Devoir 2 – Réseaux et programmation en nombres entiers

Solutionnaire.

Question 1 (6 pts)

1. **Représentez graphiquement ce problème.**

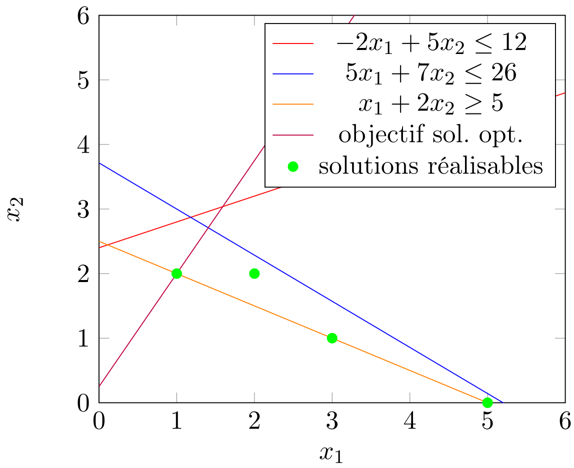

FIGURE 1 – Représentation graphique du problème.

2. **Résolvez manuellement ce problème avec un algorithme *branch-and-bound*.**

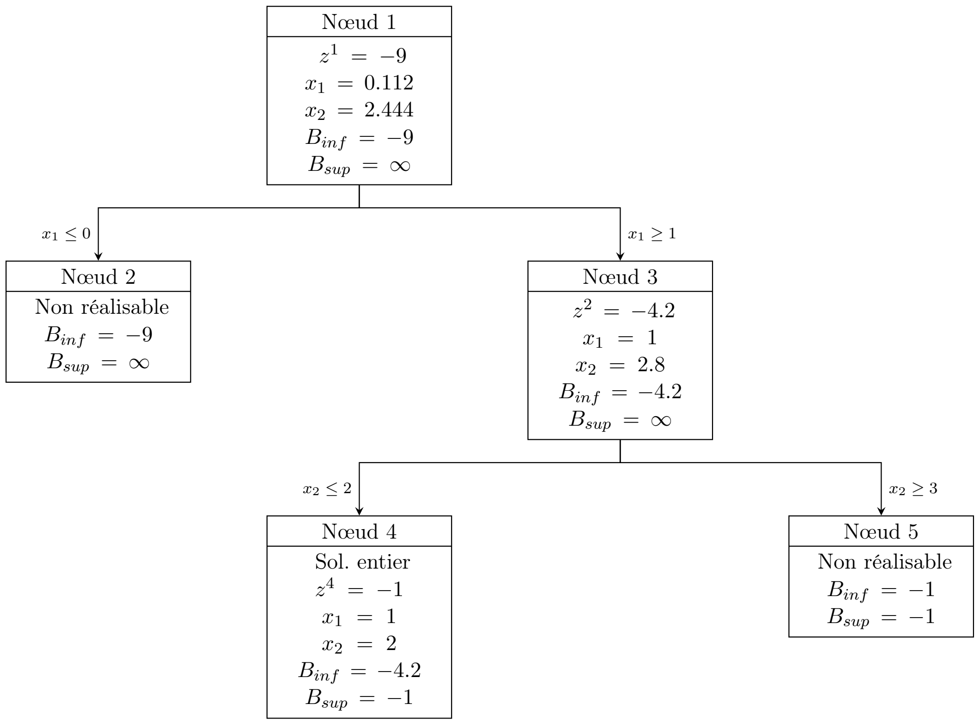

FIGURE 2 – Branch and Bound

- Les meilleures bornes supérieures et inférieures (B_{inf} et B_{sup}) à chaque nœud dépendent de l'ordre dans lequel les nœuds sont traités.
- Comme il s'agit d'un problème de minimisation, la borne supérieure est mise à jour lorsque des solutions entières faisables sont trouvées.
- Nous ne branchons pas après les nœuds 2 et 5 car ils sont infaisables, et nous ne branchons pas sur le nœud 4 car nous avons obtenu une solution entière.

3. **Donnez la solution optimale de ce problème.**

   La solution optimale est -1, avec $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

4. **Auriez-vous pu commencer en branchant sur x_2 ? Quel impact cela aurait-il sur le *branch-and-bound* ? Ne pas redétailler tout l'algorithme.**

   On aurait pu commencer par brancher sur x_2, on aurait trouvé le même résultat mais notre arbre de recherche aurait alors eu une hauteur diminuée de 1. Cela est dû au fait qu'en incluant la décision de branchement $x_2 \leq 2$, nous obtenons directement une solution entière. En revanche, en incluant la décision de branchement $x_2 \geq 3$, le problème devient infaisable.

Question 2 (14 pts)

1. **Représentez graphiquement cet énoncé sous la forme d'un réseau. Veillez à bien dessiner le réseau et à indiquer les coûts et bornes de chaque arrête.**

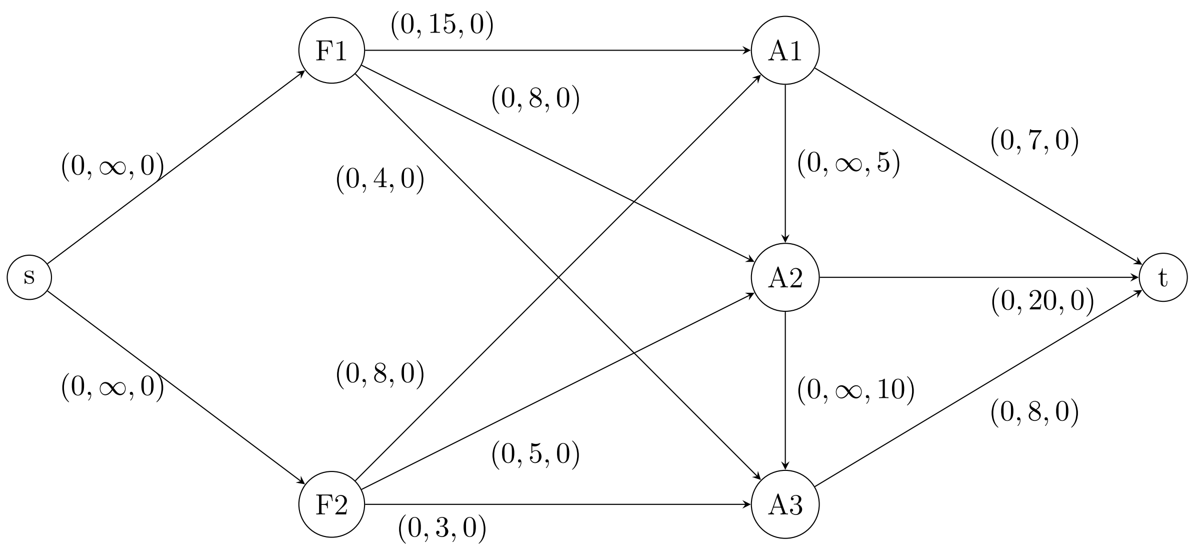

Figure 3 – Le réseau modélisant le problème.

Les nœuds A_1, A_2 et A_3 représentent les différentes années, tandis que les nœuds F_1 et F_2 représentent les différentes exploitations forestières. Les arcs reliant le nœud F_1 (respectivement F_2) aux années A_1, A_2 et A_3 modélisent les quantités de tonnes de bois coupées par F_1 (respectivement F_2) à chaque année. L'arc (A_1, t) (respectivement (A_2, t) et (A_3, t)) représente la quantité de tonnes de bois consommées durant l'année A_1 (respectivement A_2 et A_3). Les arcs (A_1, A_2) et (A_2, A_3) représentent le stock de bois de l'année A_1 à l'année A_2 et de l'année A_2 à l'année A_3.

2. **Modélisez ce problème sous la forme d'un problème de flux à coût minimum. Formalisez mathématiquement les données, les variables de décisions, la fonction objectif ainsi que les contraintes.**

Données :

— Ensemble des nœuds : $\mathcal{N} = \{s, F1, F2, A1, A2, A3, t\}$

— Ensemble des arcs : $\mathcal{A} = \begin{matrix} \{(s, F1), (s, F2), (F1, A1), (F1, A2), (F1, A3), (F2, A1), \\ (F2, A2), (F2, A3), (A1, A2), (A2, A3), (A1, t), (A2, t), (A3, t)\} \end{matrix}$

— Pour chaque arc $(i, j) \in \mathcal{A}$, nous avons (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}), où l_{ij} est la borne inférieure, u_{ij} est la borne supérieure, et c_{ij} est le coût unitaire

— Flux : $d = 35$.

Variables :

— x_{ij} :le flux circulant sur l'arc $(i, j) \in \mathcal{A}$.

Modèle :

$$\min \ : \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} : \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} = \begin{cases} d, & i = s \\ 0, & i \neq s, i \neq t \\ -d, & i = t \end{cases} \qquad \forall i \in \mathcal{N} \tag{2}$$

$$x_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall (i, j) \in \mathcal{A} \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq l_{ij} \qquad \forall (i, j) \in \mathcal{A} \tag{4}$$

3. **Donnez la solution optimale de ce problème, en expliquant votre raisonnement.**

On peut résoudre facilement ce problème à la main en remontant les étapes à l'envers.

— Puisqu'on cherche à minimiser les coûts de stockage, il est clair que la solution optimale nécessite de couper exactement la quantité de bois nécessaire pour satisfaire la demande de l'année 3. En effet, après la dernière année, le stock doit être vide.

— Ainsi, à l'année 3, nous disposons de seulement 7 tonnes de bois. Il est donc nécessaire de couper ces 7 tonnes, tout en maintenant un stock de 1 tonne entre les années 2 et 3 pour satisfaire la demande de 8 tonnes de cette année. (On coupe 4 tonnes de F1 et 3 tonnes de F2.)

— À l'année 2, il y a seulement 13 tonnes de bois disponibles. Il faut donc couper ces 13 tonnes, tout en maintenant un stock de 8 tonnes entre les années 1 et 2 : 7 tonnes pour répondre à la demande de 20 tonnes de l'année 2 et 1 tonne à envoyer à l'année 3. (On coupe 8 tonnes de F1 et 5 tonnes de F2.)

— À l'année 1, nous devons couper un total de 15 tonnes de bois (7 + 8 tonnes). Les 7 tonnes sont destinées à satisfaire la demande de l'année 1, tandis que les 8 tonnes restantes seront utilisées pour les années 2 et 3. (Nous choisissons de couper les 15 tonnes de F1.)

Ainsi, le coût de stockage est de $8 \times 5 + 1 \times 10 = 50$.

Le flux optimal complet obtenu est représenté en rouge dans la Figure 4.

4. **Modélisez et résolvez ce problème avec MiniZinc ; le modèle doit être générique (les données doivent être nommées et déclarées avant les contraintes, vous n'avez pas besoin de produire un `.dzn`).**

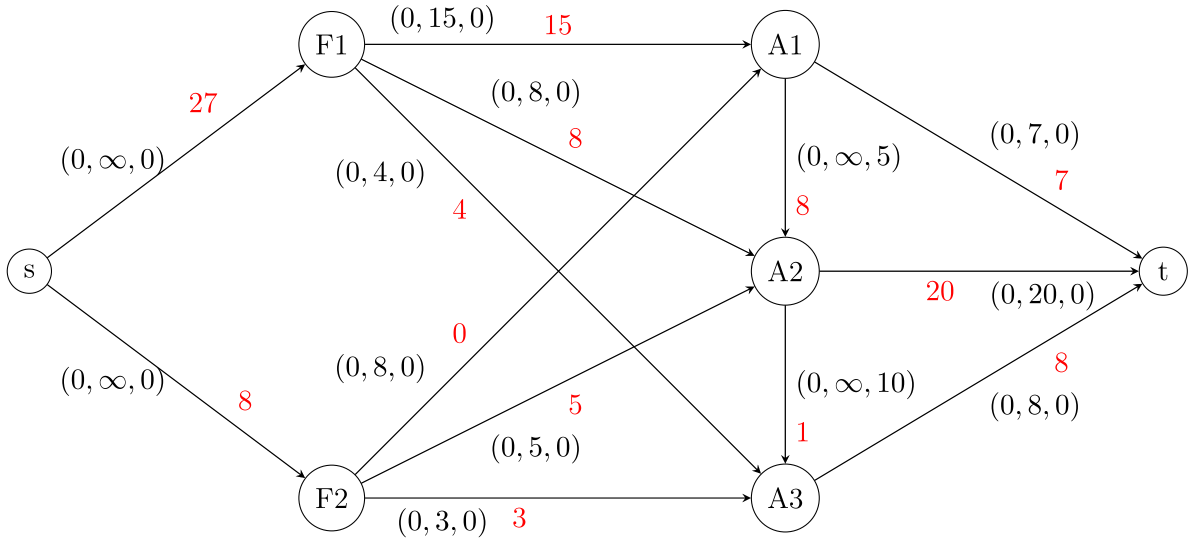

FIGURE 4 – Le flux optimal obtenu.

Regardez le fichier `devoir2_sol.mzn`. Les nœuds et arcs sont numérotés selon leur ordre au point 2.2, c'est-à-dire : $\mathcal{N} = \{s, F_1, F_2, A_1, A_2, A_3, t\}$ est représenté comme $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et alors $\mathcal{A} = \{(1,2),(1,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(5,6),(4,7),(5,7),(6,7)\}$.

(a) **Aviez-vous bien trouvé la solution optimale du problème ?**
En résolvant le modèle sur MiniZinc, on trouve $x = [27, 8, 15, 8, 4, 0, 5, 3, 8, 1, 7, 20, 8]$ (cela suit l'ordre des arcs montrés précédemment), avec un coût de 50. Ainsi, nous avons bien trouvé la solution optimale du problème. Nous avons trouvé la même solution que dans le point 3.3.
(b) **Est-elle unique ?**
Non, nous avons plusieurs solutions optimales. Cela s'explique par le fait qu'à l'année 1, nous devons couper 15 tonnes de bois, mais nous pouvons choisir la répartition de ces 15 tonnes entre F1 et F2 tout en respectant leurs capacités. Par exemple, nous pourrions également couper 10 tonnes de F1 et 5 tonnes de F2.
(c) **Décrivez la solution en français pour expliquer à Jean-Claude qui n'a pas suivi le cours MTH8414 le planning retenu.**
À l'année 1, nous devons couper 15 tonnes de bois de F1, utiliser 7 tonnes de ces 15 et stocker les 8 autres pour les années suivantes. À l'année 2, nous devons couper 8 tonnes de bois de F1 et 5 tonnes de bois de F2. Nous utilisons ces 13 tonnes, ainsi que 7 tonnes du stock de l'année précédente, pour répondre à la demande de l'année 2. Ainsi, nous stockons 1 tonne de bois de l'année 2 à l'année 3. À l'année 3, nous devons couper 4 tonnes de F1 et 3 tonnes de F2. Nous utilisons ces 7 tonnes, en plus de la tonne du stock de l'année précédente, pour satisfaire la demande de l'année 3.

5. **Jean-Claude se rend compte qu'il ne peut pas stocker plus de 5 tonnes de bois au total entre les années. Cela a-t-il une influence sur le problème ?**

   Oui, dans ce cas, le problème est non réalisable. En effet, nous devons stocker 8 tonnes de bois entre l'année 1 et l'année 2 pour satisfaire toute la demande.