Chapitre 1 : Fonctions vectorielles

D'aprés les documents de cours de Jean Guérin

MTH 1102

Polytechnique Montréal

27 août 2024

Sommaire

Dans le livre : Sections 8.1, 8.2, 8.3

1. Courbes paramétrées
2. Dérivées et Intégrales de fonctions vectorielles
   - Dérivées des fonctions vectorielles
   - Repère de Serret-Frenet
3. Longueur d'arc et courbure
   - Longueur d'arc
   - Abcisse curviligne
   - Courbure

Courbes paramétrées

Définition

Une **courbe paramétrée dans le plan** est définie par une fonction vectorielle $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ qui associe à chaque valeur du paramètre t un point $\vec{r}(t)$ du plan.

- On décrit habituellement une courbe paramétrée en donnant les coordonnées x et y de ses points en fonction de t :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

Courbes paramétrées

Définition

Une **courbe paramétrée dans le plan** est définie par une fonction vectorielle $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ qui associe à chaque valeur du paramètre t un point $\vec{r}(t)$ du plan.

- On décrit habituellement une courbe paramétrée en donnant les coordonnées x et y de ses points en fonction de t :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

- Le vecteur $\vec{r}(t)$ est appelé **vecteur position**.

Courbes paramétrées

Définition

Une **courbe paramétrée dans le plan** est définie par une fonction vectorielle $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ qui associe à chaque valeur du paramètre t un point $\vec{r}(t)$ du plan.

- On décrit habituellement une courbe paramétrée en donnant les coordonnées x et y de ses points en fonction de t :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

- Le vecteur $\vec{r}(t)$ est appelé **vecteur position**.
- On peut aussi décrire une courbe paramétrique par ses **équations paramétriques** :

$$\begin{cases} x(t) & = & f(t) \\ y(t) & = & g(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b.$$

Courbes paramétrées (2)

Définition

Une **courbe paramétrée dans l'espace** est définie par une fonction vectorielle $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ qui associe à chaque valeur du paramètre t un point $\vec{r}(t)$ de l'espace.

Une telle courbe est décrite par

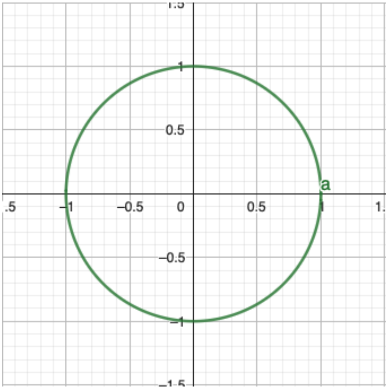
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

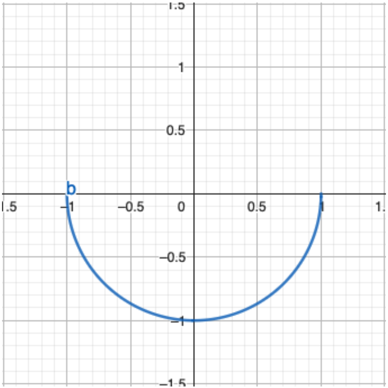
ou par ses équations paramétriques

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & f(t) \\ y(t) & = & g(t) \\ z(t) & = & h(t) \end{array} \right. , \quad a \leq t \leq b.$$

Exemple 1 : Le cercle :

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j}$$

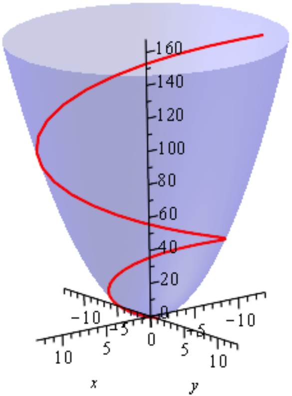




Exemple 2 : Le tire-bouchon

$$\vec{r}(t) = [\sin(t) - t\cos(t)]\,\vec{i} + [\cos(t) + t\sin(t)]\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$$

est situé sur le paraboloïde $z = x^2 + y^2 - 1$.



Exemple 3 : Une courbe, plusieurs paramétrisations

$$\vec{r}_1(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k},\ \ 3 \leq t \leq 9$$

$$\vec{r}_2(u) = e^u\,\vec{i} + e^{2u}\,\vec{j} + e^{3u}\,\vec{k},\ \ \ln(3) \leq u \leq 3\ln(3)$$

$$\vec{r}_3(v) = (3-v)\,\vec{i} + (3-v)^2\,\vec{j} + (3-v)^3\,\vec{k},\ \ 0 \leq v \leq 6$$

Sommaire

1. Courbes paramétrées

2. Dérivées et Intégrales de fonctions vectorielles
   - Dérivées des fonctions vectorielles
   - Repère de Serret-Frenet

3. Longueur d'arc et courbure
   - Longueur d'arc
   - Abcisse curviligne
   - Courbure

Dérivées des fonctions vectorielles

Définition

La **dérivée** de la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ en $t_0 \in]a, b[$ est

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

si cette limite existe.

Dérivées des fonctions vectorielles

Définition

La **dérivée** de la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ en $t_0 \in]a, b[$ est

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

si cette limite existe.

Théorème

On a

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

Preuve

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\Big)$$

Preuve

$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\Big) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} - x(t)\vec{i} - y(t)\vec{j}\Big)
\end{aligned}
$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\Big) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} - x(t)\vec{i} - y(t)\vec{j}\Big) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(x(t+\Delta t)\vec{i} - x(t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} - y(t)\vec{j}\Big)
\end{aligned}$$

Preuve

$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\Big) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} - x(t)\vec{i} - y(t)\vec{j}\Big) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(x(t+\Delta t)\vec{i} - x(t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} - y(t)\vec{j}\Big) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\vec{j}
\end{aligned}
$$

Preuve

$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\Big) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} - x(t)\vec{i} - y(t)\vec{j}\Big) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(x(t+\Delta t)\vec{i} - x(t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} - y(t)\vec{j}\Big) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\vec{j} \\
&= x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}
\end{aligned}
$$

Dérivées des fonctions vectorielles (2)

Théorème : formules de dérivation

Si $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont des fonctions vectorielles dont les dérivées existent alors

1. $[c\vec{u}(t)]' = c\vec{u}'(t)$, où c est une constante.

Dérivées des fonctions vectorielles (2)

Théorème : formules de dérivation

Si $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont des fonctions vectorielles dont les dérivées existent alors

1. $[c\vec{u}(t)]' = c\vec{u}'(t)$, où c est une constante.
2. $[\vec{u}(t) \pm \vec{v}(t)]' = \vec{u}'(t) \pm \vec{v}'(t)$

Dérivées des fonctions vectorielles (2)

Théorème : formules de dérivation

Si $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont des fonctions vectorielles dont les dérivées existent alors

1. $[c\vec{u}(t)]' = c\vec{u}\,'(t)$, où c est une constante.
2. $[\vec{u}(t) \pm \vec{v}(t)]' = \vec{u}\,'(t) \pm \vec{v}\,'(t)$
3. $[f(t)\vec{u}(t)]' = f'(t)\vec{u}(t) + f(t)\vec{u}\,'(t)$, où f est une fonction dérivable.
4. $[\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)]' = \vec{u}\,'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}\,'(t)$.
5. $[\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)]' = \vec{u}\,'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}\,'(t)$.

Utilisation des régles de dérivation

Exemple 4 : Montrons que si $\|\vec{r}(t)\| = c$ alors $\vec{r}\,'(t)$ est orthogonal à $\vec{r}(t)$.

Vecteur tangent et vecteur normal

Définition

Le **vecteur tangent unitaire** de la courbe C paramétrée par $\vec{r}(t)$ est

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{||\,\vec{r}'(t)\,||}$$

si $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$.

Définition

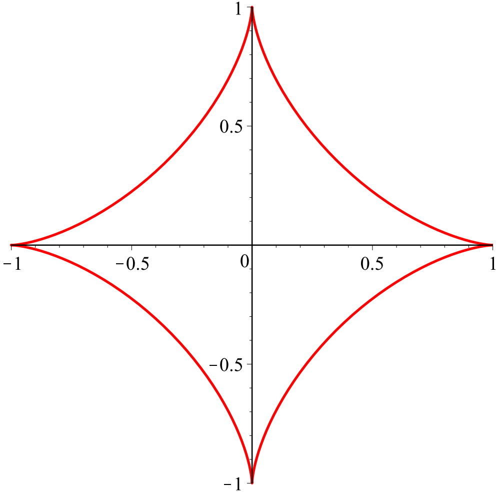
Une courbe paramétrée $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$ est

- **lisse** si les fonctions $x(t), y(t)$ et $z(t)$ possèdent une dérivée continue et si $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ sur $[a, b]$.
- **lisse par morceaux (LPM)** si elle est composée d'un nombre fini de morceaux lisses.

Exemple 5 : L'astroïde

$$\vec{r}(t) = \cos^3(t)\vec{i} + \sin^3(t)\vec{j}$$

est lisse par morceaux.



Vecteur tangent et vecteur normal (2)

Définition

Soit C une courbe paramétrée par $\vec{r}(t)$. Le **vecteur normal unitaire** de C est le vecteur

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{||\,\vec{T}'(t)\,||}.$$

Remarque :
Les définitions et théorème ci-dessus sont aussi valable pour les courbes planes, en posant $z(t) = 0\ \forall t$.

Vecteur binormal

Définition

Soit C une courbe paramétrée par $\vec{r}(t)$. Le **vecteur binormal** de C est le vecteur

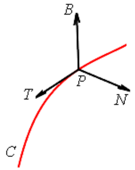
$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t).$$

Repère de Serret-Frenet

Étant donné une courbe paramétrée C, le triplet $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ forme une base othonormale orientée positivement de l'espace en chaque point de la courbe C.

Cette base est appelée le **repère de Serret-Frenet** associé à la courbe.

Ce repère est « mobile » au sens où il varie de point en point le long de la trajectoire définie par C.



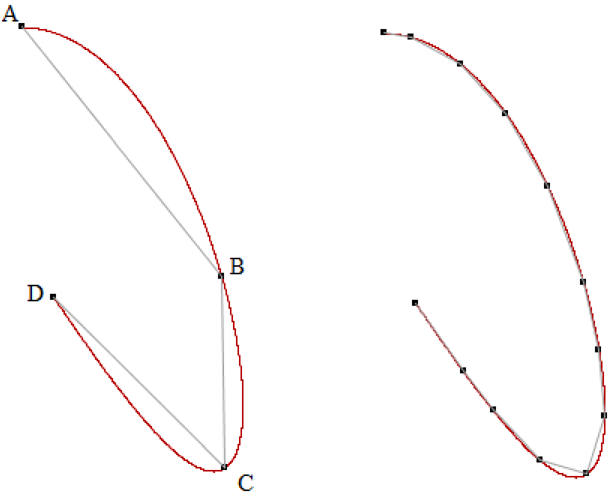
Sommaire

1. Courbes paramétrées

2. Dérivées et Intégrales de fonctions vectorielles
   - Dérivées des fonctions vectorielles
   - Repère de Serret-Frenet

3. Longueur d'arc et courbure
   - Longueur d'arc
   - Abcisse curviligne
   - Courbure

Intuition



Approximation de la longueur d'une courbe

quatre points

treize points

Longueur d'une courbe paramétrée

Définition

La **longueur** de la courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ est

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b ||\,\vec{r}\,'(t)\,||\,dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt. \end{aligned}$$

Exemple 6 : Calculer la circonférence du cercle de rayon a centré en l'origine.

Exemple 7 : Longueur de l'arc de l'hélice paramétrée par

$$\vec{r}(t) = cos(t)\vec{i} + sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$$

du point $(1, 0, 0)$ au point $(1, 0, 2\pi)$.

Abscisse curviligne

Définition

L'**abscisse curviligne** d'une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ est

$$s(t) = \int_a^t || \vec{r}'(u) || \, du.$$

L'abscisse curviligne $s(t)$ est donc la longueur de la courbe entre les points $\vec{r}(a)$ et $\vec{r}(t)$.

Abscisse curviligne

Définition

L'**abscisse curviligne** d'une courbe paramétrée par
$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ est

$$s(t) = \int_a^t ||\, \vec{r}\,'(u)\, ||\, du.$$

L'abscisse curviligne $s(t)$ est donc la longueur de la courbe entre les points $\vec{r}(a)$ et $\vec{r}(t)$.

Notation

On écrit souvent $ds = ||\, \vec{r}\,'(t)\, ||\, dt$ et $L = \int_C ds$.

Abscisse curviligne

Définition

L'**abscisse curviligne** d'une courbe paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ avec $a \leq t \leq b$ est

$$s(t) = \int_a^t ||\,\vec{r}\,'(u)\,||\,du.$$

L'abscisse curviligne $s(t)$ est donc la longueur de la courbe entre les points $\vec{r}(a)$ et $\vec{r}(t)$.

Notation

On écrit souvent $ds = ||\,\vec{r}\,'(t)\,||\,dt$ et $L = \displaystyle\int_C ds$.

ds est un « petit élément de longueur ».

Courbure

Définition

La **courbure** d'une courbe en un point peut s'exprimer comme

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}\,'(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

Théorème

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3}$$

Remarque : Ces formules dépendent de la paramétrisation choisie. En utilisant le paramètre s (l'abcisse curviligne), on peut exprimer la courbure indépendament. (*cf*. Chapitre 8.3 du livre)