

# MEC6418 - NOTES DE COURS

Formulation de lois de comportement viscoélastiques linéaires

Par: Martin Lévesque  
professeur du département de génie mécanique

▷ Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

Interprétation

# Introduction

## Introduction

### ▷ Introduction

### Fluage

### Relaxation

### Hypothèses viso.

### Application

### Interprétation

- Lorsque sollicités, certains matériaux ont une réponse instantanée. C'est le cas des céramiques et des matériaux métalliques dans le domaine élastique. On parle alors de matériaux élastiques.
- Certains matériaux comme les polymères ou les tissus organiques ont des réponses différées. On peut parler de comportement viscoélastique.
  - Lorsque l'on applique une déformation et que l'on mesure l'évolution de la contrainte en fonction du temps, on parle de *relaxation*.
  - Lorsque l'on applique une contrainte et que l'on mesure l'évolution de la déformation, on parle de *fluage*.
  - Il est important de remarquer ici que les notions de chargement et de temps interviennent dans la définition d'un comportement viscoélastique.
    - ▷ On s'intéressera donc aux histoires de chargement et de réponses, au lieu que de s'intéresser à une valeur ponctuelle, fixée dans le temps, de la réponse et du chargement.

- Introduction
- Introduction
- ▷ Fluage
- Relaxation
- Hypothèses viso.
- Application
- Interprétation

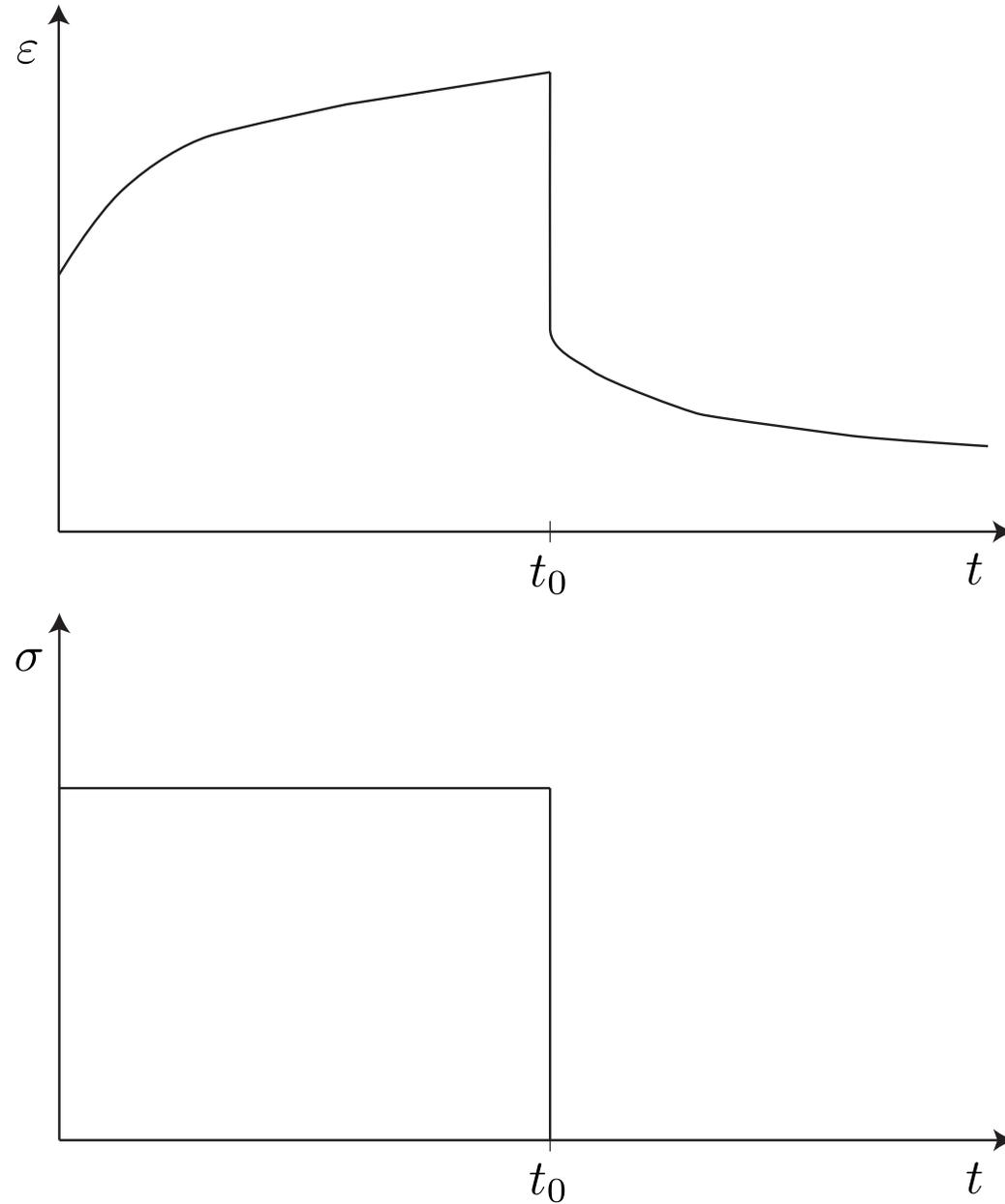


Figure 1: Schématisation d'un essai de fluage – recouvrance 1D

- Introduction
- Introduction
- Fluage
- ▷ Relaxation
- Hypothèses viso.
- Application
- Interprétation

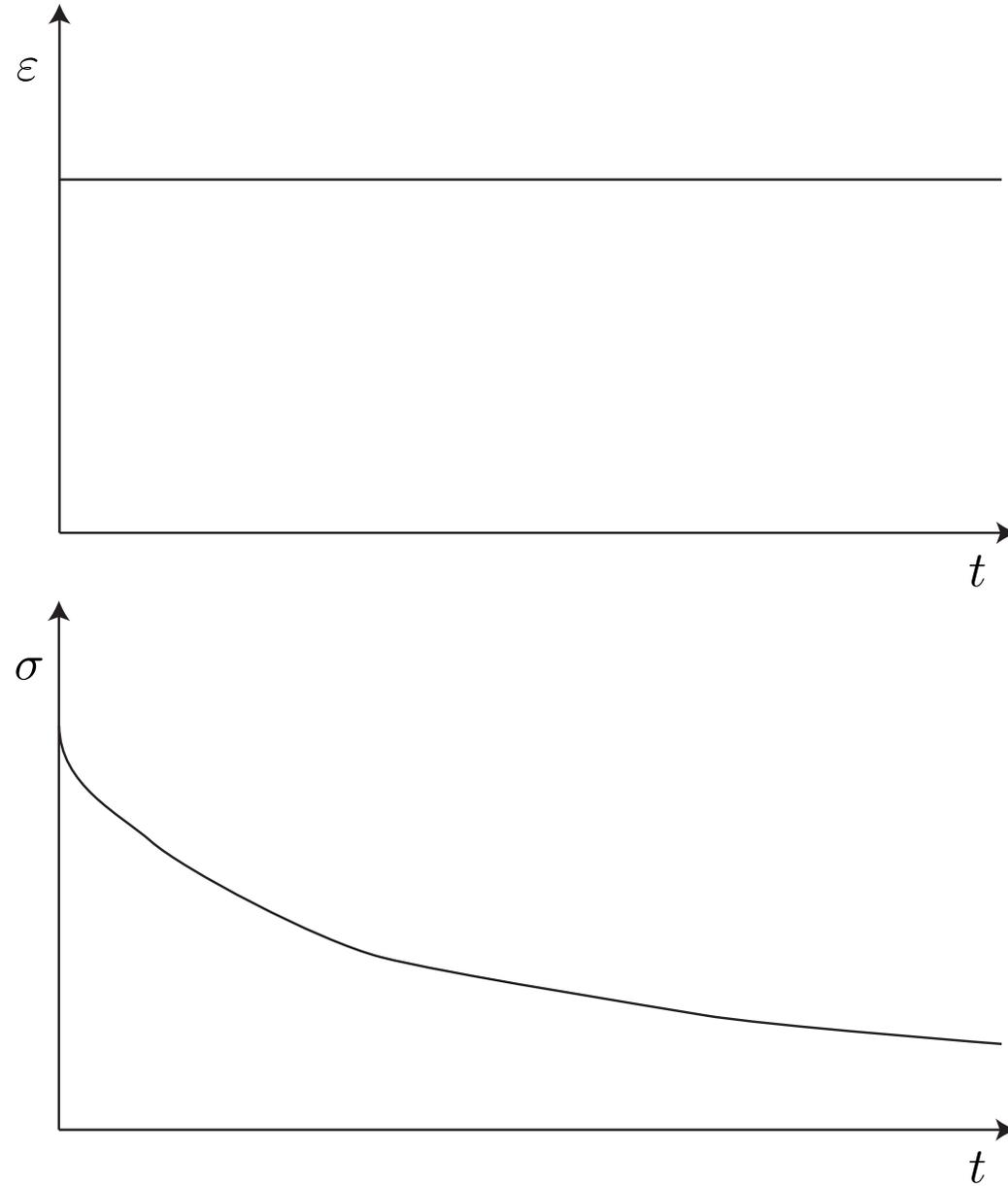


Figure 2: Schématisation d'un essai de relaxation 1D

→ Reprenons l'inégalité de Clausius-Duhem

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi}} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0$$

et ré-écrivons-la sous la forme:

$$\boldsymbol{\alpha} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (1)$$

- $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  sont appelées forces thermodynamiques et représentent la part non réversible de l'énergie dépensée par le matériau
- La première hypothèse en viscoélasticité linéaire est que les forces thermodynamiques sont reliées linéairement aux taux de déformation et variables internes, de sorte que:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (2)$$

- On peut ici interpréter cela comme des forces visqueuses car elles dépendent linéairement du taux de déformation, comme un amortisseur.

→ Si l'on injecte ce résultat dans l'inégalité de Clausius-Duhem, on obtient:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{A} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\boldsymbol{\xi}} : \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (3)$$

- Ceci implique que  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont semi-définies positives, c'est-à-dire que toutes leurs valeurs propres sont supérieures ou égales à 0.
- On fera l'hypothèse que ces matrices sont symétriques (la justification sort du cadre du cours).

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

    Hypothèses

▷ viso.

Application

Interprétation

→ La seconde hypothèse est que l'énergie libre est une expansion de Taylor des variables observables et cachées (**demo**):

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{L}_1 : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{L}_2 : \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} : \mathbf{L}_2^T : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\xi} : \mathbf{L}_3 : \boldsymbol{\xi} \right) \quad (4)$$

où:

$$\mathbf{L}_1 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad ; \quad \mathbf{L}_2 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\xi}} \quad ; \quad \mathbf{L}_3 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi} \partial \boldsymbol{\xi}} \quad (5)$$

→ Cette relation peut aussi se mettre sous la forme:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \left[ \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\xi} \right] : \mathbf{L} : \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad (6)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \\ (\mathbf{L}_2)^T & \mathbf{L}_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

- En viscoélasticité linéaire, on suppose que l'énergie libre est minimale à l'état de référence, c'est à dire pour  $\varepsilon = \xi = \mathbf{0}$ .
- Ceci est équivalent à dire que le chargement va contribuer à augmenter l'énergie interne emmagasinée dans le matériau, tel un ressort que l'on étire.
- Ceci a comme conséquence que  $\underline{\text{grad}}(\Psi) = \mathbf{0}$ . C'est donc pour cela que les dérivées premières ne sont pas dans l'expansion de Taylor.
- Comme la fonction est à un minimum à l'état de référence et que le développement de Taylor est fait pour cet état, il faut que:

$$\mathbf{L} \geq 0 \quad (8)$$

Ceci implique que  $\mathbf{L}_1 \geq 0$  et que  $\mathbf{L}_3 \geq 0$ .

- En effet, on pourrait trouver une base où  $\mathbf{L}$  est diagonale. Dans cette base, il est clair que les matrices diagonalisées  $\mathbf{L}_1$  et  $\mathbf{L}_3$  doivent être semi-définies positives.

- Voyons comment nous pouvons appliquer tout cela...
- Avec l'inégalité de Clausius-Duhem et les équations (1,2) on obtient que (**demo**):

$$\mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0} \quad (9)$$

et si l'on développe, on a (en utilisant la définition de  $\Psi$ ):

$$\mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{L}_3 : \boldsymbol{\xi} + \mathbf{L}_2^T : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (10)$$

- Cette équation est fondamentale car elle relie l'évolution des variables internes aux variables observables
- Ici, c'est une équation différentielle couplée
- On peut montrer qu'il est toujours possible de trouver une base dans laquelle  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{L}_3$  sont simultanément diagonales, de telle sorte que:

$$B_{rr} \dot{\xi}_r + L_{3rr} \xi_r + L_{2ir} \varepsilon_i = 0 \quad (\text{pas de somme sur } r) \quad (11)$$

$$B_{rr}\dot{\xi}_r + L_{3rr}\xi_r + L_{2ir}\varepsilon_i = 0 \text{ (pas de somme sur } r \text{)}$$

- Dans cette équation il est supposé que toutes les matrices ont été exprimées dans cette nouvelle base qui permet de diagonaliser simultanément  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{L}_3$ .
- Cette relation transforme un système d'équations différentielles couplées en  $r$  équations différentielles découplées, ce qui simplifie considérablement la résolution.
- On doit ici solutionner une équation différentielle 1D et pour chaque équation  $r$  la forme de la solution sera identique.
- Pour solutionner, nous allons introduire la transformée de Laplace, qui est un outil incontournable en viscoélasticité. La transformée de Laplace d'une fonction  $f$  est donnée par:

$$\mathcal{L}(f) = \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} \exp[-st] f(t) dt \quad (12)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

$$\mathcal{L}(f) = \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} \exp[-st] f(t) dt$$

→ Une des propriétés de la transformée de Laplace est que

$$\mathcal{L}(\dot{f}) = s\tilde{f}(s) - f(0) \quad (13)$$

qui fait intervenir les conditions initiales.

→ Dans notre problème, à l'état initial,  $\xi_r(0) = 0$ .

→ Alors, si l'on applique la transformée de Laplace à l'équation (11), on obtient:

$$(sB_{rr} + L_{3_{rr}}) \tilde{\xi}_r = -L_{2_{ir}} \tilde{\varepsilon}_i \quad (14)$$

→ La transformée de Laplace de  $\exp[-at]$  est:

$$\mathcal{L}(\exp[-at]) = \frac{1}{s+a} \quad (15)$$

→ En divisant par  $B_{rr}$  de chaque côté, on aura:

$$\tilde{\xi} = - \left( \frac{L_{2ir}}{B_{rr}} \frac{1}{s + \frac{L_{3rr}}{B_{rr}}} \right) \tilde{\varepsilon}_i \quad (16)$$

→ La transformée de Laplace a deux autres propriétés qui nous seront utiles. La première est celle de la convolution:

$$\tilde{f}(s)\tilde{g}(s) = \mathcal{L} \left( \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau \right) \quad (17)$$

→ La seconde est celle de l'intégration:

$$\mathcal{L} \left( \int_0^t f(\tau)d\tau \right) = \frac{\tilde{f}(s)}{s} \quad (18)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

→ Nous allons solutionner par étapes. De l'équation (16) on peut voir que:

$$\tilde{\xi} = -\mathcal{L} \left( \frac{L_{2ir}}{B_{rr}} \exp \left[ -\frac{L_{3rr}}{B_{rr}} t \right] \right) \tilde{\varepsilon}_i \quad (19)$$

→ On peut ré-écrire cette équation sous la forme:

$$\tilde{\xi} = -\frac{1}{s} \mathcal{L} \left( \frac{L_{2ir}}{B_{rr}} \exp \left[ -\frac{L_{3rr}}{B_{rr}} t \right] \right) (s\tilde{\varepsilon}_i) \quad (20)$$

→ En utilisant la propriété d'intégration, de dérivation et le fait que  $\varepsilon_i(0) = 0$ , on a:

$$\tilde{\xi} = -\mathcal{L} \left( \frac{L_{2ir}}{L_{3rr}} \left( 1 - \exp \left[ -\frac{L_{3rr}}{B_{rr}} t \right] \right) \right) \mathcal{L} (\dot{\varepsilon}_i(t)) \quad (21)$$

→ Finalement, en utilisant la propriété de convolution, on obtient:

$$\xi_r(t) = - \int_0^t \frac{L_{2ir}}{L_{3rr}} \left( 1 - \exp \left[ -\frac{L_{3rr}}{B_{rr}} (t - \tau) \right] \right) \frac{d\varepsilon_i(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (22)$$

- A quoi tout cela nous sert-il ?
- On a obtenu avant que la loi de comportement s'écrit:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

qui est évaluée en considérant les variables internes comme constantes.

- On a donné une forme à  $\Psi$  en série de Taylor à l'équation (4). Alors, si l'on applique la loi de comportement, on aura:

$$\sigma_i(t) = L_{1_{ij}} \varepsilon_j(t) + L_{2_{ir}} \xi_r(t) \quad (23)$$

- Comme on connaît  $\xi_r(t)$ , on aura:

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) = & \left( L_{1_{ij}} - \frac{L_{2_{ir}} L_{2_{jr}}}{L_{3_{rr}}} \right) \varepsilon_j(t) \\ & + \int_0^t \frac{L_{2_{ir}} L_{2_{jr}}}{L_{3_{rr}}} \exp \left[ -\frac{L_{3_{rr}}}{B_{rr}} (t - \tau) \right] \frac{d\varepsilon_j(\tau)}{d\tau} d\tau \end{aligned} \quad (24)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

$$\sigma_i(t) = \left( L_{1ij} - \frac{L_{2ir} L_{2jr}}{L_{3rr}} \right) \varepsilon_j(t) + \int_0^t \frac{L_{2ir} L_{2jr}}{L_{3rr}} \exp \left[ -\frac{L_{3rr}}{B_{rr}} (t - \tau) \right] \frac{d\varepsilon_j(\tau)}{d\tau} d\tau$$

→ Cette équation peut se mettre sous la forme:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{C}^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \int_0^t \sum \mathbf{C}^{(i)} \exp[-\omega_i(t - \tau)] : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tau} d\tau \quad (25)$$

où: (demo)

- Les  $\mathbf{C}^{(i)} \geq 0$  et symétriques et peuvent représenter toutes les symétriques matérielles possibles (isotropie, isotropie transverse, anisotropie, etc.)
- Les  $\omega_i > 0$

→ Prendre note que des valeurs propres répétées du système  $(\lambda \mathbf{B} + \mathbf{L}_3)$  sont nécessaires pour représenter toutes les classes de symétries matérielles

→ Pour les déformations, on peut utiliser l'équation (23) qui nous donnera:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \mathbf{L}_1^{-1} : [\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}_2 : \boldsymbol{\xi}] \\
 &= \mathbf{L}_1^{-1} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}_1^{-1} : \mathbf{L}_2 : \boldsymbol{\xi} \\
 &= \mathbf{A}_1 : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}_2 : \boldsymbol{\chi}
 \end{aligned} \tag{26}$$

→ Si on remplace  $\varepsilon$  dans la loi d'évolution (10), on aura:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} &= \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{L}_3 : \boldsymbol{\xi} + \mathbf{L}_2^\top : [\mathbf{L}_1^{-1} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}_1^{-1} : \mathbf{L}_2 : \boldsymbol{\xi}] \\
 &= \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + [\mathbf{L}_3 - \mathbf{L}_2^\top : \mathbf{L}_1^{-1} : \mathbf{L}_2] : \boldsymbol{\xi} + \mathbf{L}_2^\top : \mathbf{L}_1^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \\
 &= \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\chi}} + \mathbf{A}_3 : \boldsymbol{\chi} + \mathbf{A}_2^\top : \boldsymbol{\sigma}
 \end{aligned} \tag{27}$$

où ici les variables internes  $\boldsymbol{\xi}$  ont été remplacées par  $\boldsymbol{\chi}$  pour illustrer qu'elles dépendent de  $\boldsymbol{\sigma}$ . De plus, il est facile de montrer que  $\mathbf{A}_1 \geq 0$  et  $\mathbf{A}_3 \geq 0$ .

→ On peut donc voir que l'on a une forme très similaire à la loi de comportement où on exprime  $\boldsymbol{\sigma}$  en fonction de  $\varepsilon$ .

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

→ Si on solutionne pour  $\chi$  on aura:

$$\chi_r(t) = - \int_0^t \frac{A_{2ir}}{A_{3rr}} \left( 1 - \exp \left[ -\frac{A_{3rr}}{B_{rr}} (t - \tau) \right] \right) \frac{d\sigma_i(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (28)$$

→ On aura donc:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t) &= A_{1ij} \sigma_j(t) \\ &+ \int_0^t \frac{A_{2ir} A_{2jr}}{A_{3rr}} \left( 1 - \exp \left[ -\frac{A_{3rr}}{B_{rr}} (t - \tau) \right] \right) \frac{d\sigma_j(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (29) \end{aligned}$$

→ Au final, on aura la loi de comportement suivante:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{S}^{(0)} : \boldsymbol{\sigma}(t) + \int_0^t \sum \mathbf{S}^{(i)} (1 - \exp[-\lambda_i(t - \tau)]) : \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\tau} d\tau \quad (30)$$

où:

- Les  $\mathbf{S}^{(i)} \geq 0$  et symétriques et peuvent représenter toutes les symétries matérielles possibles (isotropie, isotropie transverse, anisotropie, etc.)
- Les  $\lambda_i > 0$

→ Nous avons donc obtenu une loi de comportement viscoélastique soit en fluage ou en relaxation.

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

→ Pour un essai de relaxation, on a donc:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathbf{C}^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \int_0^t \sum \mathbf{C}^{(i)} \exp[-\omega_i(t - \tau)] : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tau} d\tau \\ &= \int_0^t \mathbf{C}(t - \tau) : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tau} d\tau\end{aligned}\quad (31a)$$

où:

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}^{(0)} + \sum \mathbf{C}^{(i)} \exp[-\omega_i t] \quad (31b)$$

→ Pour un essai de fluage, on a donc:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \mathbf{S}^{(0)} : \boldsymbol{\sigma}(t) + \int_0^t \sum \mathbf{S}^{(i)} (1 - \exp[-\lambda_i(t - \tau)]) : \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\tau} d\tau \\ &= \int_0^t \mathbf{S}(t - \tau) : \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\tau} d\tau\end{aligned}\quad (32a)$$

où:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}^{(0)} + \sum \mathbf{S}^{(i)} (1 - \exp[-\lambda_i t]) \quad (32b)$$

→ Supposons que l'on réalise un essai de fluage et que l'on considère un matériau 1D. Alors,  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ , où  $H(t)$  est la fonction échelon de Heaviside définie par:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (33)$$

→ La dérivée de  $H(t)$  est l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$ . Alors, si on ne considère qu'une valeur de  $\lambda_i$ , on aura:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= S^{(0)} \sigma_0 H(t) + \int_0^t S^{(1)} (1 - \exp[-\lambda_1(t - \tau)]) \sigma_0 \delta(\tau) d\tau \\ &= S^{(0)} \sigma_0 + S^{(1)} (1 - \exp[-\lambda_1 t]) \sigma_0 \text{ pour } t \geq 0 \end{aligned} \quad (34)$$

→ Supposons que l'on réalise un essai de relaxation et que l'on considère un matériau 1D. Alors,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ . Alors, si on ne considère qu'une valeur de  $\omega_i$ , on aura:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= C^{(0)} \varepsilon_0 H(t) + \int_0^t C^{(1)} (\exp[-\omega_1(t - \tau)]) \varepsilon_0 \delta(\tau) d\tau \\ &= C^{(0)} \varepsilon_0 + C^{(1)} \exp[-\omega_1 t] \varepsilon_0 \text{ pour } t \geq 0\end{aligned}\tag{35}$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

▷ Interprétation

- La viscoélasticité linéaire est en fait le résultat que l'on obtient lorsque l'on développe en série de Taylor l'énergie libre
  - Elle sera donc valide dans un voisinage limité des variables observables et internes
  - Pour de grandes déformations, on améliorera l'approximation de l'énergie libre en introduisant une dépendance non linéaire au chargement (théorie de Schapery).
- On pourra prendre autant de variables internes que l'on voudra pour représenter le comportement souhaité. Ceci rajoutera des exponentielles dans la souplesse de fluage ou dans le module de relaxation.