

Devoir 2 – Réseaux et programmation en nombres entiers

Remise avant le 4 octobre à 23h59 sur Moodle.

Consignes

- Les devoirs doivent être réalisés seul ou par binôme (de préférence par binôme).
- Soumettez un document (format pdf) reprenant votre devoir, ainsi que votre modèle MiniZinc (fichier .mzn).
- Indiquez vos noms et matricules dans le titre des fichiers soumis.
- Veillez à rendre un rapport **structuré**, **clair** et **concis**. Les lacunes de forme seront pénalisées.
- L'utilisation d'une IA générative est **STRICTEMENT INTERDITE**.

Question 1 (6 pts)

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \underset{x_1, x_2}{\text{minimize}} \quad & 7x_1 - 4x_2 \\ \text{subject to} \quad & -2x_1 + 5x_2 \leq 12 \\ & 5x_1 + 7x_2 \leq 26 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

1. Représentez graphiquement ce problème.
2. Résolvez manuellement ce problème avec un algorithme *branch-and-bound*. Représentez graphiquement l'arbre de recherche obtenu en indiquant précisément pour chaque noeud : (a) la solution du problème relaxé (valeurs de x_1 et de x_2 ainsi que le coût de la solution), (b) l'ordre de visite des noeuds (1 pour le premier noeud visité, 2 pour le second, etc.), (c) les meilleures bornes supérieures et inférieures actuelles que vous avez lors de la visite d'un noeud, (d) la raison pour laquelle vous ne branchez pas sur un noeud (le cas échéant). Lors d'un branchement, indiquez également quelle contrainte vous avez rajouté. Branchez sur x_1 en premier dans l'algorithme.
3. Donnez la solution optimale de ce problème.
4. Auriez-vous pu commencer en branchant sur x_2 ? Quel impact cela aurait-il sur le *branch-and-bound*? Ne pas redétailler tout l'algorithme.

Question 2 (14 pts)

Jean-Claude, exploitant forestier de la région de Gaspésie, a besoin de votre aide. Il possède deux exploitations forestières (F_1 et F_2) et souhaite établir un planning optimal de coupe sur une période de trois années (A_1 , A_2 et A_3). A l'aide de prédictions passées, on a pu estimer le nombre de tonne de bois que l'on peut au maximum couper à chaque année et dans chacune des exploitations (Tableau 1). Chaque année, Jean-Claude doit satisfaire exactement une demande (Tableau 2). Par ailleurs, le bois coupé durant une année peut être stocké pour les années suivantes mais cela entraîne un coût de stockage (pour une année i , le coût porte sur la quantité de l'année $i - 1$ n'ayant pas été utilisée et qui est donc reporté à l'année suivante). Le stock de bois est vide initialement. L'objectif de Jean-Claude est de minimiser ses coûts tout en satisfaisant l'entièreté de ses demandes.

	A_1	A_2	A_3
F_1	15	8	4
F_2	8	5	3

TABLE 1 – Quantité en tonne de bois pouvant être exploitée pour chaque exploitation et année.

	A_1	A_2	A_3
Demande	7	20	8
Coût de stockage unitaire	7	5	10

TABLE 2 – Demande et cout de stockage par année.

1. Représentez graphiquement cet énoncé sous la forme d'un réseau. Veillez à bien dessiner le réseau et à indiquer les coûts et bornes de chaque arrête.
2. Modélisez ce problème sous la forme d'un **problème de flux à coût minimum**. Formalisez mathématiquement les données, les variables de décisions, la fonction objectif ainsi que les contraintes.
3. Donnez la solution optimale de ce problème, en expliquant votre raisonnement.
4. Modélisez et résolvez ce problème avec MiniZinc; le modèle doit être générique (les données doivent être nommées et déclarées avant les contraintes, vous n'avez pas besoin de produire un `.dzn`). (a) Aviez-vous bien trouvé la solution optimale du problème? (b) Est-elle unique? (c) Décrivez la solution en français pour expliquer à Jean-Claude qui n'a pas suivi le cours MTH8414 le planning retenu.
5. Jean-Claude se rend compte qu'il ne peut pas stocker plus de 5 tonnes de bois au total entre les années. Cela a-t-il une influence sur le problème?