MEC6418 - NOTES DE COURS

Formulation de lois de comportement viscoélastiques linéaires

Par: Martin Lévesque
professeur du département de génie mécanique

Introduction

Introduction - Phénoménologie

→ Lorsque sollicités, certains matériaux ont une réponse instantanée. C'est le cas des céramiques et des matériaux métalliques dans le domaine élastique. On parle alors de matériaux élastiques.

→ Certains matériaux comme les polymères ou les tissus organiques ont des réponses différées. On peut parler de comportement viscoélastique.

- Lorsque l'on applique une déformation et que l'on mesure l'évolution de la contrainte en fonction du temps, on parle de *relaxation*.
- Lorsque l'on applique une contrainte et que l'on mesure l'évolution de la déformation, on parle de *fluage*.
- Il est important de remarquer ici que les notions de chargement et de temps interviennent dans la définition d'un comportement viscoélastique.
  - ▹ On s'intéressera donc aux histoires de chargement et de réponses, au lieu que de s'intéresser à une valeur ponctuelle, fixée dans le temps, de la réponse et du chargement.

Introduction - Illustration d'un essai de fluage – recouvrance

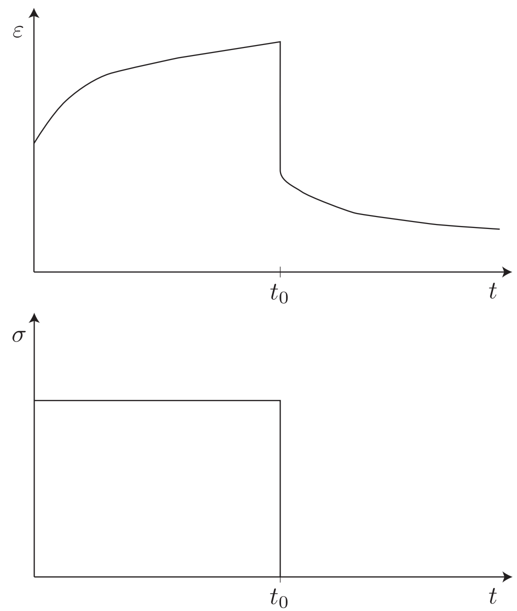

Figure 1: Schématisation d'un essai de fluage – recouvrance 1D

Introduction - Illustration d'un essai de relaxation

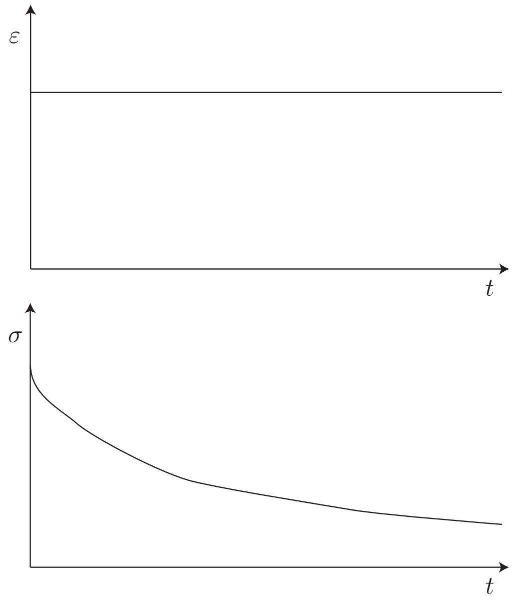

Figure 2: Schématisation d'un essai de relaxation 1D

Les hypothèses de base de la viscoélasticité linéaire

→ Reprenons l'inégalité de Clausius-Duhem

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}\right) : \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi}} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0$$

et ré-écrivons-la sous la forme:

$$\boldsymbol{\alpha} : \dot{\varepsilon} + \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \tag{1}$$

→ $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sont appelées forces thermodynamiques et représentent la part non réversible de l'énergie dépensée par le matériau

→ La première hypothèse en viscoélasticité linéaire est que les forces thermodynamiques sont reliées linéairement aux taux de déformation et variables internes, de sorte que:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A} : \dot{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \tag{2}$$

→ On peut ici interpréter cela comme des forces visqueuses car elles dépendent linéairement du taux de déformation, comme un amortisseur.

Les hypothèses de base – suite

→ Si l'on injecte ce résultat dans l'inégalité de Clausius-Duhem, on obtient:

$$\dot{\varepsilon} : \mathbf{A} : \dot{\varepsilon} + \dot{\boldsymbol{\xi}} : \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \tag{3}$$

→ Ceci implique que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont semi-définies positives, c'est-à-dire que toutes leurs valeurs propres sont supérieures ou égales à 0.

→ On fera l'hypothèse que ces matrices sont symétriques (la justification sort du cadre du cours).

Les hypothèses de base – suite

→ La seconde hypothèse est que l'énergie libre est une expansion de Taylor des variables observables et cachées (**demo**):

$$\begin{aligned}\Psi(\varepsilon, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\Big(&\varepsilon : \mathbf{L_1} : \varepsilon + \varepsilon : \mathbf{L_2} : \boldsymbol{\xi} \\ &+ \boldsymbol{\xi} : \mathbf{L_2}^{\mathrm{T}} : \varepsilon + \boldsymbol{\xi} : \mathbf{L_3} : \boldsymbol{\xi}\Big)\end{aligned} \tag{4}$$

où:

$$\mathbf{L_1} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon} \quad ; \quad \mathbf{L_2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon \partial \boldsymbol{\xi}} \quad ; \quad \mathbf{L_3} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi} \partial \boldsymbol{\xi}} \tag{5}$$

→ Cette relation peut aussi se mettre sous la forme:

$$\Psi(\varepsilon, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \varepsilon & \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} : \mathbf{L} : \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \quad \text{où} \tag{6}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L_1} & \mathbf{L_2} \\ (\mathbf{L_2})^{\mathrm{T}} & \mathbf{L_3} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Les hypothèses de base – suite

Introduction
Introduction
Fluage
Relaxation
▷ Hypothèses viso.
Application
Interprétation

→ En viscoélasticité linéaire, on suppose que l'énergie libre est minimale à l'état de référence, c'est à dire pour $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$.

→ Ceci est équivalent à dire que le chargement va contribuer à augmenter l'énergie interne emmagasinée dans le matériau, tel un ressort que l'on étire.

→ Ceci a comme conséquence que $\underline{\mathrm{grad}}\,(\Psi) = \mathbf{0}$. C'est donc pour cela que les dérivées premières ne sont pas dans l'expansion de Taylor.

→ Comme la fonction est à un minimum à l'état de référence et que le développement de Taylor est fait pour cet état, il faut que:

$$\mathbf{L} \geq 0 \tag{8}$$

Ceci implique que $\mathbf{L_1} \geq 0$ et que $\mathbf{L_3} \geq 0$.

– En effet, on pourrait trouver une base où $\mathbf{L}$ est diagonale. Dans cette base, il est clair que les matrices diagonalisées $\mathbf{L_1}$ et $\mathbf{L_3}$ doivent être semi-définies positives.

Application

Introduction
Introduction
Fluage
Relaxation
Hypothèses viso.
▷ Application
Interprétation

→ Voyons comment nous pouvons appliquer tout cela...

→ Avec l'inégalité de Clausius-Duhem et les équations (1,2) on obtient que (**demo**):

$$\mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0} \tag{9}$$

et si l'on développe, on a (en utilisant la définition de Ψ):

$$\mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{L_3} : \boldsymbol{\xi} + \mathbf{L_2}^{\mathrm{T}} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \tag{10}$$

→ Cette équation est fondamentale car elle relie l'évolution des variables internes aux variables observables

→ Ici, c'est une équation différentielle couplée

→ On peut montrer qu'il est toujours possible de trouver une base dans laquelle $\mathbf{B}$ et $\mathbf{L_3}$ sont simultanément diagonales, de telle sorte que:

$$B_{rr}\dot{\xi}_r + L_{3_{rr}}\xi_r + L_{2_{ir}}\varepsilon_i = 0 \text{ (pas de somme sur } r) \tag{11}$$

Application

Introduction
Introduction
Fluage
Relaxation
Hypothèses viso.
▷ Application
Interprétation

$$B_{rr}\dot{\xi}_r + L_{3_{rr}}\xi_r + L_{2_{ir}}\varepsilon_i = 0 \text{ (pas de somme sur } r)$$

→ Dans cette équation il est supposé que toutes les matrices ont été exprimées dans cette nouvelle base qui permet de diagonaliser simultanément $\mathbf{B}$ et $\mathbf{L_3}$.

→ Cette relation transforme un système d'équations différentielles couplées en r équations différentielles découplées, ce qui simplifie considérablement la résolution.

→ On doit ici solutionner une équation différentielle 1D et pour chaque équation r la forme de la solution sera identique.

→ Pour solutionner, nous allons introduire la transformée de Laplace, qui est un outil incontournable en viscoélasticité. La transformée de Laplace d'une fonction f est donnée par:

$$\mathcal{L}(f) = \tilde{f}(s) = \int_0^\infty \exp[-st] f(t) \mathrm{d}t \tag{12}$$

Application

Introduction
Introduction
Fluage
Relaxation
Hypothèses viso.
▷ Application
Interprétation

$$\mathcal{L}(f) = \tilde{f}(s) = \int_0^\infty \exp[-st] f(t) \mathrm{d}t$$

→ Une des propriétés de la transformée de Laplace est que

$$\mathcal{L}\left(\dot{f}\right) = s\tilde{f}(s) - f(0) \tag{13}$$

qui fait intervenir les conditions initiales.

→ Dans notre problème, à l'état initial, $\xi_r(0) = 0$.

→ Alors, si l'on applique la transformée de Laplace à l'équation (11), on obtient:

$$(sB_{rr} + L_{3_{rr}})\,\tilde{\xi}_r = -L_{2_{ir}}\tilde{\varepsilon}_i \tag{14}$$

→ La transformée de Laplace de $\exp[-at]$ est:

$$\mathcal{L}\left(\exp[-at]\right) = \frac{1}{s+a} \tag{15}$$

→ En divisant par B_{rr} de chaque côté, on aura:

$$\tilde{\xi} = -\left(\frac{L_{2_{ir}}}{B_{rr}} \frac{1}{s + \frac{L_{3_{rr}}}{B_{rr}}}\right) \tilde{\varepsilon}_i \tag{16}$$

→ La transformée de Laplace a deux autres propriétés qui nous seront utiles. La première est celle de la convolution:

$$\tilde{f}(s)\tilde{g}(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \tag{17}$$

→ La seconde est celle de l'intégration:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = \frac{\tilde{f}(s)}{s} \tag{18}$$

→ Nous allons solutionner par étapes. De l'équation (16) on peut voir que:

$$\tilde{\xi} = -\mathcal{L}\left(\frac{L_{2_{ir}}}{B_{rr}} \exp\left[-\frac{L_{3_{rr}}}{B_{rr}} t\right]\right) \tilde{\varepsilon}_i \tag{19}$$

→ On peut ré-écrire cette équation sous la forme:

$$\tilde{\xi} = -\frac{1}{s}\mathcal{L}\left(\frac{L_{2_{ir}}}{B_{rr}} \exp\left[-\frac{L_{3_{rr}}}{B_{rr}} t\right]\right) (s\tilde{\varepsilon}_i) \tag{20}$$

→ En utilisant la propriété d'intégration, de dérivation et le fait que $\varepsilon_i(0) = 0$, on a:

$$\tilde{\xi} = -\mathcal{L}\left(\frac{L_{2_{ir}}}{L_{3_{rr}}}\left(1 - \exp\left[-\frac{L_{3_{rr}}}{B_{rr}} t\right]\right)\right) \mathcal{L}\left(\dot{\varepsilon}_i(t)\right) \tag{21}$$

→ Finalement, en utilisant la propriété de convolution, on obtient:

$$\xi_r(t) = -\int_0^t \frac{L_{2_{ir}}}{L_{3_{rr}}}\left(1 - \exp\left[-\frac{L_{3_{rr}}}{B_{rr}}(t-\tau)\right]\right) \frac{\mathrm{d}\varepsilon_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{22}$$

→ A quoi tout cela nous sert-il ?

→ On a obtenu avant que la loi de comportement s'écrit:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

qui est évaluée en considérant les variables internes comme constantes.

→ On a donné une forme à Ψ en série de Taylor à l'équation (4). Alors, si l'on applique la loi de comportement, on aura:

$$\sigma_i(t) = L_{1_{ij}}\varepsilon_j(t) + L_{2_{ir}}\xi_r(t) \tag{23}$$

→ Comme on connaît $\xi_r(t)$, on aura:

$$\sigma_i(t) = \left(L_{1_{ij}} - \frac{L_{2_{ir}}L_{2_{jr}}}{L_{3_{rr}}}\right)\varepsilon_j(t) + \int_0^t \frac{L_{2_{ir}}L_{2_{jr}}}{L_{3_{rr}}} \exp\left[-\frac{L_{3_{rr}}}{B_{rr}}(t-\tau)\right] \frac{\mathrm{d}\varepsilon_j(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{24}$$

$$\sigma_i(t) = \left(L_{1_{ij}} - \frac{L_{2_{ir}}L_{2_{jr}}}{L_{3_{rr}}}\right)\varepsilon_j(t) + \int_0^t \frac{L_{2_{ir}}L_{2_{jr}}}{L_{3_{rr}}} \exp\left[-\frac{L_{3_{rr}}}{B_{rr}}(t-\tau)\right] \frac{\mathrm{d}\varepsilon_j(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau$$

→ Cette équation peut se mettre sous la forme:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{C^{(0)}} : \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \int_0^t \sum \mathbf{C^{(i)}} \exp[-\omega_i(t-\tau)] : \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{25}$$

où: **(demo)**

- Les $\mathbf{C^{(i)}} \geq 0$ et symétriques et peuvent représenter toutes les symétriques matérielles possibles (isotropie, isotropie transverse, anisotropie, etc.)
- Les $\omega_i > 0$

→ Prendre note que des valeurs propres répétées du système $(\lambda\mathbf{B} + \mathbf{L_3})$ sont nécessaires pour représenter toutes les classes de symétries matérielles

Introduction
Introduction
Fluage
Relaxation
Hypothèses viso.
▷ Application
Interprétation

→ Pour les déformations, on peut utiliser l'équation (23) qui nous donnera:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L_1}^{-1} : [\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L_2} : \boldsymbol{\xi}] \\ &= \mathbf{L_1}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L_1}^{-1} : \mathbf{L_2} : \boldsymbol{\xi} \\ &= \mathbf{A_1} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A_2} : \boldsymbol{\chi}\end{aligned} \tag{26}$$

→ Si on remplace ε dans la loi d'évolution (10), on aura:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{L_3} : \boldsymbol{\xi} + \mathbf{L_2}^{\mathsf{T}} : \left[\mathbf{L_1}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L_1}^{-1} : \mathbf{L_2} : \boldsymbol{\xi}\right] \\ &= \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + \left[\mathbf{L_3} - \mathbf{L_2}^{\mathsf{T}} : \mathbf{L_1}^{-1} : \mathbf{L_2}\right] : \boldsymbol{\xi} + \mathbf{L_2}^{\mathsf{T}} : \mathbf{L_1}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \\ &= \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\chi}} + \mathbf{A_3} : \boldsymbol{\chi} + \mathbf{A_2}^{\mathsf{T}} : \boldsymbol{\sigma}\end{aligned} \tag{27}$$

où ici les variables internes $\boldsymbol{\xi}$ ont été remplacées par $\boldsymbol{\chi}$ pour illustrer qu'elles dépendent de $\boldsymbol{\sigma}$. De plus, il est facile de montrer que $\mathbf{A_1} \geq 0$ et $\mathbf{A_3} \geq 0$.

→ On peut donc voir que l'on a une forme très similaire à la loi de comportement où on exprime $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de ε.

Introduction
Introduction
Fluage
Relaxation
Hypothèses viso.
▷ Application
Interprétation

→ Si on solutionne pour $\boldsymbol{\chi}$ on aura:

$$\chi_r(t) = -\int_0^t \frac{A_{2_{ir}}}{A_{3_{rr}}} \left(1 - \exp\left[-\frac{A_{3_{rr}}}{B_{rr}}(t-\tau)\right]\right) \frac{\mathrm{d}\sigma_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \tag{28}$$

→ On aura donc:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(t) &= A_{1_{ij}} \sigma_j(t) \\ &\quad + \int_0^t \frac{A_{2_{ir}} A_{2_{jr}}}{A_{3_{rr}}} \left(1 - \exp\left[-\frac{A_{3_{rr}}}{B_{rr}}(t-\tau)\right]\right) \frac{\mathrm{d}\sigma_j(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{29}$$

Introduction
Introduction
Fluage
Relaxation
Hypothèses viso.
▷ Application
Interprétation

→ Au final, on aura la loi de comportement suivante:

$$\varepsilon(t) = \mathbf{S^{(0)}} : \boldsymbol{\sigma}(t) + \int_0^t \sum \mathbf{S^{(i)}} \left(1 - \exp[-\lambda_i(t-\tau)]\right) : \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \tag{30}$$

où:

- Les $\mathbf{S^{(i)}} \geq 0$ et symétriques et peuvent représenter toutes les symétriques matérielles possibles (isotropie, isotropie transverse, anisotropie, etc.)
- Les $\lambda_i > 0$

→ Nous avons donc obtenu une loi de comportement viscoélastique soit en fluage ou en relaxation.

Introduction
Introduction
Fluage
Relaxation
Hypothèses viso.
▷ Application
Interprétation

→ Pour un essai de relaxation, on a donc:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathbf{C^{(0)}} : \varepsilon(t) + \int_0^t \sum \mathbf{C^{(i)}} \exp[-\omega_i(t-\tau)] : \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \mathbf{C}(t-\tau) : \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{31a}$$

où:

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C^{(0)}} + \sum \mathbf{C^{(i)}} \exp[-\omega_i t] \tag{31b}$$

→ Pour un essai de fluage, on a donc:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \mathbf{S^{(0)}} : \boldsymbol{\sigma}(t) + \int_0^t \sum \mathbf{S^{(i)}} \left(1 - \exp[-\lambda_i(t-\tau)]\right) : \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \mathbf{S}(t-\tau) : \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{32a}$$

où:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S^{(0)}} + \sum \mathbf{S^{(i)}} \left(1 - \exp[-\lambda_i t]\right) \tag{32b}$$

Introduction
Introduction
Fluage
Relaxation
Hypothèses viso.
Application
▷ Interprétation

→ Supposons que l'on réalise un essai de fluage et que l'on considère un matériau 1D. Alors, $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$, où $H(t)$ est la fonction échelon de Heaviside définie par:

$$H(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 1 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases} \tag{33}$$

→ La dérivée de $H(t)$ est l'impulsion de Dirac $\delta(t)$. Alors, si on ne considère qu'une valeur de λ_i, on aura:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= S^{(0)}\sigma_0 H(t) + \int_0^t S^{(1)} \left(1 - \exp[-\lambda_1(t-\tau)]\right) \sigma_0 \delta(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= S^{(0)}\sigma_0 + S^{(1)} \left(1 - \exp[-\lambda_1 t]\right) \sigma_0 \text{ pour } t \geq 0 \end{aligned} \tag{34}$$

Introduction
Introduction
Fluage
Relaxation
Hypothèses viso.
Application
▷ Interprétation

→ Supposons que l'on réalise un essai de relaxation et que l'on considère un matériau 1D. Alors, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$. Alors, si on ne considère qu'une valeur de ω_i, on aura:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= C^{(0)}\varepsilon_0 H(t) + \int_0^t C^{(1)} \left(\exp[-\omega_1(t-\tau)]\right) \varepsilon_0 \delta(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &= C^{(0)}\varepsilon_0 + C^{(1)} \exp[-\omega_1 t]\varepsilon_0 \text{ pour } t \geq 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Introduction
Introduction
Fluage
Relaxation
Hypothèses viso.
Application
▷ Interprétation

→ La viscoélasticité linéaire est en fait le résultat que l'on obtient lorsque l'on développe en série de Taylor l'énergie libre

- Elle sera donc valide dans un voisinage limité des variables observables et internes
- Pour de grandes déformations, on améliorera l'approximation de l'énergie libre en introduisant une dépendance non linéaire au chargement (théorie de Schapery).

→ On pourra prendre autant de variables internes que l'on voudra pour représenter le comportement souhaité. Ceci rajoutera des exponentielles dans la souplesse de fluage ou dans le module de relaxation.