Devoir 1: Résolution de programmes linéaires

Solutionnaire

Question 1 (2 pts)

1. **Représentez graphiquement l'espace des solutions faisables.**

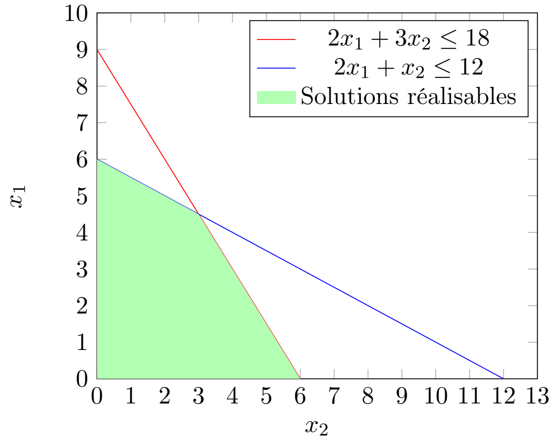

FIGURE 1 – Ensemble de solutions réalisables

2. **Représentez graphiquement la fonction objectif évaluée à un coût donnant lieu à plusieurs solutions.**

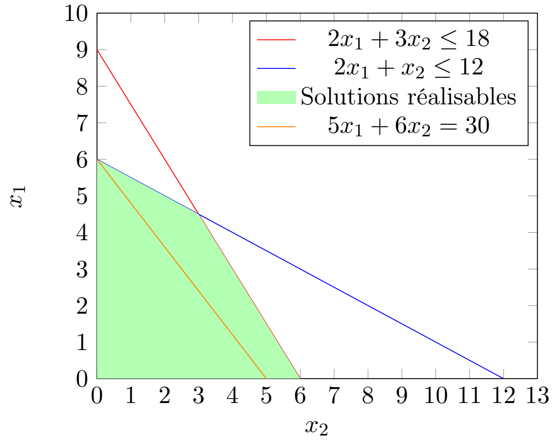

FIGURE 2 – Fonction objectif évaluée à un coût donnant lieu à plusieurs solutions

3. **Représentez graphiquement la fonction objectif évaluée à un coût ne donnant lieu à aucune solution.**

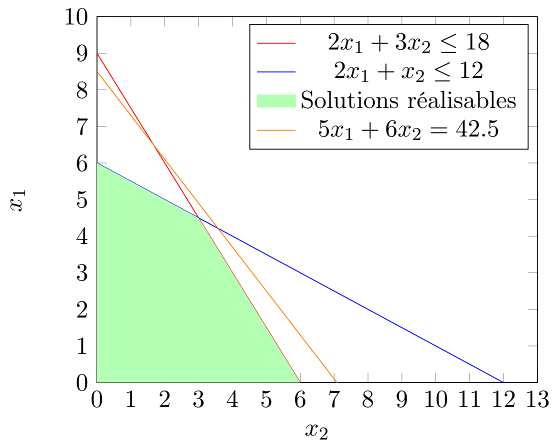

FIGURE 3 – Fonction objectif évaluée à un coût ne donnant lieu à aucune solution

4. **Représentez graphiquement la fonction objectif évaluée au coût optimal.**

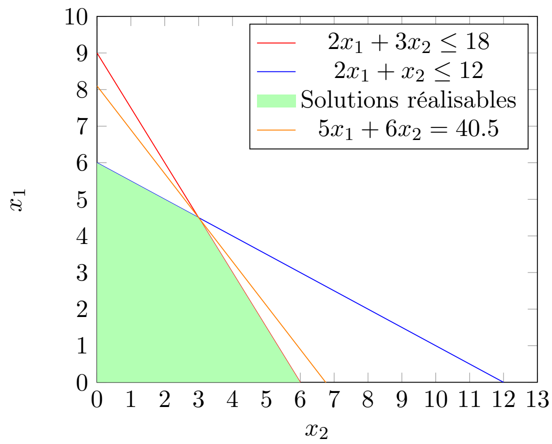

FIGURE 4 – Fonction objectif évaluée au coût optimal

5. **Quel est le coût optimal et quelles sont les valeurs des variables x_1 et x_2 donnant ce coût ?**

Le coût optimal est 40.5, avec $x_1 = 4.5$ et $x_2 = 3$.

Question 2 (2 pts)

1. **Donnez le dual de ce problème, en justifiant calculs et transformations. Présentez le dual avec des variables positives ou dans $\mathbb{R}$.**

   Le problème primal est un problème de minimisation, donc le problème dual est un problème de maximisation. On réécrit le problème en "retournant" la deuxième contrainte pour définir des variables duales positives ou dans $\mathbb{R}$. Le problème comporte trois contraintes, ce qui implique que nous avons trois variables duales : π_1, π_2, et π_3. Chaque contrainte du primal est liée à une variable du dual, comme montré :

$$\begin{aligned}
\underset{x}{\text{minimize}} \quad & 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_4 \geq 4 \qquad (\pi_1 \geq 0) \\
& -x_1 + 2x_3 - x_4 \geq -7 \quad (\pi_2 \geq 0) \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \qquad (\pi_3 \in \mathbb{R}) \\
& x_2, x_3, x_4 \geq 0, x_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Les deux premières contraintes sont de la forme "$\geq$", donc $\pi_1 \geq 0$ et $\pi_2 \geq 0$. La troisième contrainte est de la forme "$=$", donc $\pi_3 \in \mathbb{R}$. Le problème primal comporte quatre variables, donc le dual aura quatre contraintes. Comme $x_1 \in \mathbb{R}$, la contrainte associée est de la forme $=$. Comme $x_2, x_3, x_4 \geq 0$, les contraintes associées sont de la forme "$\leq$". Enfin, en transposant les matrices des coefficients des contraintes et de la fonction objectif ainsi que les membres de droite des contraintes, on obtient le problème dual :

$$\begin{aligned}
\underset{x}{\text{maximize}} \quad & 4\pi_1 - 7\pi_2 + 5\pi_3 \\
\text{subject to} \quad & 2\pi_1 - \pi_2 + \pi_3 = 3 \quad (x_1 \in \mathbb{R}) \\
& 3\pi_1 + 2\pi_3 \leq -4 \qquad (x_2 \geq 0) \\
& 2\pi_2 + \pi_3 \leq 2 \qquad (x_3 \geq 0) \\
& -\pi_1 - \pi_2 \leq -1 \qquad (x_4 \geq 0) \\
& \pi_1, \pi_2 \geq 0, \pi_3 \in \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

2. **Donnez le dual du dual.**

Le dual du dual est le primal initial. Ainsi, si nous avons formulé un problème primal, la résolution de son dual et ensuite du dual du dual nous ramène au problème primal d'origine. On obtient que le dual du dual est :

$$\begin{aligned}
\underset{x}{\text{minimize}} \quad & 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_4 \geq 4 \\
& -x_1 + 2x_3 - x_4 \geq -7 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\
& x_2, x_3, x_4 \geq 0, x_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Question 3 (2 pts)

1. **Reformulez ce problème afin qu'il soit linéaire.**

Pour linéariser le problème, on pose la variable $w = \min(7x_1 - 2x_2, 3x_1 + x_2)$ et on ajoute les deux contraintes suivantes au problème :

— $w \leq 7x_1 - 2x_2$

— $w \leq 3x_1 + x_2$

Le problème est donc équivalent à :

$$\begin{aligned}
\underset{x,w}{\text{maximize}} \quad & w \\
\text{subject to} \quad & w \leq 7x_1 - 2x_2 \\
& w \leq 3x_1 + x_2 \\
& 4x_1 + 3x_2 \leq 7 \\
& x_1, x_2 \geq 0, w \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Question 4 (14 pts)

1. **Modélisez ce problème sous la forme d'un programme linéaire. Formalisez mathématiquement les données, les variables de décisions, la fonction objectif ainsi que les contraintes. Combien de variables et de contraintes avez vous au total ?**

Données :
— $\mathcal{I} = \{\text{bétail}, \text{poulets}, \text{porcs}\}$: ensemble des types d'aliments ;
— $\mathcal{J} = \{\text{maïs}, \text{avoine}, \text{soja}, \text{farine}, \text{blé}\}$: ensemble des matières premières ;
— $\mathcal{K} = \{\text{vitamine}, \text{protéine}, \text{calcium}, \text{graisse}\}$: ensemble des nutriments ;
— d_i : demande pour le type d'aliment $i \in \mathcal{I}$ par jour ;
— s_j : quantité en kilogrammes de matière première $j \in \mathcal{J}$ disponible par jour ;
— a_{jk} : quantité de nutriment $k \in \mathcal{K}$ contenue dans un kilogramme de matière première $j \in \mathcal{J}$;
— b_{ik} : quantité minimale de nutriment $k \in \mathcal{K}$ requise dans un kilogramme d'aliment $i \in \mathcal{I}$;
— c_j : coût par kilogramme de la matière première $j \in \mathcal{J}$.

Variables :
— $x_{ij} \geq 0$: quantité de matière première $j \in \mathcal{J}$ utilisée dans la production de l'aliment $i \in \mathcal{I}$ par jour.

Contraintes :
— Respecter la demande des aliments par jour :

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} x_{ij} = d_i \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

.

— Respecter les valeurs minimales de nutriments pour chaque aliment :

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} a_{jk} x_{ij} \geq b_{ik} \cdot d_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, k \in \mathcal{K}$$

.

— Respecter la disponibilité des matières premières par jour :

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} x_{ij} \leq s_j \quad \forall j \in \mathcal{J}$$

.

Fonction objectif :
— Minimiser le coût total :

$$\min \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}} c_j x_{ij}$$

.

On a 15 variables et 20 contraintes (sans compter les contraintes de nonnegativité).

2. **Modélisez et résolvez ce problème à l'aide de MiniZinc. Indiquez la quantité optimale de chaque matière première utilisée dans la production de chaque type d'aliment par jour, ainsi que le coût optimal dans le rapport. Utilisez le fichier "devoir1_question4.dzn" fourni.**

   Regardez le fichier devoir1_question4_sol.mnz pour le modèle MiniZinc.

   — Le coût optimal est de 17,65 CAD, et la composition des aliments est montrée dans le tableau suivant.

Quantité (kg)	Maïs	Avoine	Soja	Farine	Blé
Bétail	10.00	15.00	8.33	11.67	5.00
Poulets	0.00	0.00	6.67	13.33	0.00
Porcs	0.00	25.00	5.00	0.00	0.00

Table 1 – Quantité optimale en kilogrammes de matière première utilisée pour composer chaque type d'aliment produit par jour.

3. **Indiquez (et justifiez) quatre exemples de contraintes liées dans votre solution.**

   Les contraintes pour respecter la demande quotidienne d'aliments pour le bétail, les poulets et les porcs sont trois exemples de contraintes liées.

   De plus, les contraintes pour respecter la quantité disponible d'avoine, de soja et de farine par jour sont trois autres exemples de contraintes liées.

4. **Le marché offre finalement 5 kilogrammes d'avoine en plus par jour. Comment est affectée la solution optimale ? Expliquez comment une analyse de sensibilité pourrait permettre de déduire ce résultat (la notion de coût marginal est attendue).**

   Le coût optimal diminue et passe à 16.75 CAD. La contrainte de disponibilité d'avoine est liée et le coût marginal est de -0,18. Lorsque l'offre augmente de 5 kilogrammes, cette contrainte reste liée et alors il y a une réduction de $0.18 \times 5 = 0.9$ dans le coût optimal.