TP 3 – Programmation par contraintes

1 Flow-Shop

1.1 Première situation

1. **Programmation linéaire entière mixte**

   (a) **Variante 1 :**

   Données :
   - $\mathcal{P}$: ensemble des pièces (i ou j)
   - $\mathcal{M}$: ensemble des machines (m)
   - t_i^m : durée de traitement de la pièce i sur la machine m
   - C : constante suffisamment grande

   Variables de décision :
   - d_i^m : début du traitement de la pièce i sur la machine m
   - f_i^m : fin du traitement de la pièce i sur la machine m
   - x_{ij}^m : variable binaire indiquant si la pièce i est traitée avant j sur la machine m (on peut se limiter aux paires $i > j$)
   - z : makespan

   Fonction objectif :

   $$\min z$$

   Contraintes :

   $$\begin{aligned}
   & f_i^m = d_i^m + t_i^m && \forall i \in \mathcal{P}, m \in \mathcal{M} && (1)\\
   & d_i^{m+1} \geq f_i^m && \forall i \in \mathcal{P}, m \in \mathcal{M} \setminus \{3\} && (2)\\
   & d_j^m \geq f_i^m - C(1 - x_{ij}^m) && \forall i \in P, j \in P : i > j, m \in M && (3)\\
   & d_i^m \geq f_j^m - C x_{ij}^m && \forall i \in \mathcal{P}, j \in \mathcal{P} : i > j, m \in \mathcal{M} && (4)\\
   & z \geq f_i^3 && \forall i \in \mathcal{P} && (5)\\
   & d_i^m \geq 0 && \forall i \in \mathcal{P}, m \in \mathcal{M} && (6)\\
   & x_{ij}^m \in \{0, 1\} && \forall i \in \mathcal{P}, j \in \mathcal{P} : i > j, m \in \mathcal{M} && (7)
   \end{aligned}$$

   - Contraintes (1) : La date de fin de la pièce est égale à la date de début plus la durée de traitement.
   - Contraintes (2) : Pour commencer la pièce à la machine $m+1$, il faut avoir fini la pièce à la machine précédente m.
   - Contraintes (3) : Cette contrainte est active seulement quand $x_{ij}^m = 1$. Dans ce cas, la pièce i est réalisée avant la pièce j sur la machine m, donc la pièce j doit commencer après la fin de la pièce i sur la machine m ($d_j^m \geq f_i^m$).
   - Contraintes (4) : Cette contrainte est active seulement quand $x_{ij}^m = 0$. Dans ce cas, la pièce j est réalisée avant la pièce i sur la machine m, donc la pièce i doit commencer après la fin de la pièce j sur la machine m ($d_i^m \geq f_j^m$).

— Contraintes (5) : Le makespan est supérieur à la date de fin de toutes les pièces sur la dernière machine (machine 3).

Obs. : Suite aux questions pendant le cours, si on définit x_{ij}^m avec $i \neq j$, on peut inclure des contraintes $x_{ij}^m = 1 - x_{ji}^m \quad \forall i \in P, j \in P : i \neq j, m \in M$. Ainsi, on peut utiliser seulement l'une des deux contraintes de Big-M, par exemple $d_i^m \geq f_j^m - Cx_{ij}^m \quad \forall i \in P, j \in P : i \neq j, m \in M$.

(b) **Variante 2 :**

Données :
— $\mathcal{P}$: ensemble des pièces (i ou j)
— $\mathcal{M}$: ensemble des machines (m)
— $\mathcal{T}$: ensemble des periodes de temps possibles (k)
— t_i^m : durée de traitement de la pièce i sur la machine m

Variables de décision :
— d_i^m : début du traitement de la pièce i sur la machine m
— f_i^m : fin du traitement de la pièce i sur la machine m
— y_{it}^m : variable binaire indiquant si la pièce i est commence au temps t sur la machine m
— z : makespan

Fonction objectif :

$$\min z$$

Contraintes :

$$(1), (2), (5), (6)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{T}} y_{ik}^m = 1 \qquad \forall i \in \mathcal{P} \tag{8}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{l \in]k - t_i^m, k]} y_{il}^m \leq 1 \qquad \forall t \in \mathcal{T} \tag{9}$$

$$d_i^m = \sum_{k \in \mathcal{T}} k y_{ik}^m \qquad \forall i \in \mathcal{P} \tag{10}$$

$$y_{ik}^m \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in \mathcal{P}, k \in \mathcal{T}, m \in \mathcal{M} \tag{11}$$

— Contraintes (8) : Chaque pièce doit avoir une date de début sur chaque machine.
— Contraintes (9) : À chaque période de temps, une seule pièce peut être en traitement sur chaque machine.
— Contraintes (10) : On doit défini le début des traitements selon la variable y.

2. **Programmation par contraintes**

Données :
— $\mathcal{P}$: ensemble des pièces (i)
— $\mathcal{M}$: ensemble des machines (m)
— t_i^m : durée de traitement de la pièce i sur la machine m

Variables de décision :
— d_i^m : début du traitement de la pièce i sur la machine m

— f_i^m : fin du traitement de la pièce i sur la machine m

Fonction objectif :

$$\min \max_{i \in P} f_i^3$$

Contraintes :

$$\begin{aligned}
& d_i^m \geq 0 && \forall i \in \mathcal{P}, m \in \mathcal{M} \\
& f_i^m = t_i^m + d_i^m && \forall i \in \mathcal{P}, m \in \mathcal{M} \\
& d_i^{m+1} \geq f_i^m && \forall i \in P, m \in \mathcal{M} \\
& d_i^m \geq f_j^m \quad \text{or} \quad d_j^m \geq f_i^m && \forall i \in \mathcal{P}, j \in \mathcal{P} : i \neq j, m \in \mathcal{M}
\end{aligned}$$

Le dernier ensemble de contraintes peut être formulé comme une contrainte de disjonction globale.

1.2 Deuxième situation

Nouvelles données :

— q_i^m : temps de transition de la pièce i sur la machine m

Nous devons remplacer les Contraintes (2) par les contraintes suivantes pour prendre en compte le temps de transition :

$$\begin{aligned}
& d_i^1 \geq q_i^1 && \forall i \in \mathcal{P} \\
& d_i^{m+1} \geq f_i^m + q_i^{m+1} && \forall i \in \mathcal{P}, m \in \mathcal{M} \backslash \{3\}.
\end{aligned}$$

Nous devons également inclure les contraintes suivantes conformément aux exigences de la question :

$$\begin{aligned}
& d_4^i = f_8^i && \forall i \in \mathcal{P} \\
& f_3^3 \leq f_5^3.
\end{aligned}$$

Nous obtenons un temps d'exécution final égal à 49.

2 Défi

Nous obtenons $A = 7$, $B = 9$, $C = 3$, $D = 6$ et $E = 5$