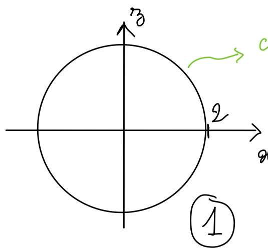
Semaine 7 : Exemple

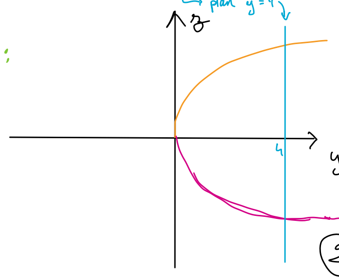
$$I = \iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\, dV \quad \text{où } E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} y \geq x^2+z^2 \\ y \leq 4 \end{array} \right\}$$

paraboloïde autour de l'axe y

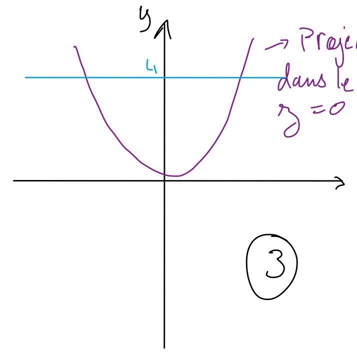
plan y = 4



courbe d'intersection : $4 = x^2 + z^2$



projection dans le plan $x = 0$: $y \geq z^2 \Rightarrow z \leq \sqrt{y}$ et $z \geq -\sqrt{y}$



→ Project° dans le plan $z = 0$

On a directement $x^2 + z^2 \leq y \leq 4$

On a borné y, donc on va utiliser le (1) :

On a alors en (1) : $x^2 + z^2 = 4$

$$\Rightarrow z^2 = 4 - x^2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{4-x^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2}$$

Enfin on a $-2 \leq x \leq 2$

$$I = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}\, dy\, dz\, dx = \underbrace{\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}}\sqrt{x^2+z^2}\,(4 - x^2 - z^2)\, \underbrace{dz\, dx}$$

On intègre sur le cercle !

On fait le passage aux coordonnées polaires :

$$x = r\cos\theta \qquad x^2 + z^2 = r^2$$
$$z = r\sin\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} r(4 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} 4r^2 - r^4\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2^2}{3} 2^3 - \frac{2^5}{5}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2^5}{3} - \frac{2^5}{5}\, d\theta$$

$$= 2\pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right)$$

$$= \frac{128}{15}\pi$$

<u>Remarque</u> : Intégrer en y puis passer le plan (x, z) en coordonnées polaires est équivalent à intégrer en coordonnées cylindriques !