Devoir 1: Résolution de programmes linéaires

Remise avant le 20 septembre à 23h59 sur Moodle.

Consignes

- Les devoirs doivent être réalisés seul ou par binôme (de préférence par binôme).
- Soumettez un document (format pdf) reprenant votre devoir, ainsi que votre modèle MiniZinc (fichier .mzn).
- Indiquez vos noms et matricules dans le titre des fichiers soumis.
- Veillez à rendre un rapport **structuré**, **clair** et **concis**. Les lacunes de forme seront pénalisées.
- L'utilisation d'une IA générative est **STRICTEMENT INTERDITE**.

Question 1 (2 pts)

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \underset{x}{\text{maximize}} \quad & 5x_1 + 6x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Représentez graphiquement l'espace des solutions faisables.
2. Représentez graphiquement la fonction objectif évaluée à un coût donnant lieu à plusieurs solutions.
3. Représentez graphiquement la fonction objectif évaluée à un coût ne donnant lieu à aucune solution.
4. Représentez graphiquement la fonction objectif évaluée au coût optimal.
5. Quel est le coût optimal et quelles sont les valeurs des variables x_1 et x_2 donnant ce coût ?

Question 2 (2 pts)

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \underset{x}{\text{minimize}} \quad & 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_4 \geq 4 \\ & x_1 - 2x_3 + x_4 \leq 7 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ & x_2, x_3, x_4 \geq 0, x_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Donnez le dual de ce problème, en justifiant calculs et transformations. Présentez le dual avec des variables positives ou dans $\mathbb{R}$.
2. Donnez le dual du dual.

Question 3 (2 pts)

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \underset{x}{\text{maximize}} \quad & \min(7x_1 - 2x_2, 3x_1 + x_2) \\ \text{subject to} \quad & 4x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Reformulez ce problème afin qu'il soit linéaire.

Question 4 (14 pts)

Une entreprise produit trois types d'aliments pour animaux : pour le bétail, les poulets et les porcs. Pour fabriquer ces aliments, elle utilise cinq matières premières : maïs, avoine, soja, farine de poisson, et blé. Chaque aliment doit contenir une quantité minimale de certains nutriments **par kilogramme** (vitamines, protéines, calcium et graisses) pour garantir la santé des animaux, et chaque matière première apporte une quantité spécifique de ces nutriments **par kilogramme**. Le coût de chaque matière première **par kilogramme** est également connu. Les quantités de chaque nutriment en unités standard par kilogramme de matière première ainsi que le coût de chaque matière première par kilogramme sont indiqués dans le Tableau 1. Le Tableau 2 précise les quantités minimales requises de chaque nutriment en unités standard par kilogramme pour chaque type d'aliment (bétail, poulets, porcs). De plus, le marché offre une quantité maximale par jour de chaque matière première : 10 kg de maïs, 40 kg d'avoine, 20 kg de soja, 25 kg de farine de poisson, et 20 kg de blé. L'entreprise doit produire **exactement** 50 kg d'aliment pour le bétail, 20 kg pour les poulets, et 30 kg pour les porcs chaque jour pour répondre à la demande. L'objectif de l'entreprise est de déterminer la quantité optimale de chaque matière première à utiliser pour la production de chaque type d'aliment par jour afin de minimiser le coût total de production par jour tout en respectant les contraintes mentionnées.

(Unité/kg)	Vitamine	Protéine	Calcium	Graisse	Coût (CAD/kg)
Maïs	8	10	6	8	0.26
Avoine	6	5	10	6	0.12
Soja	10	12	6	6	0.25
Farine	4	8	6	9	0.15
Blé	6	8	4	10	0.30

TABLE 1 – Unité standard de nutriment par kilogramme de matière première et coût par kilogramme de matière première

(Unité/kg)	Vitamine	Protéine	Calcium	Graisse
Bétail	6	8	7	4
Poulets	6	8	6	5
Porcs	4	6	8	2

TABLE 2 – Valeurs minimales requises de chaque nutriment en unité par kilogramme par type d'aliment

1. Modélisez ce problème sous la forme d'un **programme linéaire**. Formalisez mathématiquement les données, les variables de décisions, la fonction objectif ainsi que les contraintes. Combien de variables et de contraintes avez vous au total ? (4pts)

2. Modélisez et résolvez ce problème à l'aide de MiniZinc. Indiquez la quantité optimale de chaque matière première utilisée dans la production de chaque type d'aliment par jour, ainsi que le coût optimal dans le rapport. Utilisez le fichier “devoir1_question4.dzn” fourni. (6pts)
3. Indiquez (et justifiez) **quatre** exemples de contraintes liées dans votre solution. (2pts)
4. Le marché offre finalement 5 kilogrammes d'avoine en plus par jour. Comment est affectée la solution optimale ? Expliquez comment une analyse de sensibilité pourrait permettre de déduire ce résultat (la notion de coût marginal est attendue). (2pts)