Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

MEC6418 - NOTES DE COURS

Notions élémentaires sur les tenseurs

Par: Martin Lévesque
professeur du département de génie mécanique

Rappels
▷ Espace
App. n-Lin.
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Corps

- Ensemble de nombres ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc.) utilisés pour définir un espace vectoriel.

→ Espace vectoriel linéairel

- Ensemble d'entités mathématiques (scalaires, vecteurs, fonctions, matrices, etc.) définis sur un corps et ayant certaines propriétés communes.
  - Par exemple, $\mathbb{R}^3$, qui pourrait être noté $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pourrait être l'ensemble des triplets (x_1, x_2, x_3) où $x_i \in \mathbb{R}$.
- Les règles pour un espace vectoriel linéaire sont:
  1. Si x et $y \in E$, alors $x + y \in E$.
  2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, alors $\alpha x \in E$
- Il est intéressant de noter que les objets d'un espace vectoriel (x, y, etc.) sont appelés *vecteurs* même s'il s'agit de scalaires, vecteurs, matrices, fonctions, etc.

Rappels
▷ Espace
App. n-Lin.
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Produit scalaire

- Pour $x, y \in E$, le produit scalaire dénoté $< x, y >$ est une fonction qui associe le doublet (x, y), compris dans l'espace $E \times E$, à un élément de $\mathbb{R}$. En langage mathématique, cette phrase s'écrit: $< \cdot, \cdot >: E \times E \to \mathbb{R}$.
- Les propriétés du produit scalaire sont les suivantes:
  1. $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$
  2. $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$
  3. $< x, x >> 0$ si $x \neq 0$, $< x, x >= 0 \iff x = 0$
- Des exemples de produit scalaires sont:
  1. $< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ où $x, y \in \mathbb{R}^n$
  2. $< f, g >= \int_0^1 f(x) g(x) \mathrm{d}x$ où f, g sont des fonctions continues pour $x \in [0, 1]$

Rappels
Espace
▷ App. n-Lin.
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Une application n-linéaire est une application qui fait correspondre à un vecteur w, n vecteurs. La Figure 1 illustre schématiquement une application bi-linéaire.

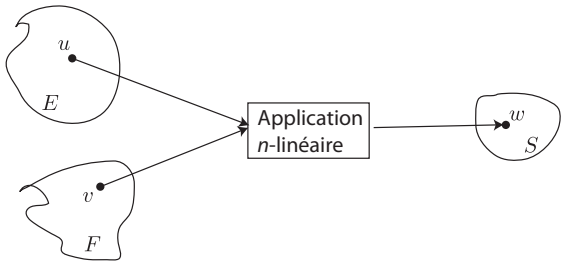


Figure 1: Représentation d'une application bi-linéaire qui prend le couple de vecteurs (u, v) de l'espace $E \times F$ et y fait correspondre un vecteur w dans un espace S. Si on nomme l cette application linéaire on écrira: $l : E \times F \to S$.

Application n-linéaire

Rappels
Espace
▷ App. n-Lin.
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Les propriétés de n-linéarité sont les suivantes. Soient $(u^1, u^2, \dots, u^n)$ n vecteurs appartenant à différents espaces vectoriels, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{T}$ cette application n-linéaire. On aura:

$$\mathcal{T}(\alpha_1 u^1, \alpha_2 u^2, \dots, \alpha_n u^n) = (\alpha_1 \times \alpha_2 \times \dots \times \alpha_n)\, \mathcal{T}(u^1, u^2, \dots, u^n) \quad (1a)$$

$$\mathcal{T}(u^1 + u^{n+1}, u^2 + u^{n+2}, \dots, u^n + u^{n+n}) = \sum_{i_1=0}^{i_1=1} \sum_{i_2=0}^{i_2=1} \dots \sum_{i_n=0}^{i_n=1} \mathcal{T}(u^{ni_1+1}, u^{ni_2+2}, \dots, u^{ni_n+n}) \quad (1b)$$

Application n-linéaire et forme n-linéaire

Rappels
Espace
▷ App. n-Lin.
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Par exemple, pour une application bi-linéaire, on aurait

$$\mathcal{T}(\alpha_1 u^1, \alpha_2 u^2) = \alpha_1 \alpha_2 \mathcal{T}(u^1, u^2) \quad (2a)$$

$$\mathcal{T}(u^1 + u^3, u^2 + u^4) = \mathcal{T}(u^1, u^2) + \mathcal{T}(u^1, u^4) + \mathcal{T}(u^3, u^2) + \mathcal{T}(u^3, u^4) \quad (2b)$$

→ Une <u>forme</u> n-linéaire est une application n-linéaire qui fait correspondre n vecteurs à un scalaire appartenant à un corps.

→ Particularités à notre cours

- On notera par E l'ensemble de tous les triplets de scalaires réels permettant de définir tous les vecteurs de dimension 3. En d'autres termes E est $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est considéré comme un espace vectoriel.
- On notera par $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ les vecteurs formant une base orthonormée de E.

Tenseur d'ordre 1

Rappels
Définitions
▷ Tens. 1
Tens. 2
Tens. 4
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Définition:

- *Un tenseur d'ordre 1 permet de définir une forme linéaire sur E.*

→ Si on note par $\underline{t}$ un tenseur d'ordre 1, alors on aura:

$$\underline{t}(u) = \alpha \quad \text{où } u \in E \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \quad (3)$$

→ Le produit scalaire "classique" est une forme linéaire. Si $u \in E$, dans ce cas on aurait:

$$\begin{aligned} \underline{t}(u) &= \sum_{i=1}^{i=3} t_i u_i \\ &= t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 \\ &= \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

→ On peut montrer que les composantes de $\underline{t}$ sont données par:

$$\underline{t}\,(\vec{e}_i) = t_i \quad (5)$$

→ **Voir démonstration au tableau pour la linéarité et (5).**

Tenseur d'ordre 2

Rappels
Définitions
Tens. 1
▷ Tens. 2
Tens. 4
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ *Un tenseur d'ordre 2 permet de définir une forme bi-linéaire sur $E \times E$.*

→ Si on note par $\underline{\underline{\tau}}$ un tenseur d'ordre 2, alors on aura:

$$\underline{\underline{\tau}}(u, v) = \alpha \quad \text{où } u, v \in E \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \quad (6)$$

→ La forme bi-linéaire suivante est un tenseur d'ordre 2:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}}(u, v) &= \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} u_i \tau_{ij} v_j \\ &= \sum_{i=1}^{i=3} u_i \tau_{i1} v_1 + u_i \tau_{i2} v_2 + u_i \tau_{i3} v_3 \\ &= u_1 \tau_{11} v_1 + u_2 \tau_{21} v_1 + u_3 \tau_{31} v_1 + \\ &\quad u_1 \tau_{12} v_2 + u_2 \tau_{22} v_2 + u_3 \tau_{32} v_2 + \\ &\quad u_1 \tau_{13} v_3 + u_2 \tau_{23} v_3 + u_3 \tau_{33} v_3 \\ &= \alpha \end{aligned} \quad (7)$$

→ **Voir démonstration au tableau pour la bi-linéarité**

Rappels
Définitions
Tens. 1
Tens. 2
▷ Tens. 4
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Un tenseur d'ordre 4 peut avoir plusieurs significations.
→ Forme 4-linéaire de E^4 : $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{T}}}}}(u,v,w,a) = \alpha$ où u, v, w et $a \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

– Par exemple,

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{T}}}}}(u,v,w,a) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} u_i v_j w_k a_l T_{ijkl} = \alpha \qquad (8)$$

– La propriété de 4-linéarité se vérifie de manière analogue à la bi-linéarité pour les tenseurs d'ordre 2.
– Cette interprétation est rarement utilisée en mécanique.

Rappels
Définitions
Tens. 1
Tens. 2
▷ Tens. 4
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Un tenseur d'ordre 4 peut avoir plusieurs significations.
→ Forme bi-linéaire de $F \times F$, où F est l'espace des tenseurs d'ordre 2.

– Par exemple,

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{T}}}}}\left(\underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\tau}}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} \beta_{ij} T_{jikl} \tau_{kl} = \alpha \qquad (9)$$

– Si $\underline{\underline{\beta}}$ et $\underline{\underline{\tau}}$ sont la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et si $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{T}}}}}$ est le tenseur de rigidité $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{C}}}}}$, alors un tenseur d'ordre 4 peut servir à définir l'énergie de déformation.

Rappels
Définitions
Tens. 1
Tens. 2
▷ Tens. 4
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Un tenseur d'ordre 4 peut avoir plusieurs significations.
→ Application linéaire de $F \times F$, où F est l'espace des tenseurs d'ordre 2.

– Par exemple,

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{T}}}}}\left(\underline{\underline{\beta}}\right) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} T_{ijkl}\beta_{kl} = \tau_{ij} = \underline{\underline{\tau}} \qquad (10)$$

– Si $\underline{\underline{\beta}}$ est la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et si $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{T}}}}}$ est le tenseur de rigidité $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{C}}}}}$, $\underline{\underline{\tau}}$ est le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.
– Un tenseur d'ordre 4 peut donc faire le lien entre les déformations et les contraintes.

Rappels
Définitions
Opérations
▷ Produit
Einstein
Contraction
Delta
Identités
Dérivée
Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Deux tenseurs d'ordre m et n permettent de créer un tenseur d'ordre $m+n$ par l'opération suivante:

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_m} \otimes B_{j_1 j_2 \ldots j_n} = A_{i_1 i_2 \ldots i_m} B_{j_1 j_2 \ldots j_n} \qquad (11)$$

→ Par exemple:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = \underline{\underline{\alpha}} = a_i b_j = \alpha_{ij} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

où $\underline{\underline{\alpha}}$ a été représenté comme une matrice.

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
▷ Einstein
Contraction
Delta
Identités
Dérivée
Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Le produit scalaire de deux vecteurs peut s'exprimer par $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$.

→ Avec la notation d'Einstein, on suppose qu'il y a somme sur tous les indices répétés. On pourra donc écrire:

$$\sum_{i=1}^{3} u_i v_i = u_i v_i \tag{13}$$

→ On qualifiera les indices répétés de "muets" car on aurait pu obtenir le même résultat en écrivant $u_j v_j$, $u_z v_z$, etc.

→ On qualifiera de "franc" un indice qui ne disparaît pas lors de l'opération.

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
▷ Contraction
Delta
Identités
Dérivée
Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Le produit n-fois contracté consiste dans un premier temps à effectuer le produit tensoriel entre deux tenseurs et par la suite répéter n paires d'indices où un indice appartient à chaque tenseur originel.

→ Par exemple, considérons le produit simplement contracté, noté par un point $(\cdot)$, entre deux tenseurs d'ordre 1, qui s'écrira: $\underline{u} \cdot \underline{v}$:

1. On réalise le produit tensoriel: $\underline{u} \otimes \underline{v} = u_i v_j$
2. On répète une paire d'indices: $u_i v_j$ devient $u_i v_i$

Alors, en vertu de la convention d'Einstein, $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
▷ Contraction
Delta
Identités
Dérivée
Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Considérons le produit simplement contracté entre un tenseur d'ordre 2 et un tenseur d'ordre 1, qui s'écrira: $\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{u}$:

1. On réalise le produit tensoriel: $\underline{\underline{\varepsilon}} \otimes \underline{u} = \varepsilon_{ij} u_k$
2. On répète une paire d'indices: $\varepsilon_{ij} u_k$ devient $\varepsilon_{ij} u_j = v_i$

On aura un indice franc (i) et un indice répété (j), ce qui donne comme résultat un tenseur d'ordre 1.

→ Pour le produit doublement contracté, noté par $(:)$, on contracte deux paires d'indices. Par exemple, si on calculait $\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}}$, on aurait:

1. On réalise le produit tensoriel: $\underline{\underline{\varepsilon}} \otimes \underline{\underline{\sigma}} = \varepsilon_{ij} \sigma_{kl}$
2. On répète deux paires d'indices: $\varepsilon_{ij} \sigma_{kl}$ devient $\varepsilon_{ij} \sigma_{ji} = a$

ce qui est un scalaire.

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
▷ Contraction
Delta
Identités
Dérivée
Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Le produit $\underline{\underline{\underline{\mathrm{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ conduit à

1. On réalise le produit tensoriel: $\underline{\underline{\underline{\mathrm{C}}}} \otimes \underline{\underline{\varepsilon}} = C_{ijkl} \varepsilon_{mn}$
2. On répète deux paires d'indices: $C_{ijkl} \varepsilon_{mn}$ devient $C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ij}$

On aura deux indices francs (ij) et deux indices répétés (kl), ce qui donne comme résultat un tenseur d'ordre 2.

→ Le produit $\underline{\underline{\underline{\mathrm{C}}}} : \underline{\underline{\underline{\mathrm{M}}}}$ conduit à

1. On réalise le produit tensoriel: $\underline{\underline{\underline{\mathrm{C}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\mathrm{M}}}} = C_{ijkl} M_{mnop}$
2. On répète deux paires d'indices: $C_{ijkl} M_{mnop}$ devient $C_{ijkl} M_{klop} = A_{ijop}$

On aura quatre indices francs $(ijop)$ et deux indices répétés (kl), ce qui donne comme résultat un tenseur d'ordre 4.

Produit contracté et notation d'Einstein

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
▷ Contraction
Delta
Identités
Dérivée
Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Pour le produit quatre fois contracté, noté par (::), on contracte quatre paires d'indices. Par exemple, si on calculait $\underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{A}} :: \underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{B}}$, on aurait:

1. On réalise le produit tensoriel: $\underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{A}} \otimes \underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{B}} = A_{ijkl}B_{mnop}$
2. On répète quatre paires d'indices: $A_{ijkl}B_{mnop}$ devient $A_{ijkl}B_{klij}$

ce qui est un scalaire.

→ Il doit être noté que la position des indices contractés vient d'une convention. On aurait pu contracter des indices à des positions différentes. On verra pourquoi plus tard cette convention est utile.

→ Il est intéressant de noter que les produits contractés permettent de définir des formes et des applications linéaires.

Le Delta de Kronecker

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
Contraction
▷ Delta
Identités
Dérivée
Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Par définition, le Delta de Kronecker, δ_{ij} est:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = j \\ 0 \text{ autrement} \end{cases} \tag{14}$$

→ C'est une quantité fort utile pour les manipulations des tenseurs et il est important de la maîtriser.

→ Par exemple, le produit:

$$\underline{\underline{\delta}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \delta_{ij}\sigma_{jk} = \sigma_{ik} = \underline{\underline{\sigma}} \tag{15}$$

Voir démonstration complète au tableau.

→ La contraction d'un tenseur d'ordre 2 avec le $\underline{\underline{\delta}}$ fait en sorte que le tenseur résultant est celui qui a été contracté où l'on remplace l'indice contracté par celui qui ne l'est pas dans le Delta de Kronecker.

Les tenseurs identités

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
Contraction
Delta
▷ Identités
Dérivée
Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ L'identité d'ordre deux, nommée $\underline{\underline{i}}$, est définie par $\underline{\underline{i}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}$. On voit avec l'équation (15) que $i_{kl} = \delta_{kl}$.

→ L'identité d'ordre 4 générale, nommée $\underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{I}^g}$, fait en sorte que $\underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{I}^g} : \underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{A}} = \underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{A}}$

- Si l'on définit $I^g_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ et que l'on calcule $\underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{I}^g} : \underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{A}}$, on aura:
  1. Produit tensoriel $\underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{I}^g} \otimes \underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{A}} = \delta_{ik}\delta_{jl}A_{mnop}$
  2. Contraction sur deux paire d'indices: $\delta_{ik}\delta_{jl}A_{mnop} \rightarrow \delta_{ik}\delta_{jl}A_{klop}$.
  3. Application de la propriété du Delta de Kronecker: $\delta_{ik}\delta_{jl}A_{klop} = A_{ijop} = \underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{A}}$.
- On a donc démontré que la définition d'identité proposée rencontre la propriété de l'identité.

Les tenseurs identités

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
Contraction
Delta
▷ Identités
Dérivée
Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ L'identité générale n'est pas utilisée en mécanique car elle ne conduit pas à une représentation matricielle (on verra plus loin). Comme les tenseurs d'ordre 4 utilisés en mécanique sont symétriques, on utilisera l'identité définie par:

$$I_{ijkl} = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}}{2} \tag{16}$$

→ Si on calcule $\underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{I}} : \underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{A}}$, on trouve que:

$$\underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{I}} : \underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{A}} = \frac{A_{ijkl} + A_{jikl}}{2} \tag{17}$$

ce qui est égal à $\underset{\equiv\equiv\equiv}{\mathrm{A}}$ uniquement si $A_{ijkl} = A_{jikl}$

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
Contraction
Delta
Identités
▷ Dérivée
Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ La dérivée d'un tenseur $A \in E^m$ par rapport à un tenseur $B \in E^n$ est définie par:

$$\frac{\partial A_{i_1 i_2 \ldots i_m}}{\partial B_{j_1 j_2 \ldots j_n}} = C_{i_1 i_2 \ldots i_m j_1 j_2 \ldots j_n} \tag{18}$$

où, comme pour le produit tensoriel, le tenseur résultant est un tenseur d'ordre $m+n$.

→ **Voir exemple au tableau portant sur la dérivée de l'énergie de déformation.**

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
Contraction
Delta
Identités
Dérivée
▷ Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

Problème

→ On souhaiterait, à partir de la connaissance des composantes de $\vec{V}$ exprimées dans le repère xyz obtenir celles dans le repère $x'y'z'$

→ Cela peut se faire à l'aide de la connaissance des cosinus directeurs. En 2D on aura les angles directeurs:

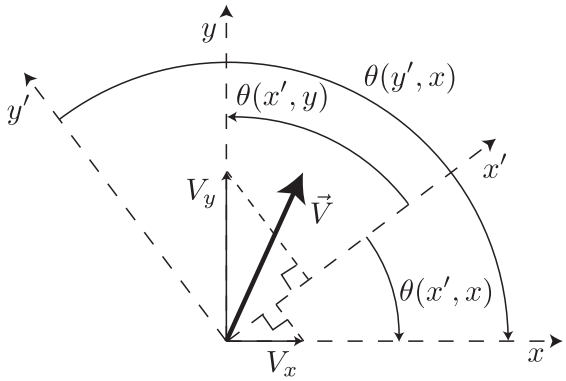
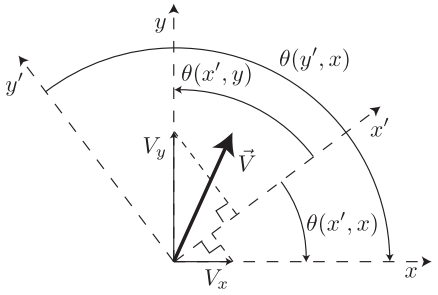


Figure 2: Illustration des angles directeurs

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
Contraction
Delta
Identités
Dérivée
▷ Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

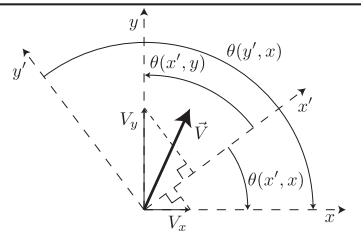


En 3D, on aura:

$$\left\{ \begin{array}{c} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{array} \right\}^{\mathsf{T}} =$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} V_x & V_y & V_z \end{array} \right\} \left[\begin{array}{ccc} \cos\theta(x',x) & \cos\theta(y',x) & \cos\theta(z',x) \\ \cos\theta(x',y) & \cos\theta(y',y) & \cos\theta(z',y) \\ \cos\theta(x',z) & \cos\theta(y',z) & \cos\theta(z',z) \end{array} \right] \tag{19}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
Contraction
Delta
Identités
Dérivée
▷ Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur



$$\left\{ \begin{array}{c} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{array} \right\}^{\mathsf{T}} = \left\{ \begin{array}{ccc} V_x & V_y & V_z \end{array} \right\} \left[\begin{array}{ccc} \cos\theta(x',x) & \cos\theta(y',x) & \cos\theta(z',x) \\ \cos\theta(x',y) & \cos\theta(y',y) & \cos\theta(z',y) \\ \cos\theta(x',z) & \cos\theta(y',z) & \cos\theta(z',z) \end{array} \right]$$

→ On peut voir que ces opérations consistent à projeter les composantes de $\vec{V}$ sur les vecteurs de la base $x'y'z'$.

→ On peut aussi voir que les colonnes de la matrice sont les composantes de x', y' et z', respectivement, exprimées dans la base $\{x, y, z\}$

→ Cette matrice, nommée matrice des cosinus directeurs, est notée par $[P]$ et permet de définir les relations suivantes:

$$V'_i = P_{ji} V_j \tag{20a}$$
$$V_i = P_{ij} V'_j \tag{20b}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
Contraction
Delta
Identités
Dérivée
▷ Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

$$V'_i = P_{ji} V_j$$
$$V_i = P_{ij} V'_j$$

→ À l'équation précédente on a utilisé le fait que $P_{ji}P_{jk} = \delta_{ik}$ (ou autrement dit $[P]^{-1} = [P]^{\mathrm{T}}$).

→ Cela est facilement démontrable car la matrice $[P]$ est orthogonale, c'est à dire qu'elle est formée de vecteurs colonne qui sont orthogonaux et unitaires.

– Le produit $P_{ji}P_{jk}$ est en fait le produit scalaire entre le vecteur i et le vecteur k. Comme les vecteurs sont unitaires, alors le produit du vecteur i avec lui-même donne 1. Comme les vecteurs sont orthogonaux, le produit entre un vecteur i et un vecteur k, pour $i \neq k$, donne 0. On retrouve la définition du Delta de Kronecker, qui est aussi l'identité d'ordre 2.

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
Contraction
Delta
Identités
Dérivée
▷ Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Pour un tenseur d'ordre 2, on avait que:

$$\underline{\tau}(u,v) = u_i \tau_{ij} v_j = \alpha \quad \text{où } u, v \in E \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \tag{22}$$

→ Imaginons maintenant que u et v sont exprimés dans une autre base $\{x', y', z'\}$. On aura $u_i = P_{ik} u'_k$ et $v_i = P_{ik} v'_k$.

→ L'équation (22) devient alors:

$$\begin{aligned} \underline{\tau}(u,v) &= u_i \tau_{ij} v_j \\ &= \left(P_{ik} u'_k\right) \tau_{ij} \left(P_{jl} v'_l\right) \\ &= \left(P_{ik} P_{jl} \tau_{ij}\right) u'_k v'_l \\ &= \tau'_{kl} u'_k v'_l \\ &= \underline{\tau}' \left(u', v'\right) \\ &= \alpha \end{aligned} \tag{23}$$

→ Puisque les vecteurs u, v et u', v' représentent la même quantité, il est normal que $\underline{\tau}(u,v) = \underline{\tau}'(u', v')$. On tire donc la formule de changement de base:

$$\tau'_{kl} = P_{ik} P_{il} \tau_{ii} \tag{24}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Produit
Einstein
Contraction
Delta
Identités
Dérivée
▷ Ch. base
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Pour un tenseur d'ordre 4, on procède d'une manière complètement analogue. On peut utiliser n'importe quelle interprétation déjà donnée. On aura par exemple, pour u, v, w et $a \in E$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\mathrm{T}}}}(u,v,w,a) &= T_{ijkl} u_i v_j w_k a_l \\ &= T_{ijkl} \left(P_{im} u'_m\right) \left(P_{jn} v'_n\right) \left(P_{ko} w'_o\right) \left(P_{lp} a'_p\right) \\ &= \left(P_{im} P_{jn} P_{ko} P_{lp} T_{ijkl}\right) u'_m v'_n w'_o a'_p \\ &= T'_{mnop} u'_m v'_n w'_o a'_p \\ &= \underline{\underline{\underline{\mathrm{T}}}}' \left(u', v', w', a'\right) \\ &= \alpha \end{aligned} \tag{25}$$

→ On tire donc la formule de changement de base pour un tenseur d'ordre 4:

$$T'_{mnop} = P_{im} P_{jn} P_{ko} P_{lp} T_{ijkl} \tag{26}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
▷ Symétries
Représentation
Conventions
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

Tenseur d'ordre 2

→ Un tenseur d'ordre 2 est dit symétrique si $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Cela fait passer le nombre de constantes indépendantes de 9 à 6.

→ La majorité des tenseurs d'ordre 2 utilisés en mécanique sont symétriques (contraintes, déformations).

Tenseur d'ordre 4

→ Un tenseur d'ordre 4 qui a les symétries dites *mineures* est tel que $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{jilk}$.

→ Un tenseur d'ordre 4 qui a les symétries dites *majeures* est tel que $A_{ijkl} = A_{klij}$.

→ Un tenseur d'ordre 4 qui a les symétries majeures et mineures a jusqu'à 21 constantes indépendantes (au lieu de 81 quand il n'y a pas de symétrie.

→ La grande majorité des tenseurs d'ordre 4 en mécanique du solide possèdent les symétries majeures et mineures.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries
▷ Représentation
Conventions
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Lorsque les tenseurs d'ordre 2 et d'ordre 4 présentent les symétries énumérées au transparent précédent, il est possible de représenter un tenseur d'ordre 2 comme un vecteur à 6 composantes et un tenseur d'ordre 4 par une matrice 6×6.

→ Par exemple, un tenseur d'ordre 2 peut être représenté par:

$$\underline{\underline{\alpha}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ \sqrt{2}\alpha_{23} \\ \sqrt{2}\alpha_{31} \\ \sqrt{2}\alpha_{12} \end{bmatrix} = \alpha_I \tag{27}$$

→ Dans toute la suite, les indices majuscules (e.g. I, J, etc) seront utilisés pour indiquer que l'ont fait référence à un tenseur exprimé sous la notation matricielle.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries
▷ Représentation
Conventions
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ En notation matricielle, un tenseur d'ordre 4 pourra s'écrire sous la forme:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{A}}}}} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{1111} & \mathrm{A}_{1122} & \mathrm{A}_{1133} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{1123} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{1131} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{1112} \\ \mathrm{A}_{2211} & \mathrm{A}_{2222} & \mathrm{A}_{2233} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{2223} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{2231} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{2212} \\ \mathrm{A}_{3311} & \mathrm{A}_{3322} & \mathrm{A}_{3333} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{3323} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{3331} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{3312} \\ \sqrt{2}\mathrm{A}_{2311} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{2322} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{2333} & 2\mathrm{A}_{2323} & 2\mathrm{A}_{2331} & 2\mathrm{A}_{2312} \\ \sqrt{2}\mathrm{A}_{3111} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{3122} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{3133} & 2\mathrm{A}_{3123} & 2\mathrm{A}_{3131} & 2\mathrm{A}_{3112} \\ \sqrt{2}\mathrm{A}_{1211} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{1222} & \sqrt{2}\mathrm{A}_{1233} & 2\mathrm{A}_{1223} & 2\mathrm{A}_{1231} & 2\mathrm{A}_{1212} \end{bmatrix} \tag{28}$$

→ On écrira alors que $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{A}}}}} = A_{IJ}$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries
▷ Représentation
Conventions
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Cette notation est appelée *notation de Voigt modifiée*.

→ Avec cette notation, le produit doublement contracté devient un produit scalaire entre vecteurs ou entre un vecteur et une matrice.

→ Par exemple, $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \sigma_I \varepsilon_I$

→ Pour le produit entre un tenseur d'ordre 4 et un tenseur d'ordre 2, cela équivaut au produit matriciel: $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{A}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = A_{IJ}\varepsilon_J$.

→ Les mêmes règles s'appliquent pour la dérivation.

→ Les tenseurs identités sont:

$$\underline{\underline{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \qquad \underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{I}}}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries
Représentation
▷ Conventions
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Dans la littérature scientifique actuelle, la convention est d'utiliser des lettres romaines majuscules pour les tenseurs d'ordre 4 (e.g. A, B, C, etc), des lettres grecques minuscules pour les tenseurs d'ordre 2 (e.g. α, β, γ, etc) et des lettres romaines minuscules (e.g. a, b, c, etc.) pour les tenseurs d'ordre 1.

→ L'ordre d'un tenseur peut être représenté par le nombre de barres (ou de tildes $\sim$ dans certains ouvrages) en-dessous ou en-dessus des lettres. C'est ce qui a été adopté jusqu'à maintenant.

→ Pour des raison de typographie, dans les journaux scientifiques, on utilise les caractères gras pour représenter un tenseur. Par exemple, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\alpha}$, et $\mathbf{A}$ représenteraient des tenseurs d'ordre 1, 2 et 4, respectivement, tandis que a, α et A représenteraient des scalaires (car ils ne sont pas en gras).

→ Dans le cours, nous allons utiliser indépendamment la notation avec les barres en-dessous (pour le tableau essentiellement) et les lettres grasses pour le polycopié.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
▷ Introduction
Triclinique
Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Certains matériaux ont des microstructures qui présentent certaines symétries.

- Certains monocristaux ont une microstructure qui présente des plans de symétrie (i.e. les atomes sont disposés de sorte que l'on peut établir un plan de symétrie)
- Certains composites ont les fibres alignées selon certaines directions, ce qui fait que l'on peut avoir soit des plans ou des axes de symétrie.

→ Ces microstructures vont avoir un effet sur les matrices de rigidité et de souplesse, notées $\mathbf{C}$ et $\mathbf{S}$ respectivement

- Ces tenseurs d'ordre 4 vont prendre des formes particulières et on verra que le nombre de paramètres indépendants pour les caractériser diminue.

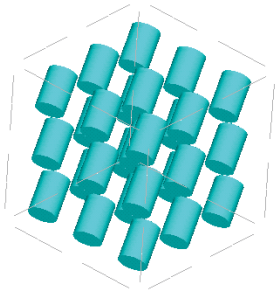
Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
▷ Triclinique
Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Un matériau triclinique est un matériau qui ne présente aucune symétrie dans sa microstructure

- Le matériau aura donc 21 constantes qui sont distinctes
- En fait, il est possible de montrer que le nombre de contantes non nulles peut être réduit à 18 par un changement de base approprié.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
▷ Triclinique
Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

Exemple



$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 588 & 227 & 229 & -3 & 1 & -0.7 \\ 227 & 591 & 232 & -6 & 4 & -2 \\ 229 & 232 & 600 & -10 & 5 & -4 \\ -3 & -6 & -10 & 356 & -7 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & -7 & 346 & -5 \\ -0.7 & -2 & -4 & 6 & -5 & 341 \end{bmatrix}$$

Figure 3: Exemple de matériau triclinique. Fibres (f) longues d'orientation quelconque dans une matrice (m) isotrope. $E_f = 300$GPa, $E_m = 70$GPa, $\nu_s = \nu_m = 0.3$, $f_v = 30\%$. $\mathbf{C}$ obtenue par calcul éléments finis d'une cellule de base sur laquelle on a appliqué des conditions aux rives périodiques. Gracieuseté de Amine El-Mourid.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
▷ Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Un matériau monoclinique présente un plan de symétrie dans sa microstructure

- Cela veut dire que si on exprime ce tenseur dans une base dont un vecteur est selon la normale au plan de symétrie, ce tenseur aura la même expression dans une base qui est la réflexion de la première
- Supposons par exemple un tenseur $\mathbf{A}$ exprimé dans la base formée par les vecteurs $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ (qui sont en fait orientés selon les axes x, y et z). Si $\mathbf{A}$ est monoclinique et que son plan de symétrie est normal à $\boldsymbol{e_2}$, alors, il aura la même expression dans la base $\{\boldsymbol{e_1}, -\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$.
- La matrice de passage de la première base à la seconde est:

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
▷ Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Supposons $\mathbf{A}$ sous la forme générale suivante (en se rappelant qu'il possède les symétries majeures et mineures):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} \end{bmatrix} \tag{31}$$

→ Si on applique la relation de changement de base $A'_{ijkl} = P_{mi}P_{nj}P_{ok}P_{pl}A_{mnop}$, en notant que $P_{\alpha\beta} = -(-1)^{\alpha}\delta_{\alpha\beta} = -(-1)^{\beta}\delta_{\alpha\beta}$ (pas de somme sur α et β) et en appliquant les propriétés du produit simplement contracté de la fonction de Dirac, on a:

$$A'_{ijkl} = (-1)^{i+j+k+l} A_{ijkl} \text{ (pas de somme sur indices)} \tag{32}$$

→ Pour que $\mathbf{A}$ soit monoclinique, il faut que $A'_{ijkl} = A_{ijkl}$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
▷ Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Effectuons les vérifications en supposant des termes non-nuls:

$$A'_{11} = A'_{1111} = (-1)^4 A_{1111} = A_{1111} = A_{11} \quad ✓$$
$$A'_{12} = A'_{1122} = (-1)^6 A_{1122} = A_{1122} = A_{12} \quad ✓$$
$$A'_{13} = A'_{1133} = (-1)^8 A_{1133} = A_{1133} = A_{13} \quad ✓$$
$$A'_{14} = \sqrt{2}A'_{1123} \neq (-1)^7\sqrt{2}A_{1123} = -\sqrt{2}A_{1123} = A_{14} \quad ✗$$
$$A'_{15} = \sqrt{2}A'_{1131} = (-1)^6\sqrt{2}A_{1131} = \sqrt{2}A_{1131} = A_{15} \quad ✓$$
$$A'_{16} = \sqrt{2}A'_{1112} \neq (-1)^5\sqrt{2}A_{1112} = -\sqrt{2}A_{1112} = A_{16} \quad ✗$$
$$A'_{22} = A'_{2222} = (-1)^8 A_{2222} = A_{2222} = A_{22} \quad ✓$$
$$A'_{23} = A'_{2233} = (-1)^{10} A_{2233} = A_{2233} = A_{23} \quad ✓$$
$$A'_{24} = \sqrt{2}A'_{2223} \neq (-1)^9\sqrt{2}A_{2223} = -\sqrt{2}A_{2223} = A_{24} \quad ✗$$
$$A'_{25} = \sqrt{2}A'_{2231} = (-1)^8\sqrt{2}A_{2231} = \sqrt{2}A_{2231} = A_{25} \quad ✓$$
$$A'_{26} = \sqrt{2}A'_{2212} \neq (-1)^7\sqrt{2}A_{2212} = -\sqrt{2}A_{2212} = A_{26} \quad ✗$$
$$A'_{33} = A'_{3333} = (-1)^{12} A_{3333} = A_{3333} = A_{33} \quad ✓$$
$$A'_{34} = \sqrt{2}A'_{3323} \neq (-1)^{11}\sqrt{2}A_{3323} = -\sqrt{2}A_{3323} = A_{34} \quad ✗$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
▷ Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Suite des vérifications

$$A'_{35} = \sqrt{2}A'_{3331} = (-1)^{10}\sqrt{2}A_{3331} = \sqrt{2}A_{3331} = A_{35} \quad ✓$$
$$A'_{36} = \sqrt{2}A'_{3312} \neq (-1)^9\sqrt{2}A_{3312} = -\sqrt{2}A_{3312} = A_{36} \quad ✗$$
$$A'_{44} = 2A'_{2323} = (-1)^{10}2A_{2323} = A_{2323} = A_{44} \quad ✓$$
$$A'_{45} = 2A'_{2331} \neq (-1)^9 2A_{2331} = -2A_{2331} = A_{45} \quad ✗$$
$$A'_{46} = 2A'_{2312} = (-1)^8 2A_{2312} = 2A_{2312} = A_{46} \quad ✓$$
$$A'_{55} = 2A'_{3131} = (-1)^8 2A_{3131} = 2A_{3131} = A_{55} \quad ✓$$
$$A'_{56} = 2A'_{3112} \neq (-1)^7 2A_{3112} = -2A_{3112} = A_{56} \quad ✗$$
$$A'_{66} = 2A'_{1212} = (-1)^6 2A_{1212} = 2A_{1212} = A_{66} \quad ✓$$

→ Basé sur ces résultats, on peut voir que pour avoir que $A'_{ijkl} = A_{ijkl}$, il faut que:

$$A_{14} = A_{16} = A_{24} = A_{26} = A_{34} = A_{36} = A_{45} = A_{56} = 0 \tag{33}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
▷ Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Alors, si $\mathbf{A}$ est monoclinique et que le plan de symétrie a sa normale selon $\boldsymbol{e_2}$, alors la forme générique de $\mathbf{A}$ est:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & A_{15} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & A_{25} & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & A_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & A_{46} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{46} & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \tag{34}$$

→ Pour le cas où le plan de symétrie a sa normale selon $\boldsymbol{e_1}$ ou $\boldsymbol{e_3}$, il suffit d'intervertir certaines lignes et colonnes pour les indices 4 à 6.

→ On peut voir que l'on aura 13 constantes non-nulles. On peut montrer que l'on peut ramener cela à 12 par un changement de base approprié, ce qui fait que l'on a en fait 12 constantes indépendantes.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
▷ Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Si un matériau monoclinique de souplesse $\mathbf{S}$ est soumis à un chargement axial dans la direction $\boldsymbol{e_1}$, alors la déformation est donnée par:

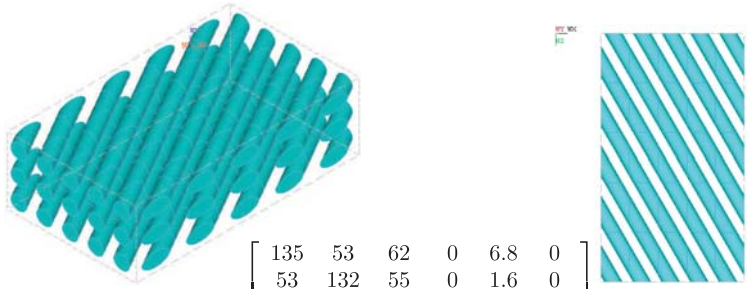
$$\mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} S_{11}\sigma_{11} \\ S_{12}\sigma_{11} \\ S_{13}\sigma_{11} \\ 0 \\ S_{15}\sigma_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 0 \\ \sqrt{2}\varepsilon_{31} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

→ On peut voir que contrairement à un matériau isotrope, $\varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{33}$ et qu'en plus, malgré que l'on ait un chargement uni-axial, une déformation de cisaillement ε_{31} apparaît.

→ Un exemple d'un matériau monoclinique serait par exemple une rangée de fibres dans un composite qui seraient comprises dans un plan mais qui ne serait pas alignées selon les autres axes.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
▷ Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

Exemple



$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 135 & 53 & 62 & 0 & 6.8 & 0 \\ 53 & 132 & 55 & 0 & 1.6 & 0 \\ 62 & 55 & 156 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 77 & 0 & 1.3 \\ 6.8 & 1.6 & 18 & 0 & 92 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3 & 0 & 74 \end{bmatrix}$$

Figure 4: Exemple de matériau monoclinique. Fibres (f) longues alignées et faisant un angle dans le plan xz dans une matrice (m) isotrope. Plan se symétrie selon la direction y. $E_f = 300$GPa, $E_m = 70$GPa, $\nu_s = \nu_m = 0.3$, $f_v = 30\%$. $\mathbf{C}$ obtenue par calcul éléments finis d'une cellule de base sur laquelle on a appliqué des conditions aux rives périodiques. Gracieuseté de Amine El-Mourid.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
▷ Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Un matériau orthotrope a une microstructure qui présente deux plans de symétrie.

→ Si on suppose que les vecteurs $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_3}$ sont les normales à ces plans de symétrie, il faut que $\mathbf{A}$ soit invariant par changement de base avec les matrices de passage suivantes:

$$\left[P^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left[P^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

où on aura que $P_{ij}^{(1)} = (-1)^n \delta_{ij}$, où $n = 1$ pour $i = j = 1$ et $n = 0$ autrement, et $P_{ij}^{(2)} = (-1)^m \delta_{ij}$, où $m = 1$ pour $i = j = 3$ et $m = 0$ autrement.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
▷ Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Pour le matériau orthotrope, on doit vérifier les deux équations suivantes:

$$\begin{aligned} A'_{ijkl} &= P_{mi}^{(1)} P_{nj}^{(1)} P_{ok}^{(1)} P_{pl}^{(1)} A_{mnop} \\ &= (-1)^w A_{ijkl} \end{aligned} \tag{37a}$$

$$\begin{aligned} A'_{ijkl} &= P_{mi}^{(2)} P_{nj}^{(2)} P_{ok}^{(2)} P_{pl}^{(2)} A_{mnop} \\ &= (-1)^z A_{ijkl} \end{aligned} \tag{37b}$$

où $w = 1$ pour un nombre impair d'indices égaux à 1 et $w = 0$ autrement, $z = 1$ pour un nombre impair d'indices égaux à 3 et $z = 0$ autrement.

→ En effectuant les vérifications comme précédemment (à faire en exercice), on trouve que l'on doit avoir:

$$\begin{aligned} A_{14} = A_{15} = A_{16} = A_{24} = A_{25} = A_{26} = A_{34} = \\ A_{35} = A_{36} = A_{45} = A_{46} = A_{56} = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
▷ Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

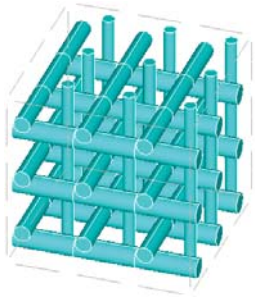
→ Alors, si $\mathbf{A}$ est orthotrope la forme générique de $\mathbf{A}$ est:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad (39)$$

→ On peut voir que si on avait pris deux autres plans de symétrie, on aurait obtenu le même résultat. Cela revient à dire que le fait d'avoir deux plans de symétrie dans la microstructure implique la présence d'un troisième.
→ On voit qu'un matériau orthotrope est défini par 9 constantes.
→ Un exemple de matériau est le même composite que l'exemple monoclinique mais où les fibres sont orientées selon un des axes de la base.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
▷ Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

Exemple



$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 244 & 29 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 29 & 84 & 28 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 28 & 88 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

Figure 5: Exemple de matériau orthotrope. Fibres (f) longues isotropes de modules différents disposées perpendiculairement dans une matrice (m) isotrope. Dans la direction x, $E_f = 3000$GPa et $\nu_f = 0.43$; dans la direction y, $E_f = 300$GPa et $\nu_f = 0.26$; dans la direction z, $E_f = 1500$GPa et $\nu_f = 0.43$. $E_m = 70$GPa et $\nu_m = 0.3$. $f_v = 17.45\%$. $\mathbf{C}$ obtenue par calcul éléments finis d'une cellule de base sur laquelle on a appliqué des conditions aux rives périodiques. Gracieuseté de Amine El-Mourid.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
Orthotropie
▷ Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Si la microstructure d'un matériau est invariante par rotations de $k\frac{\pi}{2}$ autour d'un axe, on dit qu'il a la symétrie quadratique.
→ Par exemple, si on étudie les rotations autour de z, la matrice de passage devient:

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos\left[k\frac{\pi}{2}\right] & -\sin\left[k\frac{\pi}{2}\right] & 0 \\ \sin\left[k\frac{\pi}{2}\right] & \cos\left[k\frac{\pi}{2}\right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

→ On peut donc définir trois matrices de passage pour $k = \{1, 2, 3\}$ et on obtiendra:

$$\left[P^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left[P^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left[P^{(3)}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
Orthotropie
▷ Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Pour que $\mathbf{A}$ possède la symétrie quadratique, il faut que:

$$A'_{ijkl} = P^{(z)}_{mi} P^{(z)}_{nj} P^{(z)}_{ok} P^{(z)}_{pl} A_{mnop} \quad \text{pour } z = \{1, 2, 3\} \quad (42)$$

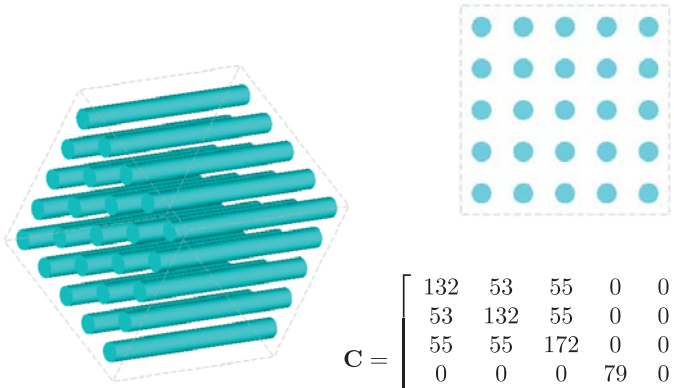
→ Si on effectue les calculs, on se rendra compte que $\mathbf{A}$ doit être de la forme:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad (43)$$

→ On pourra interpréter un tenseur quadratique comme un tenseur orthotrope pour lequel deux directions sont équivalentes.
→ La forme de $\mathbf{A}$ peut facilement se déduire les matériaux étant invariants par rotation de $k\frac{\pi}{2}$ autour des autres axes.
→ On a maintenant 6 composantes indépendantes.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
Orthotropie
▷ Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

Exemple



$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 132 & 53 & 55 & 0 & 0 & 0 \\ 53 & 132 & 55 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 55 & 172 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 79 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 79 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 73 \end{bmatrix}$$

Figure 6: Exemple de matériau quadratique. Fibres (f) longues isotropes alignées disposées selon un arrangement carré dans une matrice (m) isotrope. $E_f = 300$GPa, $\nu_f = 0.3$, $E_m = 70$GPa et $\nu_m = 0.3$. $f_v = 30\%$. $\mathbf{C}$ obtenue par calcul éléments finis d'une cellule de base sur laquelle on a appliqué des conditions aux rives périodiques. Gracieuseté de Amine El-Mourid.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
▷ Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Pour que $\mathbf{A}$ possède la symétrie cubique, il faut qu'il soit invariant par rotation de $k\frac{\pi}{2}$ autour des trois axes. La matrice de passage pour cette transformation est obtenue par rotation successive autour des axes x, y et z et est donnée par:

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left[\alpha\frac{\pi}{2}\right] & -\sin\left[\alpha\frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \sin\left[\alpha\frac{\pi}{2}\right] & \cos\left[\alpha\frac{\pi}{2}\right] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left[\beta\frac{\pi}{2}\right] & 0 & \sin\left[\beta\frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left[\beta\frac{\pi}{2}\right] & 0 & \cos\left[\beta\frac{\pi}{2}\right] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left[\gamma\frac{\pi}{2}\right] & -\sin\left[\gamma\frac{\pi}{2}\right] & 0 \\ \sin\left[\gamma\frac{\pi}{2}\right] & \cos\left[\gamma\frac{\pi}{2}\right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

où le $(\cdot)$ est le produit matriciel (i.e. simplement contracté) et où α, β et γ peuvent prendre les valeurs $1, 2$ et 3.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
▷ Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Il faut donc que $\mathbf{A}$ soit invariant par changement de base avec les 27 matrices de passage qui seront générées à partir de l'équation (44).

→ Si on effectue les calculs, on obtiendra

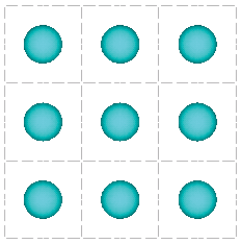
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \quad (45)$$

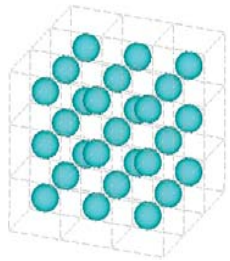
→ On aura 3 constantes indépendantes.

→ La symétrie cubique peut-être interprétée comme l'orthotropie où les trois directions sont équivalentes.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
▷ Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

Exemple





$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 139 & 54 & 54 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 139 & 54 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 54 & 139 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 38.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 38.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 38.5 \end{bmatrix}$$

Figure 7: Exemple de matériau composite à symétrie cubique. Sphères (s) élastiques et isotropes distribuées selon un arrangement régulier et cubique dans une matrice (m) élastique et isotrope. $E_s = 300$GPa, $E_m = 70$GPa, $\nu_s = \nu_m = 0.3$, $f_v = 30\%$. $\mathbf{C}$ obtenue par calcul éléments finis d'une cellule de base sur laquelle on a appliqué des conditions aux rives périodiques. Gracieuseté de Amine El-Mourid.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
▷ Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Similairement à la symétrie quadratique, un tenseur est rhomboédrique lorsque qu'il est invariant par des changement de base correspondant à des rotations de $k\frac{2\pi}{3}$ autour d'un seul axe.

→ Si par exemple l'axe de rhomboédrie est l'axe z, on aura les matrices de passage suivantes:

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos\left[k\frac{2\pi}{3}\right] & -\sin\left[k\frac{2\pi}{3}\right] & 0 \\ \sin\left[k\frac{2\pi}{3}\right] & \cos\left[k\frac{2\pi}{3}\right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{46}$$

où $k = \{1, 2, 3\}$. Il faut donc que $\mathbf{A}$ ait la même expression dans les 3 bases obtenues à l'aide des matrices de passage définies à l'équation (46).

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
▷ Rhomboédrique
Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Si on effectue les calculs, on aura

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & -A_{14} & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ A_{14} & -A_{14} & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & \sqrt{2}A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}A_{14} & A_{11} - A_{12} \end{bmatrix} \tag{47}$$

→ On aura donc 6 composantes indépendantes.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
▷ Iso. Transverse
Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Similairement à aux symétries cubiques et rhomboédriques, un tenseur isotrope transverse $\mathbf{A}$ est invariant par une rotation arbitraire autour d'un axe donné. Par exemple, si l'axe d'isotropie transverse est l'axe z, alors, la matrice de passage est:

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{48}$$

pour tout angle θ.

→ En répétant les mêmes opérations que pour les autres symétries, on trouvera qu'un tenseur isotrope transverse est de la forme:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} - A_{12} \end{bmatrix} \tag{49}$$

où on aura 5 composantes indépendantes.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Introduction
Triclinique
Monoclinique
Orthotropie
Quadratique
Cubique
Rhomboédrique
Iso. Transverse
▷ Isotropie
Projecteurs.
Const. Ingénieur

→ Un tenseur $\mathbf{A}$ est isotrope s'il a la même expression dans toutes les bases qui sont obtenues par des rotations arbitraires autour des tois axes

→ La matrice de passage est comme celle de l'équation (44) mais où les $\frac{\pi}{2}$ ont été enlevés.

→ En répétant les mêmes opérations que pour les autres symétries, on trouvera qu'un tenseur isotrope transverse est de la forme:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{11} - A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} - A_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} - A_{12} \end{bmatrix} \tag{50}$$

→ On aura donc 2 constantes indépendantes.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
▷ Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Si un tenseur d'ordre 4 est isotrope, on peut le décomposer en:

$$\mathbf{A} = \alpha\mathbf{J} + \beta\mathbf{K} \tag{51}$$

où $\mathbf{J} = \frac{1}{3}\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}$ et $\mathbf{K} = \mathbf{I} - \mathbf{J}$, avec $\boldsymbol{i}$ et $\mathbf{I}$ les tenseurs identité d'ordre 2 et 4.
(voir démonstration au tableau où l'on montre que $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ sont isotropes)

→ Si on fait les calculs, on aura que:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{K} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{52}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
▷ Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ En utilisant l'Équation (52) et si l'on fait les calculs, on a le résultat suivant: $\mathbf{J} : \mathbf{J} = \mathbf{J}$

→ Il en découle que:

- $\mathbf{J} : \mathbf{K} = \mathbf{J} : (\mathbf{I} - \mathbf{J}) = \mathbf{J} - \mathbf{J} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{K} : \mathbf{K} = \mathbf{K} : (\mathbf{I} - \mathbf{J}) = \mathbf{K} - \mathbf{0} = \mathbf{K}$

→ Les tenseurs $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ sont qualifiés d'orthogonaux.

→ Pour un tenseur de rigidité isotrope, on aura que:

$$\mathbf{C} = 3k\mathbf{J} + 2\mu\mathbf{K} \tag{53}$$

où k est le module de compressibilité et μ le module de cisaillement.

→ Pour un tenseur de souplesse isotrope, on aura que:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{3k}\mathbf{J} + \frac{1}{2\mu}\mathbf{K} \tag{54}$$

(**voir la démonstration au tableau**)

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
▷ Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Il découle de ces observations les propriétés suivantes. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A'}$ deux tenseurs d'ordre 4. Alors:

- $\mathbf{A} + \mathbf{A'} = (\alpha + \alpha')\,\mathbf{J} + (\beta + \beta')\,\mathbf{K}$
- $\mathbf{A} : \mathbf{A'} = (\alpha\alpha')\,\mathbf{J} + (\beta\beta')\,\mathbf{K}$
- $\lambda\mathbf{A} = \lambda\alpha\mathbf{J} + \lambda\beta\mathbf{K}$
- $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{J} + \frac{1}{\beta}\mathbf{K}$

→ Soit $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{J} + \beta\mathbf{K}$, alors:

- $\alpha = \mathbf{J} :: \mathbf{A}$
- $5\beta = \mathbf{K} :: \mathbf{A}$

(voir démonstrations au tableau)

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
▷ Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Soit $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations, alors

$$\begin{aligned}\mathbf{J} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{sph}\,(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon})\,\boldsymbol{i} \\ &= \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{55}$$

(à démontrer en exercice)

→ $\mathrm{sph}\,(\boldsymbol{\varepsilon})$ est appelée partie sphérique de $\boldsymbol{\varepsilon}$.

→ Soit $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations, alors

$$\begin{aligned}\mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{dev}\,(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon})\,\boldsymbol{i} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33} & 3\varepsilon_{12} & 3\varepsilon_{13} \\ 3\varepsilon_{12} & 2\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11}-\varepsilon_{33} & 3\varepsilon_{23} \\ 3\varepsilon_{13} & 3\varepsilon_{23} & 2\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{56}$$

(à démontrer en exercice)

→ $\mathrm{dev}\,(\boldsymbol{\varepsilon})$ est appelée partie déviatorique de $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
▷ Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
Const. Ingénieur

Interprétation

→ On a que

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \\ &= \frac{\Delta x}{L} + \frac{\Delta y}{L} + \frac{\Delta z}{L}\end{aligned} \tag{57}$$

où Δx, Δy et Δz sont les allongements infinitésimaux dans les directions x, y et z d'un cube de longueur L.

→ Si on calcule le changement de volume relatif, $\frac{V-V_0}{V_0}$, on aura que:

$$\begin{aligned}\frac{V-V_0}{V_0} &= \frac{(L+\Delta x)(L+\Delta y)(L+\Delta z) - L^3}{L^3} \\ &= \frac{L^2(\Delta x + \Delta y + \Delta z)}{L^3} + \\ &\quad \frac{L(\Delta x \Delta y + \Delta x \Delta z + \Delta y \Delta z)}{L^3} + \\ &\quad \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{L^3}\end{aligned} \tag{58}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
▷ Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Comme Δx, Δy et Δz sont très petits devant L, alors:

$$\begin{aligned}\frac{V-V_0}{V_0} &\approx \frac{\Delta x + \Delta y + \Delta z}{L} \\ &\approx \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\end{aligned} \tag{59}$$

→ Il est facile de montrer que:

$$\operatorname{tr}(\operatorname{sph}(\boldsymbol{\varepsilon})) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \approx \frac{V-V_0}{V_0} \tag{60a}$$

$$\operatorname{tr}(\operatorname{dev}(\boldsymbol{\varepsilon})) = 0 \tag{60b}$$

→ On peut donc voir que $\mathbf{J}$ permet d'extraire la partie d'un tenseur d'ordre 2 qui correspond au changement de volume, mais à forme constante. C'est pour cette raison que dans l'expression de $\mathbf{C}$, le module de compressibilité k multiplie $\mathbf{J}$.

→ On peut donc voir que $\mathbf{K}$ permet d'extraire la partie d'un tenseur d'ordre 2 qui correspond au changement de forme à volume constant. C'est pour cette raison que dans l'expression de $\mathbf{C}$, le module de cisaillement μ multiplie $\mathbf{K}$.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
▷ Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ On aussi vu plus haut que $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ permettent d'extraire les paramètres α et β (k et μ quand $\mathbf{A} = \mathbf{C}$).

→ Il est intéressant de remarquer que k et μ multiplient deux tenseurs orthogonaux. Cela permet d'interpréter k et μ comme des constantes associées à deux modes de déformation indépendants.

→ Ce n'est pas le cas avec le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν qui font appel avec des déformations qui changent à la fois la forme et le volume (sauf pour $\nu = 0.5$).

→ Pour ces raisons, on va préférer travailler dans ce cours avec (k, μ) qu'avec (E, ν) pour caractériser des matériaux isotropes. On verra que cela simplifie de beaucoup certains calculs.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
▷ Cubique
Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Définissons le tenseur

$$\begin{aligned}\mathbf{Z} = \boldsymbol{e_1} \otimes \boldsymbol{e_1} \otimes \boldsymbol{e_1} \otimes \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} \otimes \boldsymbol{e_2} \otimes \boldsymbol{e_2} \otimes \boldsymbol{e_2} \\ + \boldsymbol{e_3} \otimes \boldsymbol{e_3} \otimes \boldsymbol{e_3} \otimes \boldsymbol{e_3}\end{aligned} \tag{61}$$

où on peut voir que ce tenseur a la symétrie cubique. En effet, toutes les rotations de $\frac{\pi}{2}$ autour d'un axe vont faire en sorte que les deux autres vecteurs vont être interchangés.

→ Par exemple, si on effectue une rotation autour de $\boldsymbol{e_3}$ de $\frac{\pi}{2}$, on aura que $\boldsymbol{e_1'} = \boldsymbol{e_2}$ et que $\boldsymbol{e_2'} = -\boldsymbol{e_1}$. En appliquant la définition de $\mathbf{Z}$, on se rend compte que $\mathbf{Z}$ est invariant par les rotations de $\frac{\pi}{2}$, donc qu'il est de symétrie cubique.

→ Comme $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ sont isotropes, ils possèdent aussi la symétrie cubique.

→ Pour la symétrie cubique, on introduit les tenseurs suivants:

$$\mathbf{K_a} = \mathbf{Z} - \mathbf{J} \quad \text{et} \quad \mathbf{K_b} = \mathbf{K} - \mathbf{K_a} = \mathbf{I} - \mathbf{Z} \tag{62}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
▷ Cubique
Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ On peut montrer que $\mathbf{J}$, $\mathbf{K_a}$ et $\mathbf{K_b}$ sont orthogonaux (**voir preuve au tableau**).

→ Il en découle qu'un tenseur $\mathbf{A}$ à symétrie cubique peut s'exprimer par:

$$\mathbf{A} = \alpha\mathbf{J} + \beta\mathbf{K_a} + \gamma\mathbf{K_b} \tag{63}$$

→ On aura les mêmes propriétés (addition, inverse, double contraction, multiplication par un scalaire) que pour le tenseur isotrope, ce qui peut être très utile pour les calculs.

→ Pour interpréter les tenseurs $\mathbf{J}$, $\mathbf{K_a}$ et $\mathbf{K_b}$, nous allons procéder de la même manière que pour l'isotropie. Soit $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations.

→ Comme pour l'isotropie, $\mathbf{J} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{sph}\,(\boldsymbol{\varepsilon})\,\boldsymbol{i}$

→

$$\mathbf{K_a} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \tag{64}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
▷ Cubique
Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→

$$\mathbf{K_b} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3\varepsilon_{12} & 3\varepsilon_{13} \\ 3\varepsilon_{12} & 0 & 3\varepsilon_{23} \\ 3\varepsilon_{13} & 3\varepsilon_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{65}$$

→ On peut donc voir que $\mathbf{K_a}$ extrait la partie axiale de la partie déviatorique des déformations tandis que $\mathbf{K_b}$ extrait les de cisaillement de la partie déviatorique du tenseur des déformations.

→ Alors, si $\mathbf{C}$ est un tenseur de rigidité à symétrie cubique, on aura que:

$$\mathbf{C} = 3k\mathbf{J} + 2\mu^a\mathbf{K_a} + 2\mu^b\mathbf{K_b} \tag{66}$$

où μ^a et μ^b pourraient être interprétés comme deux modules de cisaillement: μ^a pour le changement de forme d'un cube à un prisme et μ^b pour le changement des angles droits du prisme.

→ De manière similaire à l'isotropie, on aura les relations suivantes:

$$\mathbf{J} :: \mathbf{A} = \alpha; \quad \mathbf{K_a} :: \mathbf{A} = 2\beta; \quad \mathbf{K_b} :: \mathbf{A} = 3\gamma \tag{67}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Des relations similaires existent pour l'isotropie transverse.

→ Soit $\boldsymbol{n}$, le vecteur d'isotropie transverse. On définit $\boldsymbol{i_T}$ le tenseur d'identité dans le plan transverse par:

$$\boldsymbol{i_T} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \tag{68}$$

– Par exemple, si $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e_3}$, on aura:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i_T} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{69}$$

→ On voit que $\boldsymbol{i_T}$ est $\boldsymbol{i}$ à laquelle on a retranché la composante correspondant à la direction de l'axe d'isotropie transverse.

→ Avec leur expressions matricielles, on peut facilement voir que $\boldsymbol{i_T} \cdot \boldsymbol{i_T} = \boldsymbol{i_T}$ et que $(\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{i_T} = \boldsymbol{0}$.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Introduisons le tenseur $\mathbf{E_L} = \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}$

– Ce tenseur est isotrope transverse. Pour le montrer, considérons $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e_3}$. On peut voir que $E_{L_{ijkl}} = 0$ sauf pour $E_{L_{3333}} = 1$. Considérons le tenseur $\mathbf{E'_L}$ exprimé dans une base qui est la base d'origine à laquelle on a fait subir une rotation arbitraire autour de $\boldsymbol{n}$. Alors, on aura:

$$\begin{aligned} E'_{L_{ijkl}} &= P_{mi}P_{nj}P_{ok}P_{pl}E_{L_{mnop}} \\ &= P_{3i}P_{3j}P_{3k}P_{3l}E_{L_{3333}} \end{aligned} \tag{70}$$

Avec la définition de P_{ij} de l'équation (48), on voit que $P_{3i} = 0$, sauf pour $P_{33} = 1$. Alors, $E'_{L_{ijkl}} = 0$, sauf pour $i = j = k = l = 3$ où il vaut $E_{L_{3333}}$. On vient donc de prouver que $\mathbf{E_L}$ est isotrope transverse.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Introduisons le tenseur $\mathbf{J_T} = \frac{1}{2} \boldsymbol{i_T} \otimes \boldsymbol{i_T}$

- Ce tenseur est isotrope transverse. Pour le montrer, considérons $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e_3}$. En utilisant la définition de $\boldsymbol{i_T}$, on a que:

$$\begin{aligned}\mathbf{J_T} &= \frac{1}{2}\big[\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}\otimes(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n})\otimes\boldsymbol{i} \\ &\quad + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\big] \\ &= \frac{1}{2}\big[3\mathbf{J} + \mathbf{E_L} - \boldsymbol{i}\otimes(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n})\otimes\boldsymbol{i}\big]\end{aligned} \tag{71}$$

- On a déjà montré que $\mathbf{J}$ et $\mathbf{E_L}$ étaient au moins isotropes transverse.
- Montrez que $\boldsymbol{i}\otimes(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n})\otimes\boldsymbol{i}$ est isotrope transverse. **à faire en exercice**

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Introduisons le tenseur $\mathbf{I_T}$. Ce tenseur permet d'extraire les composantes dans le plan d'isotropie transverse d'un tenseur d'ordre deux. Par exemple, si $\boldsymbol{e_3}$ est l'axe d'isotropie transverse, alors:

$$\mathbf{I_T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{72}$$

→ Si on effectue les calculs, on aura que:

$$\mathbf{I_T} : \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{73}$$

ce qui est bien le résultat voulu.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Introduisons les tenseurs suivants:

$$\mathbf{K_E} = \frac{1}{6}\,(2\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} - \boldsymbol{i_T})\otimes(2\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} - \boldsymbol{i_T}) \tag{74a}$$

$$\mathbf{K_T} = \mathbf{I_T} - \mathbf{J_T} \tag{74b}$$

$$\mathbf{K_L} = \mathbf{K} - \mathbf{K_T} - \mathbf{K_E} \tag{74c}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(\boldsymbol{i_T}\otimes\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}) \tag{74d}$$

où $\mathbf{F}$ n'est pas symétrique.

→ On peut montrer que tout tenseur $\mathbf{A}$ isotrope transverse peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{A} = \alpha\mathbf{E_L} + \beta\mathbf{J_T} + \gamma\mathbf{F} + \gamma'\mathbf{F}^{\mathsf{T}} + \delta\mathbf{K_T} + \delta'\mathbf{K_L} \tag{75}$$

où $\gamma = \gamma'$ si $\mathbf{A}$ est symétrique. Cette relation générale est présentée car il est possible que pour certains produits doublement contractés, le tenseur résultant ne soit plus symétrique.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Les tenseurs $\mathbf{E_L}$, $\mathbf{J_T}$, $\mathbf{K_E}$, $\mathbf{K_T}$ et $\mathbf{K_L}$ sont des projecteurs orthogonaux, comme $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$, par exemple.

→ Soit $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations. Nous allons interpréter ces différents tenseurs en considérant leur effet sur $\boldsymbol{\varepsilon}$. On considère toujours que l'axe d'isotropie transverse est $\boldsymbol{e_3}$.

→ On peut voir que:

$$\mathbf{E_L} : \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{76}$$

→ On peut voir que $\boldsymbol{E_L}$ a l'effet d'extraire la déformation uniaxiale selon l'axe d'isotropie transverse.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Si on fait les calculs, on aura que:

$$\mathbf{J_T} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{77}$$

→ On peut voir que $\boldsymbol{J_T}$ extrait le changement de surface dans le plan transverse.

→ Si on fait les calculs, on aura que:

$$\mathbf{K_E} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{78}$$

→ On peut voir que $\boldsymbol{K_E}$ extrait l'allongement à volume constant selon l'axe d'isotropie transverse.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Si on fait les calculs, on aura que:

$$\mathbf{K_T} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} & 2\varepsilon_{12} & 0 \\ 2\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{79}$$

→ On peut voir que $\boldsymbol{K_T}$ extrait les composantes de cisaillement dans le plan transverse (à surface constante).

→ Si on fait les calculs, on aura que:

$$\mathbf{K_L} : \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{80}$$

→ On peut voir que $\mathbf{K_L}$ extrait les composantes de cisaillement faisant intervenir l'axe d'isotropie transverse.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Si on fait les calculs, on aura que:

$$\left(\mathbf{F} + \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\right) : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_{33} & 0 & 0 \\ & \varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \tag{81}$$

→ En effectuant les calculs on voit $\mathbf{F}$ fait apparaître ε_{33} aux positions 11 et 22 du tenseur résultant tandis que $\mathbf{F}^{\mathsf{T}}$ fait apparaître ε_{11} et ε_{22} à la position 33 du tenseur résultant.

→ Le tenseur $\mathbf{F}$ fait donc apparaître le couplage qu'il y a entre l'allongement dans la direction d'isotropie transverse et celle dans le plan transverse, et vice-versa.

→ $\mathbf{F}$ n'est pas un projecteur orthogonal par rapport aux autres tenseurs introduits pour définir l'isotropie transverse. Les règles d'additivité et de contraction ne sont pas aussi simples que celles décrites pour l'isotropie et la symétrie cubique.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Si on a deux tenseurs isotropes transverses $\mathbf{A^{(1)}}$ et $\mathbf{A^{(2)}}$, alors:

$$\begin{aligned} \mathbf{A^{(1)}} + \mathbf{A^{(2)}} = {} & (\alpha_1 + \alpha_2)\, \mathbf{E_L} \\ & + (\beta_1 + \beta_2)\, \mathbf{J_T} + (\gamma_1 + \gamma_2)\, \mathbf{F} + \left(\gamma_1' + \gamma_2'\right) \mathbf{F}^{\mathsf{T}} \\ & + (\delta_1 + \delta_2)\, \mathbf{K_T} + \left(\delta_1' + \delta_2'\right) \mathbf{K_L} \end{aligned} \tag{82}$$

→ Le produit contracté devient:

$$\begin{aligned} \mathbf{A^{(1)}} : \mathbf{A^{(2)}} = {} & \left(\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1'\gamma_2\right) \mathbf{E_L} \\ & + \left(\beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2'\right) \mathbf{J_T} + (\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2)\, \mathbf{F} \\ & + \left(\alpha_1\gamma_2' + \gamma_1'\beta_2\right) \mathbf{F}^{\mathsf{T}} + (\delta_1\delta_2)\, \mathbf{K_T} \\ & + \left(\delta_1'\delta_2'\right) \mathbf{K_L} \end{aligned} \tag{83}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ Il est donc commode de représenter un tenseur isotrope transverse par le triplet:

$$\mathbf{A} = \left\{\mathbf{\Omega}, \delta, \delta'\right\}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma' \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} \tag{84}$$

→ Les règles opératoires deviennent donc:

$$\begin{aligned} \mathbf{A^{(1)}} + \mathbf{A^{(2)}} &= \left\{\mathbf{\Omega^{(1)}}, \delta_1, \delta_1'\right\} + \left\{\mathbf{\Omega^{(2)}}, \delta_2, \delta_2'\right\} \\ &= \left\{\mathbf{\Omega^{(1)}} + \mathbf{\Omega^{(2)}}, \delta_1 + \delta_2, \delta_1' + \delta_2'\right\} \end{aligned} \tag{85a}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A^{(1)}} : \mathbf{A^{(2)}} &= \left\{\mathbf{\Omega^{(1)}}, \delta_1, \delta_1'\right\} : \left\{\mathbf{\Omega^{(2)}}, \delta_2, \delta_2'\right\} \\ &= \left\{\mathbf{\Omega^{(1)}} \cdot \mathbf{\Omega^{(2)}}, \delta_1\delta_2, \delta_1'\delta_2'\right\} \end{aligned} \tag{85b}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \left\{\mathbf{\Omega}^{-1}, \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta'}\right\} \tag{85c}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Const. Ingénieur

→ En effectuant les calculs, on trouvera que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E_L} :: \mathbf{A} = \alpha; \quad \boldsymbol{J_T} :: \mathbf{A} = \beta; \quad \mathbf{F}^{\mathsf{T}} :: \mathbf{A} = \gamma \\ \mathbf{F} :: \mathbf{A} = \gamma'; \quad \mathbf{K_T} :: \mathbf{A} = 2\delta; \quad \mathbf{K_L} :: \mathbf{A} = 2\delta' \end{aligned} \tag{86}$$

ce qui peut être très utile pour trouver la décomposition d'un tenseur isotrope transverse lorsque l'on connaît son expression tensorielle.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
▷ Introduction
Orthotropie
Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
Déf. Positif

→ On a souvent recours aux constantes d'ingénieur pour décrire des tenseurs de rigidité ou souplesse.

→ Ces constantes sont physiquement plus faciles à comprendre que celles présentées jusqu'à maintenant, mais ont des propriétés mathématiques moins intéressantes (on verra pourquoi plus loin).

→ On connaît trois types de constantes d'ingénieur

1. Module d'Young E_i défini par: $E_i = \frac{\sigma_{ii}}{\varepsilon_{ii}}$ lorsque le matériau est soumis à une contrainte σ_{ii}, toutes les autres étant nulles.
2. Coefficient de Poisson ν_{ij} défini par $\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}}$ lorsque le matériau est soumis à une contrainte σ_{ii}, toutes les autres étant nulles.
3. Les modules de cisaillement G_{ij} dans le plan ij.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
▷ Orthotropie
Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
Déf. Positif

→ Avec les constantes d'ingénieur, la souplesse $\mathbf{S}$ d'un tenseur orthotrope est donnée par:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \tag{87}$$

→ La rigidité $\mathbf{C}$ sera donnée par $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}$ (le résultat n'est pas donné ici car il est relativement complexe).

→ On verra plus tard que les rigidités et les souplesses sont toujours symétriques. Cela permet de déduire les résultats suivants:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}; \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}; \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \tag{88}$$

Isotropie

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
▷ Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
Déf. Positif

→ Avec les constantes d'ingénieur, la souplesse $\mathbf{S}$ d'un tenseur isotrope est donnée par:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix} \tag{89}$$

→ En se rappelant que $\mathbf{S} = \alpha\mathbf{J} + \beta\mathbf{K}$, que $\alpha = \mathbf{J} :: \mathbf{S}$ et que $5\beta = \mathbf{K} :: \mathbf{S}$, on aura que (après avoir effectué les calculs):

$$\alpha = \frac{1-2\nu}{E} = \frac{1}{3k} \tag{90a}$$

$$\beta = \frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2\mu} \tag{90b}$$

où k et μ sont les modules de compressibilité et de cisaillement, respectivement.

Isotropie - note sur le module de compressibilité

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
▷ Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
Déf. Positif

→ Par définition, le module de compressibilité relie la pression hydrostatique p au changement de volume relatif $\Delta V/V_0$ par la relation:

$$p = k\frac{\Delta V}{V_0} \tag{91}$$

→ La pression hydrostatique est donnée par $p = \sigma_{ii}/3$ et le changement de volume relatif est donné par $\Delta V/V_0 = \varepsilon_{ii}$.

→ En utilisant la souplesse d'un tenseur isotrope soumis à une pression hydrostatique p, on trouve que:

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{92}$$

→ On peut donc voir que l'on peut relier les constantes devant les projecteurs aux constantes d'ingénieur.

Symétrie cubique

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
Isotropie
▷ Cubique
Iso. Transverse
Déf. Positif

→ Avec les constantes d'ingénieur, la souplesse $\mathbf{S}$ d'un tenseur à symétrie cubique est donnée par:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix} \tag{93}$$

→ En se rappelant que $\mathbf{S} = \alpha\mathbf{J} + \beta\mathbf{K_a} + \gamma\mathbf{K_b}$, que $\alpha = \mathbf{J} :: \mathbf{S}$, que $2\beta = \mathbf{K_a} :: \mathbf{S}$ et que $3\gamma = \mathbf{K_b} :: \mathbf{S}$, on aura que:

$$\alpha = \frac{1-2\nu}{E} = \frac{1}{3k} \tag{94a}$$

$$\beta = \frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2\mu^a} \tag{94b}$$

$$\gamma = \frac{1}{2G} = \frac{1}{2\mu^b} \tag{94c}$$

où k, μ^a et μ^b sont les modules de compressibilité et de cisaillement

Isotropie transverse

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Déf. Positif

→ Avec les constantes d'ingénieur, la souplesse $\mathbf{S}$ d'un tenseur isotrope transverse est donnée par:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_t} & -\frac{\nu_t}{E_t} & -\frac{\nu_l}{E_l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_t}{E_t} & \frac{1}{E_t} & -\frac{\nu_l}{E_l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_l}{E_l} & -\frac{\nu_l}{E_l} & \frac{1}{E_l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_t}{E_t} \end{bmatrix} \tag{95}$$

où l'axe d'isotropie transverse est $\boldsymbol{e_3}$, $E_t = E_1 = E_2$, $E_l = E_3$, $\nu_t = \nu_{12} = \nu_{21}$, $\nu_l = \nu_{31} = \nu_{32}$, $G_l = G_{23} = G_{13}$.

→ Il est aussi intéressant de définir les quantités suivantes:

- Le module de cisaillement transverse $G_t = \frac{E_t}{2(1+\nu_t)}$
- Le module de compressibilité transverse à état plan de déformation $K_t = \frac{E_t E_l}{2\left[(1-\nu_t)E_l - 2\nu_l^2 E_t\right]}$ **(voir démonstration au tableau)**.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Déf. Positif

→ En se rappelant que $\mathbf{S} = \alpha\mathbf{E_L} + \beta\mathbf{J_T} + \gamma\left(\mathbf{F} + \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\right) + \delta\mathbf{K_T} + \delta'\mathbf{K_L}$ et en effectuant les calculs, on aura que:

$$\alpha = \mathbf{E_L} :: \mathbf{S} = \frac{1}{E_l} \tag{96a}$$

$$\beta = \mathbf{J_T} :: \mathbf{S} = \frac{1-\nu_t}{E_t} \tag{96b}$$

$$\gamma = \gamma' = \mathbf{F} :: \mathbf{S} = -\frac{\sqrt{2}\nu_l}{E_l} \tag{96c}$$

$$\delta = \frac{1}{2}\mathbf{K_T} :: \mathbf{S} = \frac{1+\nu_t}{E_t} \tag{96d}$$

$$\delta' = \frac{1}{2}\mathbf{K_L} :: \mathbf{S} = \frac{1}{2G_l} \tag{96e}$$

→ Il serait intéressant d'interpréter le lien entre les constantes d'ingénieur et les modules utilisés pour définir une rigidité isotrope transverse.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Déf. Positif

→ Si on nomme par α^c, β^c, γ^c, δ^c et $\delta^{c'}$ les modules d'un tenseur de rigidité isotrope transverse $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}$ et en utilisant la relation (85c), on obtient:

$$\begin{bmatrix} \alpha^c & \gamma^c \\ \gamma^c & \beta^c \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha\beta - \gamma^2}\begin{bmatrix} \beta & -\gamma \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \tag{97a}$$

$$\delta^c = \frac{1}{\delta} \tag{97b}$$

$$\delta^{c'} = \frac{1}{\delta'} \tag{97c}$$

→ En utilisant les résultats de l'équation (96) on a que:

$$\begin{aligned} \alpha^c = \frac{\beta}{\alpha\beta - \gamma^2} &= \frac{\frac{1-\nu_t}{E_t}}{\frac{1}{E_l}\frac{1-\nu_t}{E_t} - \frac{2\nu_l^2}{E_l^2}} \\ &= E_l + 4\nu_l^2 K_t \end{aligned} \tag{98}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Déf. Positif

→ On aura de plus:

$$\begin{aligned} \beta^c = \frac{\alpha}{\alpha\beta - \gamma^2} &= \frac{1}{E_l}\frac{1}{\frac{1}{E_l}\frac{1-\nu_t}{E_t} - \frac{2\nu_l^2}{E_l^2}} \\ &= \frac{E_l E_t}{E_l(1-\nu_t) - 2E_t\nu_l^2} \\ &= 2K_t \end{aligned} \tag{99a}$$

$$\begin{aligned} \gamma^c = -\frac{\gamma}{\alpha\beta - \gamma^2} &= \frac{\sqrt{2}\nu_l}{\frac{1}{E_l}\frac{1-\nu_t}{E_t} - \frac{2\nu_l^2}{E_l^2}} \\ &= 2\sqrt{2}\nu_l K_t \end{aligned} \tag{99b}$$

$$\delta^c = \frac{1}{\delta} = 2G_t \tag{99c}$$

$$\delta^{c'} = \frac{1}{\delta'} = 2G_l \tag{99d}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
Isotropie
Cubique
▷ Iso. Transverse
Déf. Positif

→ Il est intéressant de remarquer que δ^c et $\delta^{c'}$ sont reliés aux modules de cisaillement d'un matériau isotrope transverse.

→ β^c, qui multiplie $\mathbf{J_T}$, fait aussi apparaître un module de compressibilité, comme dans le cas de l'isotropie et de la symétrie cubique.

→ Les termes α^c et γ^c sont plus difficiles à interpréter car ils font intervenir un couplage entre E_l, ν_l et K_t.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
▷ Déf. Positif

→ Un tenseur $\mathbf{A}$ est dit défini positif si

$$\boldsymbol{\alpha} : \mathbf{A} : \boldsymbol{\alpha} > 0 \ \forall \boldsymbol{\alpha} \tag{100}$$

→ Il est commun de noter $\mathbf{A} > 0$ pour indiquer qu'il est défini positif, bien que cette relation n'ait pas de sens.

→ Lorsque $\mathbf{A}$ possède les symétries majeures et mineures, on a vu que la relation précédente s'écrit sous la forme

$$\{\boldsymbol{\alpha}\}^{\mathsf{T}} [\mathbf{A}] \{\boldsymbol{\alpha}\} > 0 \ \forall \{\boldsymbol{\alpha}\} \tag{101}$$

où $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ est un vecteur à 6 composantes et $[\mathbf{A}]$ est une matrice 6×6 symétrique.

→ Lorsque l'on a une matrice carrée et symétrique, il est toujours possible de trouver une base dans laquelle cette matrice est diagonale. Si on nomme par λ_{ii} les termes sur la diagonale, qui sont en fait les valeurs propres, la relation (101) devient:

$$\alpha_i \lambda_{ii} \alpha_i > 0 \iff \lambda_{ii} > 0 \tag{102}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
▷ Déf. Positif

→ Alors, pour déterminer si $\mathbf{A} > 0$, il suffit de calculer ses valeurs propres et de s'assurer qu'elles soient toutes strictement positives.

→ En mécanique, on montrera plus tard que $\mathbf{S} > 0$ et $\mathbf{C} > 0$, sinon, le matériau n'est pas admissible thermodynamiquement. Si on entre une matrice de rigidité qui n'est pas définie positive dans un code de calculs par éléments finis, on peut obtenir des erreurs. C'est ce qui arrive typiquement lorsque l'on ne connaît pas toutes les propriétés mécaniques (constantes d'ingénieur) et que l'on fait des suppositions.

→ Déterminer si la rigidité ou la souplesse de notre matériau est définie positive est donc très important et a des implications pratiques.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
▷ Déf. Positif

→ Pour un matériau isotrope, la matrice de rigidité $\mathbf{C}$ est donnée par:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha+2\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha+2\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha+2\beta}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \tag{103}$$

→ Les valeurs propres de $\mathbf{C}$ sont obtenues en résolvant le système $\det[\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}] = 0$. Compte tenu de la forme de $\mathbf{C}$, on peut voir que l'on aura trois valeurs propres répétées qui valent β (trois derniers termes sur la diagonale) et les autres valeurs propres seront données par:

$$\det \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \alpha+2\beta-\lambda & \alpha-\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \alpha+2\beta-\lambda & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \alpha-\beta & \alpha+2\beta-\lambda \end{bmatrix} = (\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)^2 = 0 \tag{104}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
▷ Déf. Positif

→ Il faut donc que $\alpha = 3k > 0$ et $\beta = 2\mu > 0$ pour que $\mathbf{C} > 0$.

→ Avec les constantes d'ingénieur, on a que $k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$. On voit que $E > 0$ et que $\nu \leq 0.5$.

→ Avec les constantes d'ingénieur, on a que $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$. On voit que $E > 0$ et que $\nu \geq -1$.

→ Donc, un tenseur isotrope sera défini positif uniquement si $E > 0$ et $-1 \leq \nu \leq 0.5$.

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
▷ Déf. Positif

→ Pour un matériau à symétrie cubique, la matrice de rigidité $\mathbf{C}$ est donnée par:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha+2\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha+2\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha+2\beta}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \tag{105}$$

→ Les valeurs propres de cette matrice sont $\{\alpha, \beta, \beta, \gamma, \gamma, \gamma\}$. Donc, pour un tenseur à symétrique cubique défini positif, on aura:

1. $E > 0$
2. $G > 0$
3. $-1 \leq \nu \leq 0.5$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
▷ Déf. Positif

→ Pour un matériau isotrope transverse, la matrice de rigidité $\mathbf{C}$ est donnée par:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\beta+\delta}{2} & \frac{\beta-\delta}{2} & \frac{\gamma}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta-\delta}{2} & \frac{\beta+\delta}{2} & \frac{\gamma}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2}} & \frac{\gamma}{\sqrt{2}} & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} \tag{106}$$

→ Comme pour l'isotropie et la symétrie cubique, on peut voir que $\{\delta', \delta', \delta\}$ seront des valeurs propres. Pour les autres valeurs propres, on doit solutionner pour λ

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\beta+\delta}{2} - \lambda & \frac{\beta-\delta}{2} & \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \\ \frac{\beta-\delta}{2} & \frac{\beta+\delta}{2} - \lambda & \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2}} & \frac{\gamma}{\sqrt{2}} & \alpha - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{107}$$

Rappels
Définitions
Opérations
Symétries
Symétries mat.
Projecteurs.
Const. Ingénieur
Introduction
Orthotropie
Isotropie
Cubique
Iso. Transverse
▷ Déf. Positif

→ Si on fait les calculs, on aura l'équation caractéristique suivante:

$$(\delta - \lambda)\left(\alpha\beta - \gamma^2 - (\alpha + \beta)\lambda + \lambda^2\right) = 0 \tag{108}$$

→ On voit que δ est une valeur propre et les deux autres seront données par la solution de l'équation de la parenthèse de droite, soit

$$\lambda_5, \lambda_6 = \frac{\alpha + \beta \pm \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4(\alpha\beta - \gamma^2)}}{2} \tag{109}$$

→ On voit donc que les deux dernières valeurs propres seront positives si $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha\beta \geq \gamma^2$.

→ Alors, si on récapitule, $\mathbf{C} > 0$ si et seulement si:

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0; \quad \delta > 0; \quad \delta' > 0; \quad \alpha\beta \geq \gamma^2 \tag{110}$$

→ En connaissant le lien entre les constantes d'ingénieur et les modules donnés plus haut, on peut tirer les inégalités à respecter entre les diverses constantes.