hat{\varepsilon}_2}\right)^2 \sum_i \left[\hat{\varepsilon}_2(t_i) - \check{\varepsilon}_2(t_i)\right]^2 \qquad (3)$$

où t_i sont les temps où sont mesurées les déformations.

→ κ représente une sorte de mesure de l'écart (au sens des moindres carrés) entre les expériences et la réponse prédite par le modèle. Ici, on a introduit une normalisation des écarts selon les directions 1 et 2. D'autres formes de mesure de cet écart entre expériences et prédictions du modèle pourraient être développées.

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
Expériences
▷ Algorithme
Conclusion

→ Finalement, le problème à résoudre serait le suivant:

$$\inf_{E_i>0, \nu_i \in [-1,0.5], \lambda_i>0} \kappa \qquad (4)$$

qui se lit: trouver l'ensemble de paramètres $\{E_i, \nu_i, \lambda_i\}$ minimisant κ tout en rencontrant les conditions: $E_i > 0, \nu_i \in [-1, 0.5], \lambda_i > 0$.

→ Ce type de problème est un problème d'optimisation (on veut minimiser κ), non linéaire (le calcul de ε_2 fait intervenir le rapport entre E_i et ν_i et λ_i se trouvent dans des exponentielles) et sous contrainte (restrictions à imposer sur les différents paramètres).

→ Certains logiciels commerciaux comme Matlab, Mathematica, etc. permettent de solutionner ce genre de problème. Il faut toutefois savoir que ces problèmes sont complexes et les algorithmes implémentés dans ces logiciels ne fonctionnent pas toujours comme on le souhaiterait.

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
Expériences
▷ Algorithme
Conclusion

→ Pour s'affranchir de cette difficulté, on va utiliser la décomposition d'un tenseur isotrope à l'aide des projecteurs orthogonaux.

→ On rappelle que si $\mathbf{A}$ est isotrope, alors $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{J} + \beta\mathbf{K}$, où $\alpha, \beta \geq 0$.

→ Avec cette décomposition, on aura (**voir démonstration au tableau**):

$$3\check{\varepsilon}_1(t) = (\alpha_0 + 2\beta_0)\hat{\sigma}(t) + \int_0^t \sum (\alpha_i + 2\beta_i) \left(1 - \exp[-\lambda_i(t-\tau)]\right) \frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \qquad (5a)$$

$$3\check{\varepsilon}_2(t) = (\alpha_0 - \beta_0)\hat{\sigma}(t) + \int_0^t \sum (\alpha_i - \beta_i) \left(1 - \exp[-\lambda_i(t-\tau)]\right) \frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \qquad (5b)$$

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
Expériences
▷ Algorithme
Conclusion

→ Si l'on pose $\check{\varepsilon}^{\dagger} = \check{\varepsilon}_1(t) - \check{\varepsilon}_2(t)$, on aura:

$$\check{\varepsilon}^{\dagger}(t) = \beta_0 \hat{\sigma}(t) + \int_0^t \sum \beta_i \left(1 - \exp[-\lambda_i(t-\tau)]\right) \frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \quad (6)$$

où l'on peut voir que les α_i ont disparu.

→ Si l'on pose $\check{\varepsilon}^{\dagger\dagger} = \check{\varepsilon}_1(t) + 2\check{\varepsilon}_2(t)$, on aura:

$$\check{\varepsilon}^{\dagger\dagger}(t) = \alpha_0 \hat{\sigma}(t) + \int_0^t \sum \alpha_i \left(1 - \exp[-\lambda_i(t-\tau)]\right) \frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \quad (7)$$

où l'on peut voir que les β_i ont disparu.

→ Cette décomposition est très avantageuse car elle permet d'identifier les α_i et les β_i séparément, tout en utilisant dans les deux cas toutes les données expérimentales.

→ On le verra, cela conduit à des problèmes d'optimisation beaucoup plus simples.

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
Expériences
▷ Algorithme
Conclusion

→ Si l'on pose $\hat{\varepsilon}^{\dagger}(t) = \hat{\varepsilon}_1(t) - \hat{\varepsilon}_2(t)$ et $\hat{\varepsilon}^{\dagger\dagger}(t) = \hat{\varepsilon}_1(t) + 2\hat{\varepsilon}_2(t)$, les propriétés du matériau seront obtenues en résolvant les deux problèmes suivants:

$$\inf_{\alpha_i, \lambda_i \geq 0} \sum \left[\check{\varepsilon}^{\dagger\dagger} - \hat{\varepsilon}^{\dagger\dagger}\right]^2 \quad (8a)$$

$$\inf_{\beta_i, \lambda_i \geq 0} \sum \left[\check{\varepsilon}^{\dagger} - \hat{\varepsilon}^{\dagger}\right]^2 \quad (8b)$$

→ Ces deux problèmes d'optimisation sous contrainte peuvent être transformés en des problèmes d'optimisation non linéaires sans contrainte en posant $\alpha_i = x_i^2$, $\beta_i = y_i^2$ et $\lambda_i = z_i^2$

→ La méthode de solution avec cette décomposition tensorielle est beaucoup plus intéressante que celle avec E et ν car elle conduit à des problèmes plus simples et en plus elle utilise toutes les données pour estimer chaque paramètre.

→ On rappelle que d'autres décompositions similaires existent pour la symétrie cubique et l'isotropie transverse.

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
Expériences
▷ Algorithme
Conclusion

→ Par expérience, les problèmes (8) sont assez difficiles à résoudre.

→ Pour y arriver, une stratégie qui fonctionne assez bien est de fixer *a priori* les valeurs des λ_i.

→ Une bonne pratique consiste à fixer le domaine de validité temporel de la loi de comportement que l'on veut identifier. Par exemple, on pourrait vouloir prédire de manière précise la réponse viscoélastique d'un matériau entre 1 et 100 000 secondes.

→ Une fois ce domaine fixé, on distribue les $\frac{1}{\lambda_i}$ uniformément sur une échelle logarithmique (base 10).

VOIR EXEMPLE MATHEMATICA

Introduction
Viscoel. Linéaire ?
Expériences
Algorithme
▷ Conclusion

→ En conclusion, on peut voir que l'obtention des paramètres matériau d'une loi de comportement viscoélastique linéaire n'est pas une mince affaire.

→ Il faut réaliser des expériences où l'on va être en mesure de mesurer à la fois le chargement appliqué ainsi que la réponse.

→ Il faut s'assurer que les matériaux obtenus respectent les exigences de la thermodynamique.

→ On peut trouver dans la littérature des chercheurs qui publient des lois de comportement avec des α_i négatifs ou encore utilisent des polynômes pour représenter un module de relaxation. On n'a aucune garantie que ces lois vont respecter la thermodynamique, peu importe le chargement imposé.

→ Finalement, la dernière étape serait la validation de la loi de comportement. Pour avoir une validation pertinente, il est important d'utiliser des histoires de chargement qui sont considérablement différentes de celles utilisées pour l'obtention des paramètres. De cette manière, on pourra avoir une bonne idée de l'adéquation du modèle développé et identifié.