Calculus de J. Stewart - Errata

Mis à jour le **4 novembre 2011**

Exemple 4, p. 193

SOLUTION On trouve une borne sur l'erreur d'approximation autour de $(0,0)$. Les dérivées secondes de f calculées à l'exemple 3 sont :

$$f_{xx} = -y^2 \sin(xy) \quad f_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy) \quad f_{yy} = -x^2 \sin(xy).$$

Sur le disque $B_{1/2}(0,0)$, on a $0 \leq |x| \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq |y| \leq \frac{1}{2}$. De plus, $|\cos(xy)| \leq 1$ et $|\sin(xy)| \leq 1$ quels que soient x et y. Par conséquent,

$$|f_{xx}| = |y^2 \sin(xy)| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad |f_{xy}| = |\cos(xy) - xy\sin(xy)| \leq |\cos(xy)| + |xy\sin(xy)| \leq 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{5}{4}.$$

De façon semblable, $|f_{yy}| \leq \frac{1}{4}$ sur $B_{1/2}(0,0)$. On peut donc choisir $M_L = \frac{5}{4}$, ce qui donne la borne sur l'erreur

$$|E_L(x,y)| \leq 2 \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{5}{8}.$$

On peut donc écrire $\sin(xy) \approx 0$ avec une erreur maximale de $\frac{5}{8}$ sur le disque $B_{1/2}(0,0)$. La distance du point $(0,1;0,1)$ au point $(0,0)$ est $d = \sqrt{0,1^2 + 0,1^2} = \sqrt{0,02}$. Par conséquent,

$$|E_L(0,1;0,1)| \leq 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot 0,02 = 0,05.$$

Exemple 5, p. 194

SOLUTION Les dérivées troisièmes de f sont

$$f_{xxx} = e^{x-y} \quad f_{x,x,y} = -e^{x-y} \quad f_{xyy} = e^{x-y} \quad f_{yyy} = -e^{x-y}.$$

Puisque l'exponentielle est une fonction corissante, e^{x-y} est maximale lorsque $x-y$ est maximale. Or, sur le rectangle R, la plus grande différence $x-y$ est de $0,3$ quand $x = 0,2$ et $y = -0,1$. Par conséquent, $|e^{x-y}| \leq e^{0,2-(-0,1)} = e^{0,3}$ sur R, et on peut choisir $M_Q = e^{0,3}$. Le point de R le plus éloigné de l'origine est $(0,2;0,1)$. Le rectangle R est donc contenu dans le disque centré en $(0,0)$ et de rayon $d = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} = \sqrt{0,05}$. On a ainsi déterminé la borne sur l'erreur

$$|E_Q(x,y)| \leq \frac{4e^{0,3}}{3}(0,5)^{3/2}.$$

On peut donc écrire

$$e^{x-y} \approx 1 + x - y + \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2}$$

avec une erreur d'au plus $\frac{\sqrt{2}}{3}e^{0,3}$ sur R.
