

Section 1: Rappel de résistance des matériaux I (MEC1420)

Série d'exercices

Section 1.1: Rappel de Statique - problème 1

La figure 1 illustre en isométrie une structure ABCD et son chargement ; les connections en B et C sont rigides. Le chargement est le suivant:

$$F_{Cx} = 3 \text{ kN (sens montré)}$$
$$F_{Cy} = 2,5 \text{ kN (sens montré)}$$
$$F_{Dx} = 1,5 \text{ kN (sens montré)}$$
$$M_{Dz} = 3 \text{ kN.m (sens montré)}$$

Déterminer les réactions au point A. Sur votre DCL, indiquez clairement la direction et le sens des réactions.

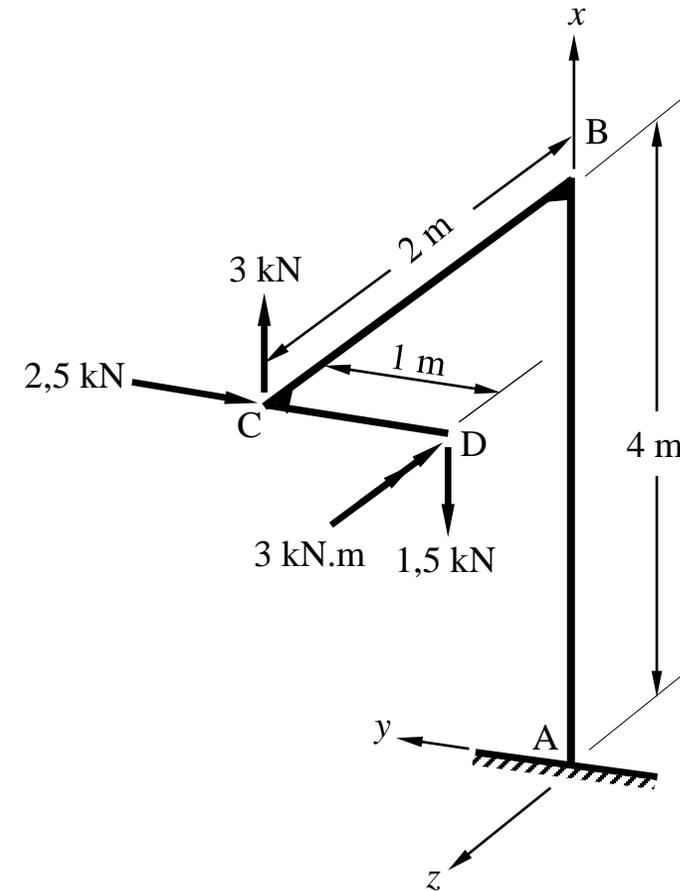
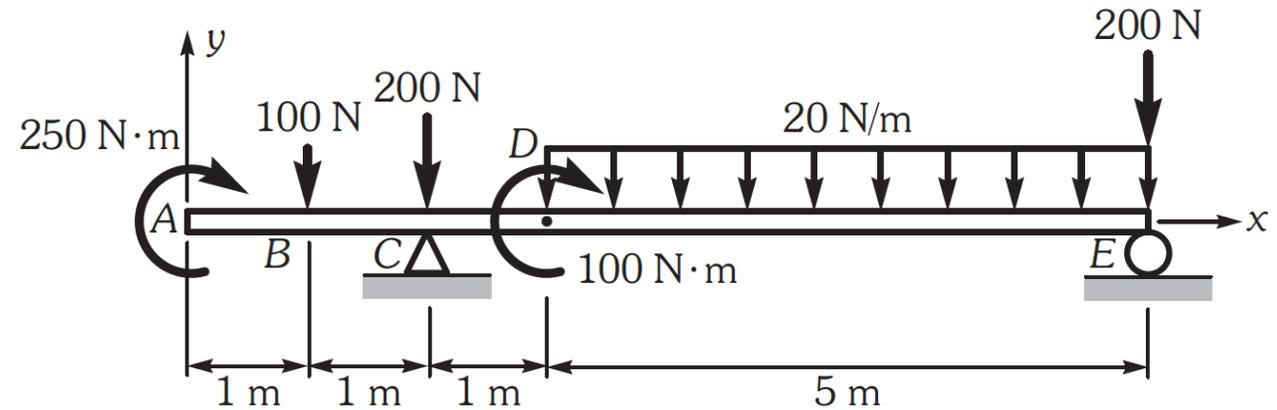


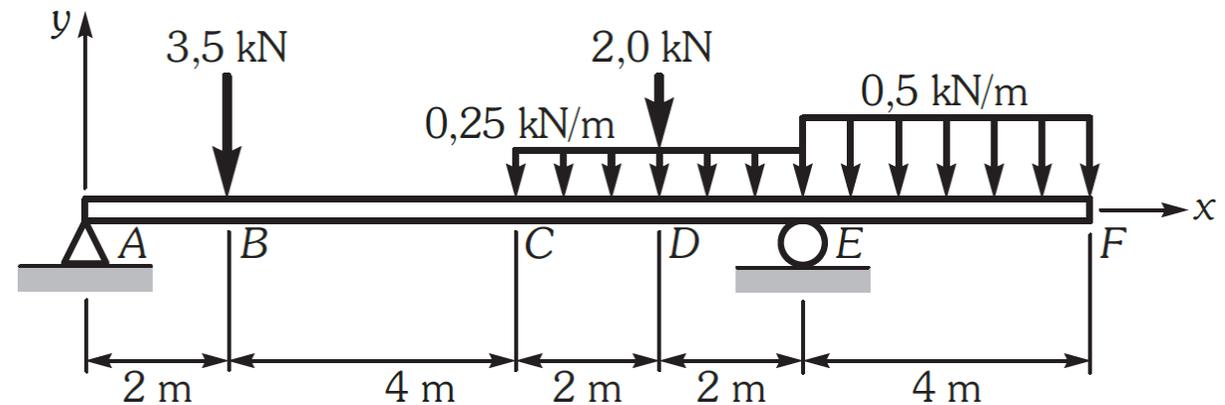
Figure 1: structure et chargement

Section 1.4: chargement de flexion – problème 2

Tracez les diagrammes de l'effort tranchant V_y et du moment fléchissant M_z , en y indiquant les valeurs importantes.



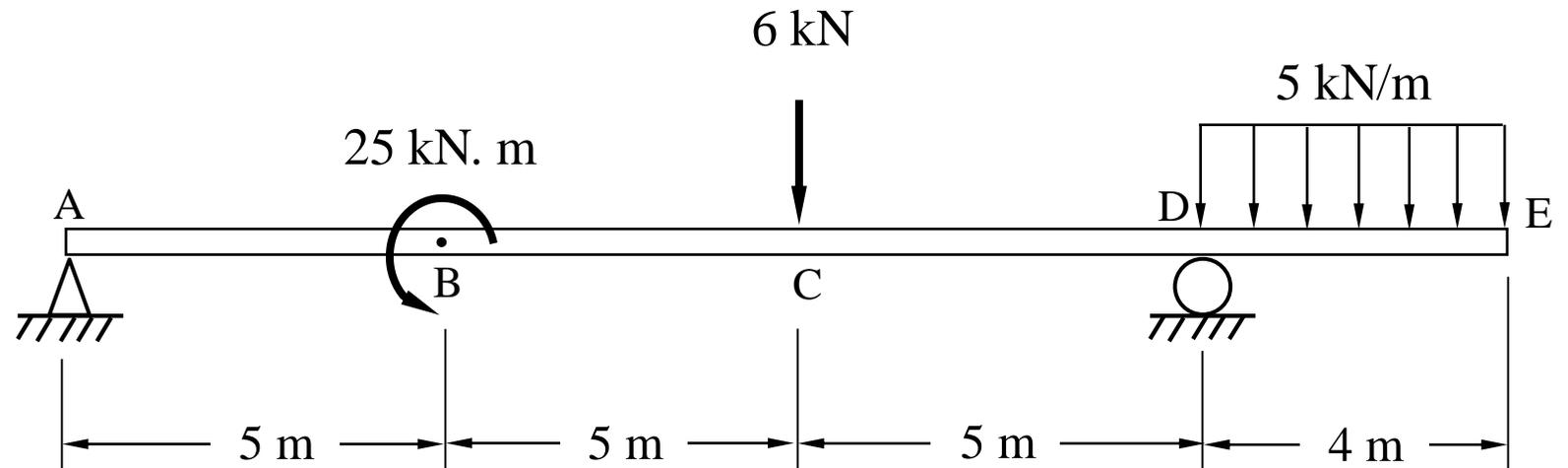
(a)



(b)

Section 1.4: chargement de flexion – problème 3

Tracez le diagramme de l'effort tranchant V_y ainsi que le diagramme du moment fléchissant M_z de la poutre AE illustrée ci-dessous en indiquant les valeurs importantes. La poutre AE est simplement supportée en A et D.



Section 1.6: section composée – problème 4

La figure 4 illustre la section d'une membrure d'acier soumise à un moment de torsion $T = 208 \text{ N.m}$. L'épaisseur du tube carré est uniforme et égale à 4 mm.

Déterminez la valeur de la contrainte de cisaillement maximale dans les parties ouvertes et dans la partie fermée de cette section.

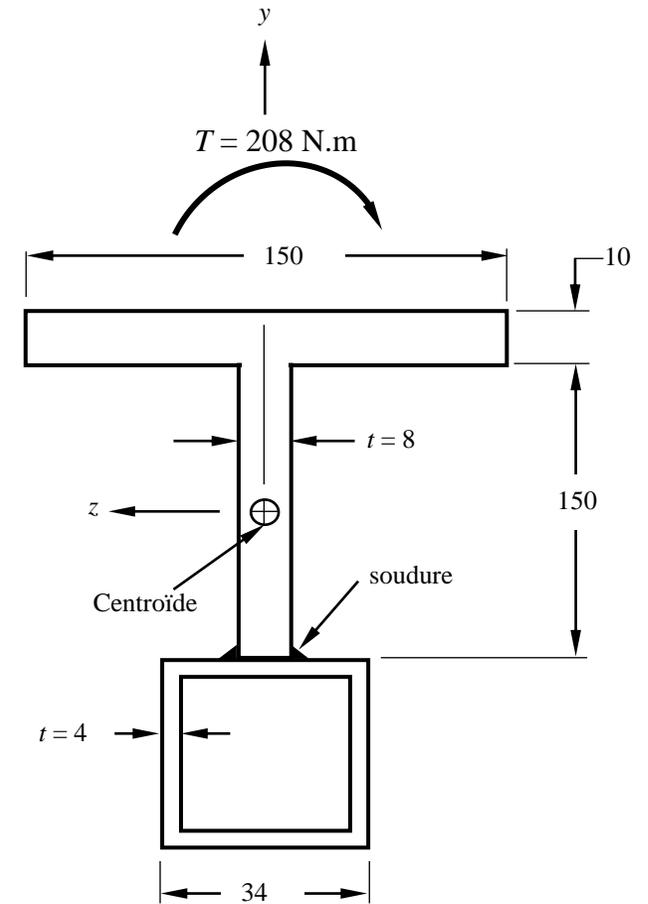


Figure 4: section de la membrure

Section 1.6: section composée – problème 5

La Figure 5a illustre en isométrie une structure AB, d'une longueur de 4 m, est encastrée à son extrémité A et chargée à son extrémité B par un moment de torsion

$$M_{Bx} = 200 \text{ N.m.}$$

La section de la membrure est composée de deux tubes en aluminium carrés ($20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$ d'épaisseur) collés aux extrémités A et B sur une plaque en plastique ($100 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ – voir la Figure 5b). Les propriétés des matériaux sont :

Aluminium : $E = 70\,000 \text{ MPa}$; $\nu = 0,34$ et $G = 26\,120 \text{ MPa}$

Plastique : $E = 3\,500 \text{ MPa}$; $\nu = 0,4$ et $G = 1\,250 \text{ MPa}$

Déterminez la valeur de la contrainte de cisaillement dans le tube et dans la plaque.

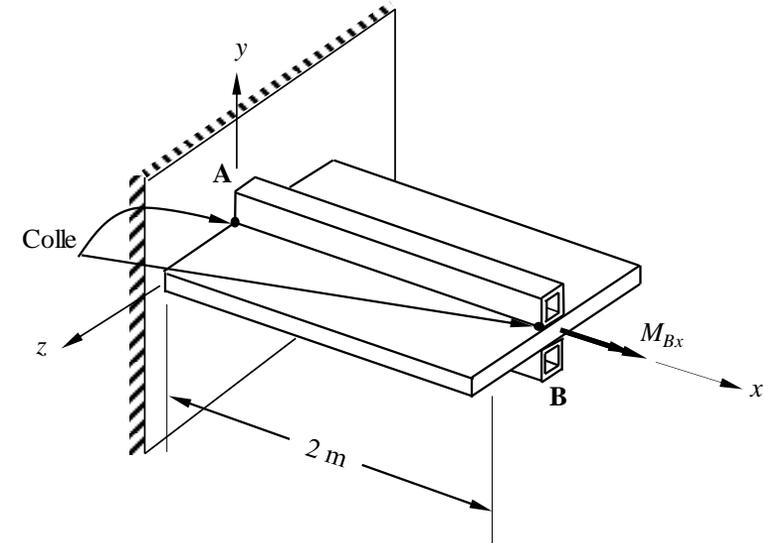


Figure 5a: membrure et chargement

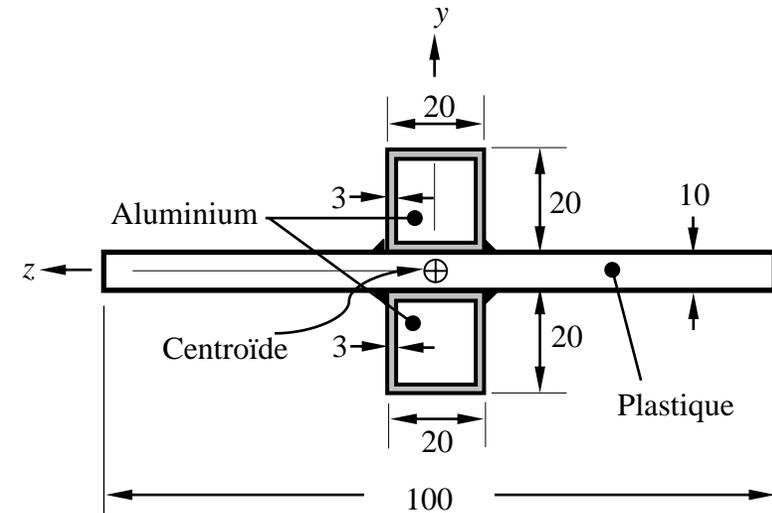


Figure 5b: section de la membrure AB

Section 1.7: chargements combinés – problème 6

La Figure 6a illustre en isométrie une poutre AB de longueur de 0,9 m. Cette structure de section rectangulaire (voir Figure 6b) est encastée à une extrémité A et libre à l'extrémité B. La charge externe consiste en une force $R = 20$ kN appliquée dans le plan yz , fait un angle de 30° par rapport à l'axe y (voir la Figure 6b) et une force $F = 76$ kN suivant l'axe x appliquées au point B.

a) Faites une analyse chargement par chargement et **calculez l'état des contraintes au point le plus critique** (le plus sollicité) de la poutre. (Négligez les contraintes de cisaillement associées à l'effort tranchant).

b) Identifiez clairement sur la Figure 6b où est situé le point le plus critique.

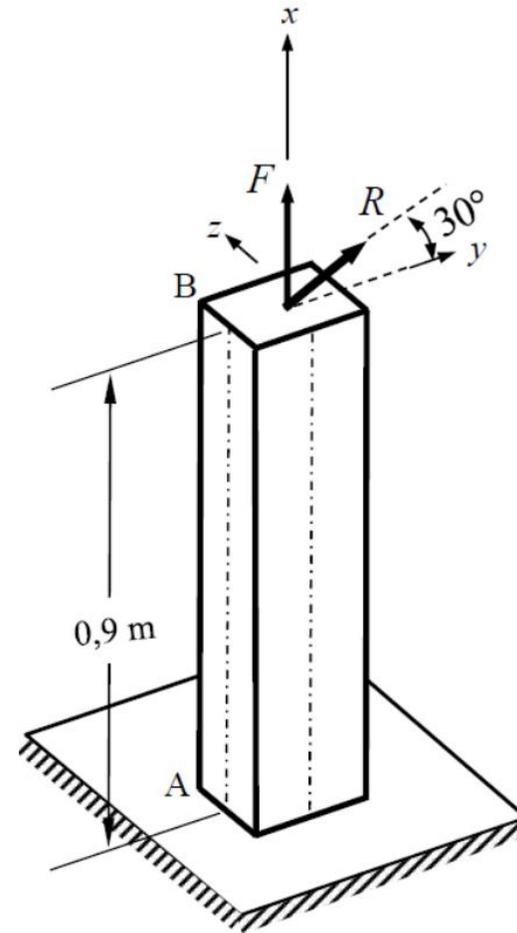


Figure 6a: Poutre et chargement

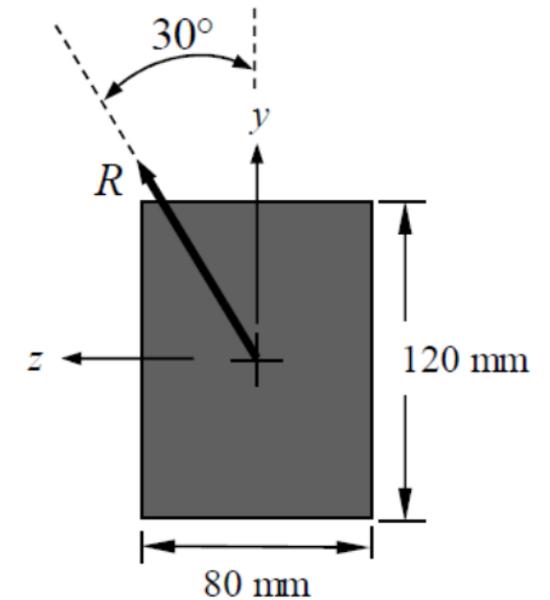


Figure 6b: section de la poutre

Section 1.7: chargements combinés – problème 7

La Figure 7a illustre en isométrie une poutre ABCD en forme de L. Cette structure de section rectangulaire (voir la Figure 7b) est encastrée à une extrémité A et libre à l'extrémité D. La charge externe consiste en:

- une force $F_{By} = 1 \text{ kN}$ suivant l'axe y appliquée au point B
- une force $F_{Cx} = 30 \text{ kN}$ suivant l'axe x appliquée au point C
- une force $F_{Dz} = 76 \text{ kN}$ suivant l'axe z appliquée au point D.

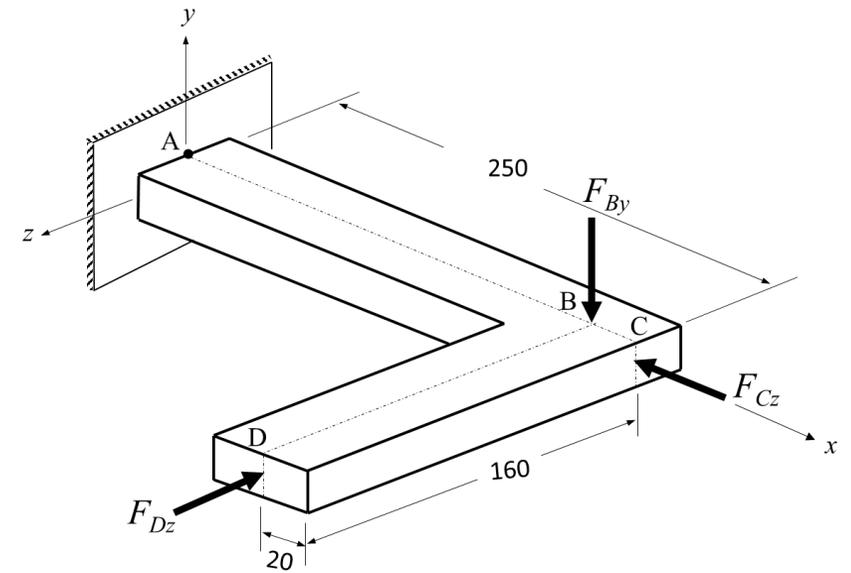


Figure 7a: Poutre et chargement

a) En négligeant les contraintes de cisaillement associées à l'effort tranchant, faites une analyse des chargements combinés et **calculez toutes les contraintes** présentement au point A.

b) Représentez sur le cube élémentaire l'état des contraintes au point A en spécifiant le sens de chaque contrainte.

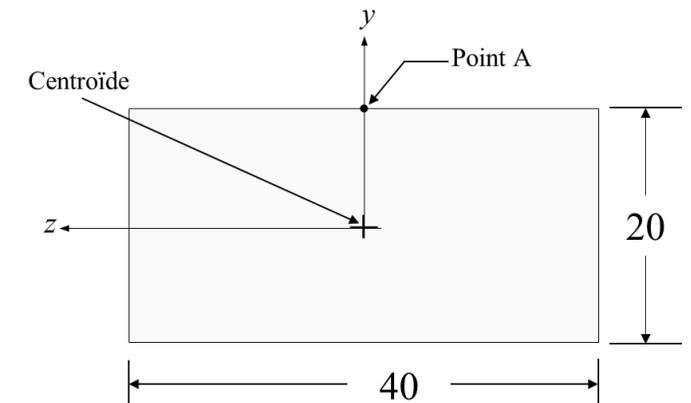


Figure 7b: section de la poutre

Section 1.7: chargements combinés – problème 8

La Figure 8a illustre en isométrie un cylindre fermé à paroi mince (rayon r de 50 mm ; épaisseur de la paroi t de 2,5 mm), est encastré à une extrémité et muni d'un bras rigide BC . Le cylindre (voir la Figure 8b) doit supporter une pression interne P de 1,4 MPa et transmettre une force excentrée F suivant la direction longitudinale. Son matériau possède une limite d'écoulement uniaxial $S_Y = 120$ MPa.

Déterminer la plus grande force F qu'on pourra appliquer au cylindre en considérant un facteur de sécurité de 3,4.

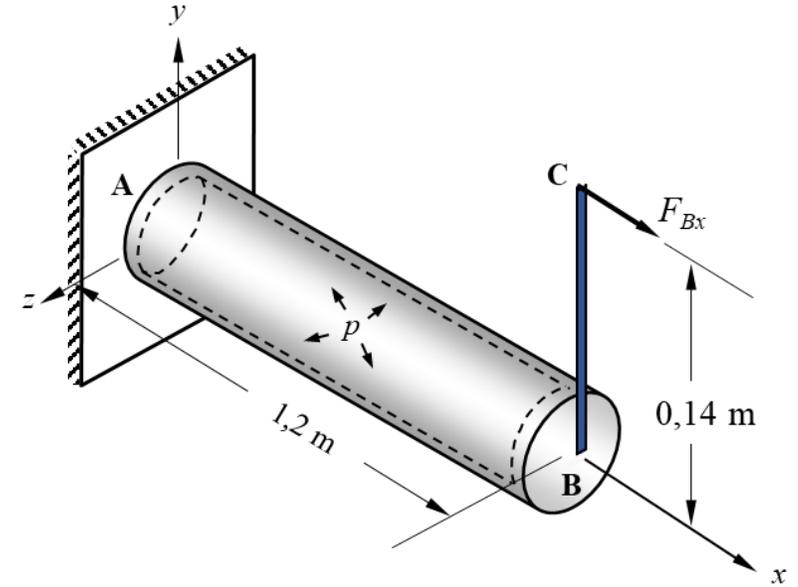


Figure 8a: Poutre et chargement

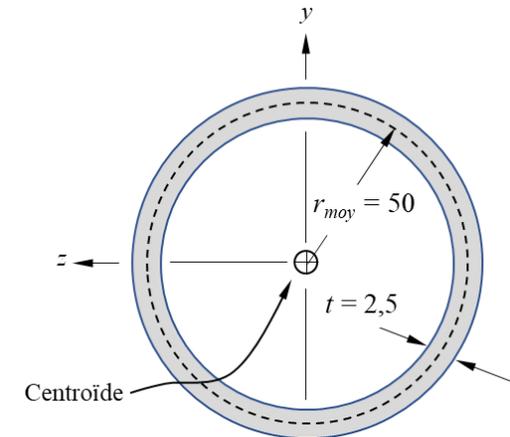


Figure 8b: section de la poutre

Section 1.7: chargements combinés – problème 9

La Figure 9a illustre en isométrie un élément de machine soumis à une force $P = 80 \text{ kN}$ dans le plan xy . La section de la poutre est de forme rectangulaire ($40 \text{ mm} \times 80 \text{ mm}$ – voir la Figure 9b).

Calculer les contraintes principales aux points C , D et K .

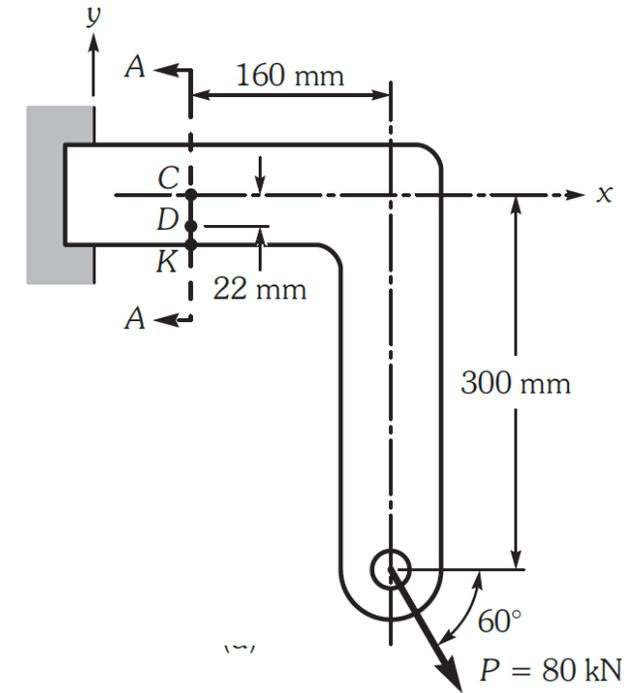


Figure 9a: poutre et chargement

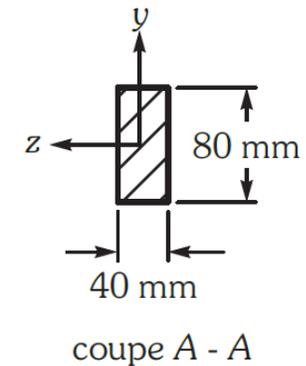


Figure 9b: section de la poutre

Section 1.7: chargements combinés – problème 10

La figure 10 illustre un tube fermé (rayon moyen $r = 60$ mm et épaisseur de la paroi $t = 5$ mm), encastré à une extrémité et muni d'un barreau rigide horizontal BC à l'autre extrémité. On soumet le tube à une pression interne P de 0,8 MPa et à une force verticale F de 1,8 kN.

Calculer les contraintes principales qui s'exercent dans les éléments situés aux points A_1 et A_2 .

Pour chaque cas, montrer les composantes par un schéma.

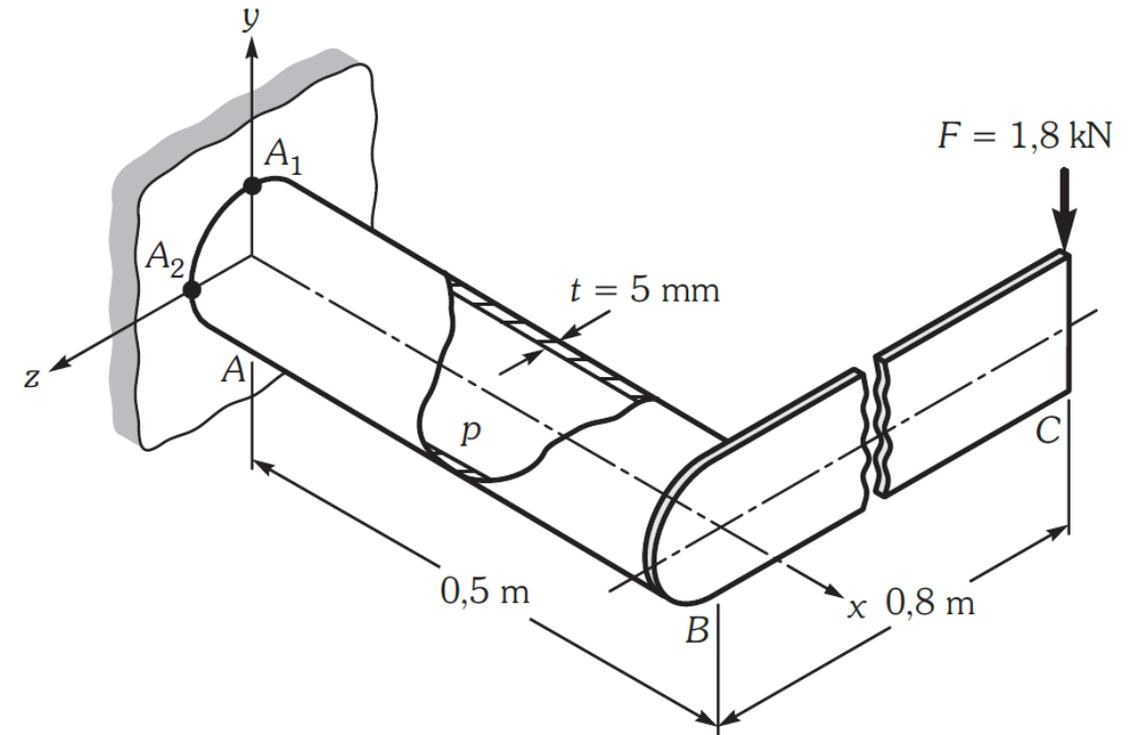


Figure 10: poutre et chargement

Section 1.7: chargements combinés – problème 11

La figure 11a illustre en isométrie un tube fermé AB, encastré à son extrémité A et muni, à son extrémité B d'un barreau rigide horizontal CD. La section du tube est illustrée sur la Figure 11b).

Le tube est soumis à une pression interne de 5 MPa; de plus, les forces suivantes sont appliquées sur le barreau rigide CD :

$$\text{Au point C : } F_{Cx} = 8 \text{ kN}$$

$$\text{Au point D : } F_{Dx} = 2 \text{ kN}$$

$$F_{Dy} = 10 \text{ kN}$$

Supposez que le cisaillement causé par les efforts tranchants est négligeable.

En considérant un facteur de sécurité de 2.5, vérifiez si cette structure possède une capacité suffisante. Le matériau est un acier ayant une limite d'écoulement $S_Y = 350 \text{ MPa}$.

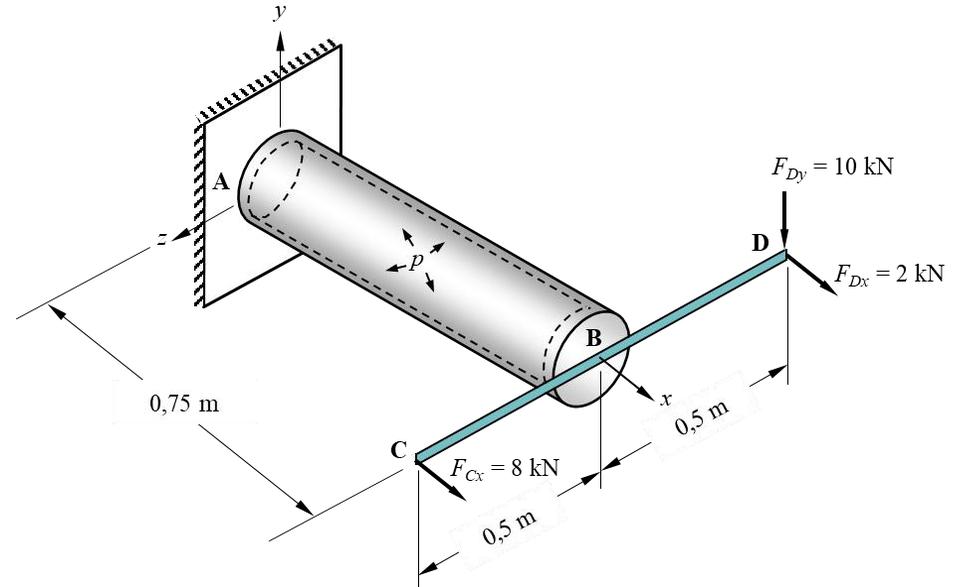


Figure 11a: poutre et chargement

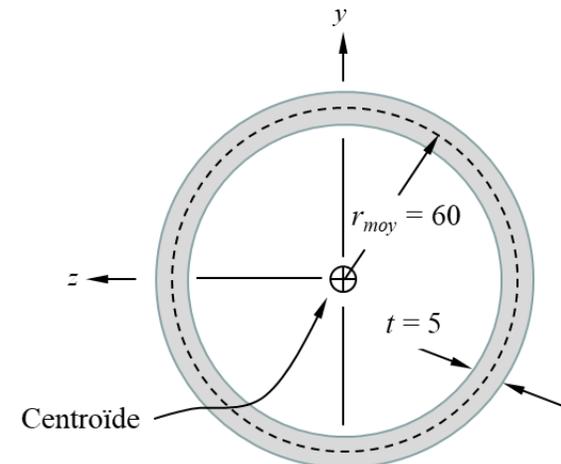


Figure 11b: section de la membrure AB

Section 1.7: chargements combinés – problème 12

La Figure 12a montre en isométrie un tube AB (rayon moyen = 60 mm; épaisseur = 5 mm) soumis à une pression interne $P = 10$ MPa et chargé par les forces F_{Cz} (direction z) et F_{Bx} (direction x). Les valeurs maximales des contraintes induites par les charges F_{Cz} et F_{Bx} ont été calculées à la section A et leurs valeurs absolues sont les suivantes :

Force axiale	$ \sigma_x = 30$ MPa
Moment fléchissant	$ \sigma_x = 80$ MPa
Effort tranchant	$ \tau_{x\theta} = 20$ MPa
Moment de torsion	$ \tau_{x\theta} = 40$ MPa

a) Sur les cubes élémentaires (voir la Figure 12c), représentez l'état de contraintes aux points A_1 et A_2 en illustrant séparant chaque composante de contrainte sur les faces positives seulement; indiquez clairement la valeur et le sens des contraintes;

b) Déterminez le facteur de sécurité au point A_2 si $S_y = 400$ MPa.

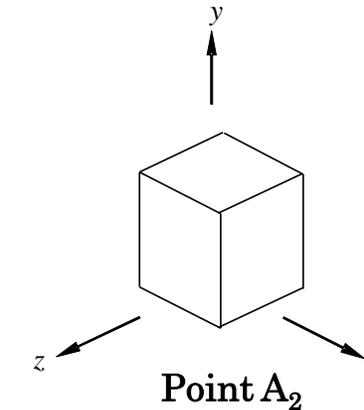
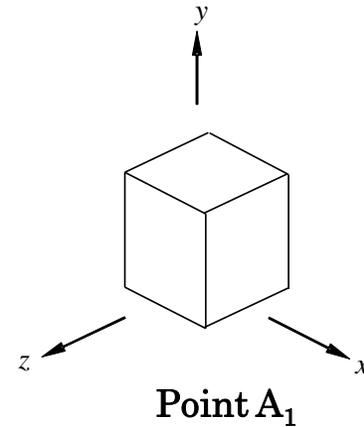


Figure 12c: cubes élémentaires des points A_1 et A_2

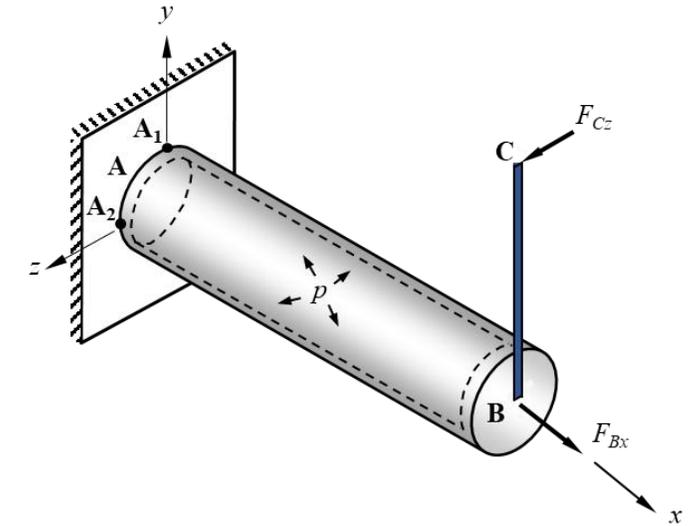


Figure 12a: poutre et chargement

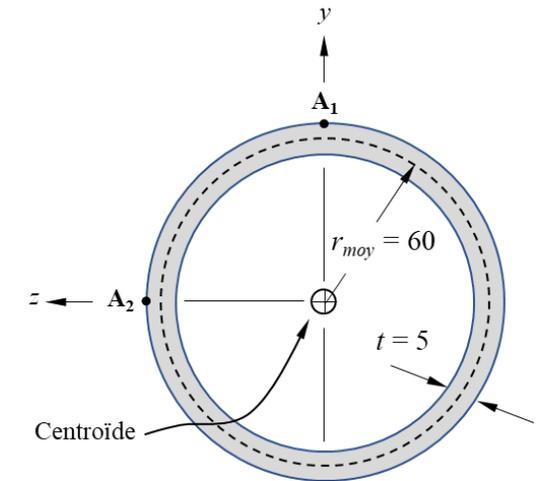


Figure 12b: poutre et chargement

Section 1.7: chargements combinés – problème 13

La figure 13a illustre en isométrie un système ABCD. Ce système est composé d'un tube rectangulaire AB encasté en A et chargé par l'intermédiaire des membrures rigides BC et CD; les joints en B et en C sont rigides. Le chargement est le suivant :

- Au point D: une force $F_{Dx} = 2 \text{ kN}$ (sens montré)
- Au point C : un moment $M_{Cx} = 4 \text{ kN.m}$ (sens montré)

Les propriétés du matériau (acier) sont :

$$E = 200\,000 \text{ MPa}; \nu = 0,3; G = 76\,923 \text{ MPa} \text{ et } S_y = 350 \text{ MPa}$$

La section du tube est montrée à la Figure 13b. Ses propriétés sont connues :

$$A = 1776 \text{ mm}^2; I_z = 2,274 \times 10^6 \text{ mm}^4; S_z = 45,48 \times 10^3 \text{ mm}^3;$$
$$I_y = 0,989 \times 10^6 \text{ mm}^4 \text{ et } S_y = 32,97 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Déterminez le facteur de sécurité de cette structure en vous référant à l'écoulement plastique.

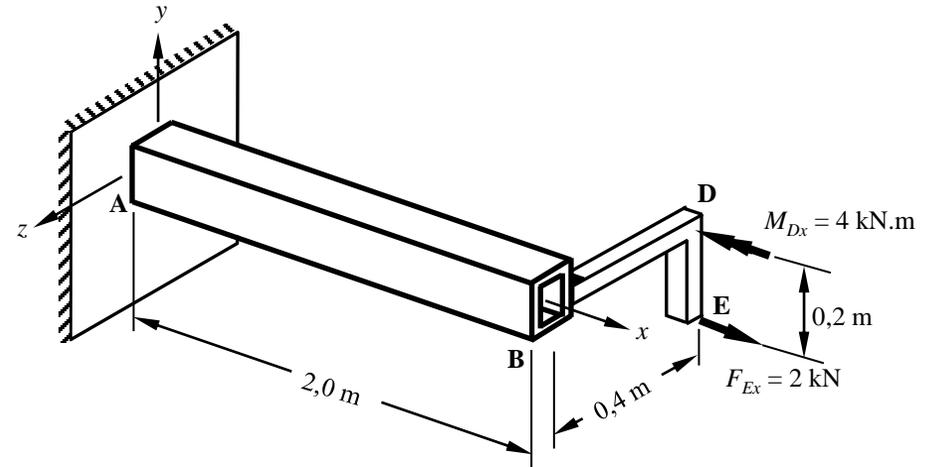


Figure 13a: système et chargement

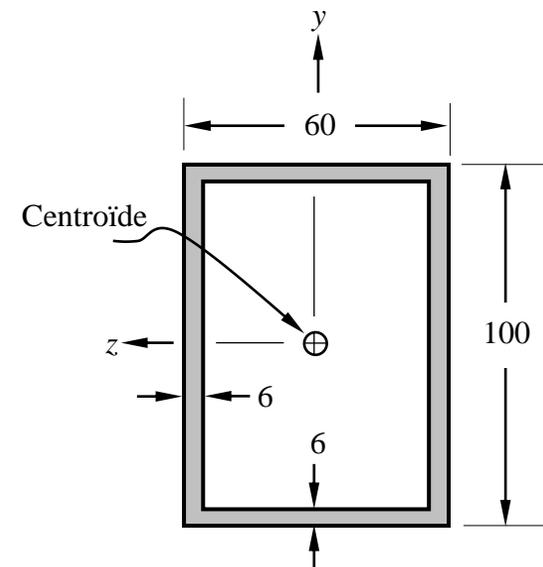


Figure 13b: section de la poutre

Section 1.7: chargements combinés – problème 14

La figure 14a illustre en isométrie un tube fermé AB (rayon moyen $r = 60$ mm; épaisseur $t = 5$ mm) est soumis à une pression interne $P = 5$ MPa; de plus, une force axiale $F_{Bx} = 10$ kN (direction x) et une force $F_{Cz} = 4$ kN (direction z) sont appliquées. La section du tube est illustrée sur la Figure 14b. Le matériau est un acier dont la limite d'écoulement $S_Y = 350$ MPa.

En vous basant sur le critère de Tresca, déterminez le facteur de sécurité de ce tube.

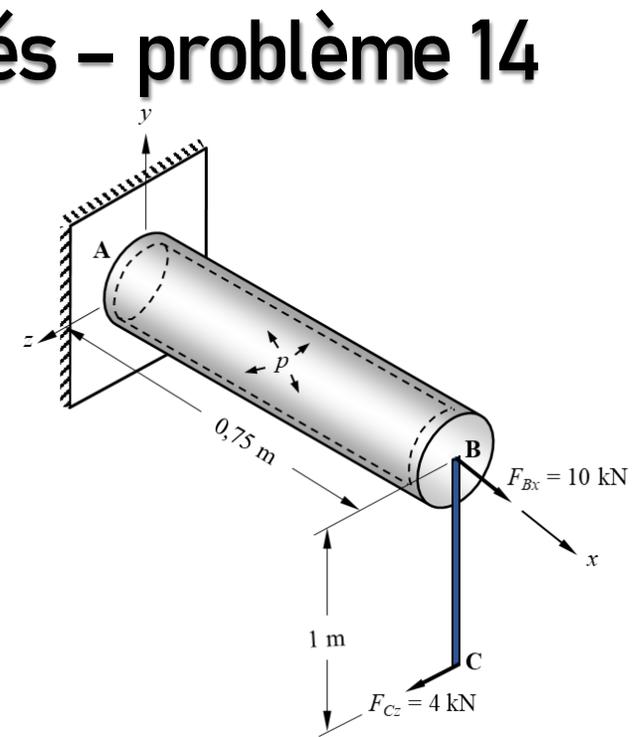


Figure 14a: poutre et chargement

Propriétés de la section:

$$\begin{aligned} A &= 1885 \text{ mm}^2 \\ J &= 6,786 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ I &= 3,393 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ S &= 54,3 \times 10^3 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

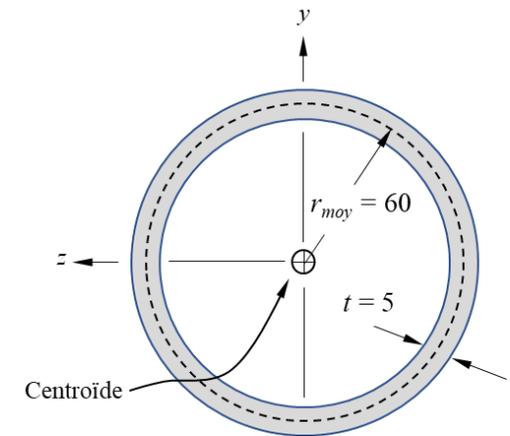


Figure 14b: section de la poutre

Section 1.7: chargements combinés – problème 15

La figure 15a illustre en isométrie une structure ABC soumise au chargement suivant au point C:

- Une force $F_{Cx} = 6$ kN suivant l'axe des x
- Une force $F_{Cz} = 3$ kN suivant l'axes des z

Cette structure est composée d'un tube rectangulaire AB et du bras de levier BC; la connexion en B est rigide. Les propriétés géométriques du tube sont données à la Figure 15b. Le matériau est un acier dont la limite d'écoulement $S_Y = 300$ MPa.

Déterminez le facteur de sécurité de cette structure à l'écoulement plastique.

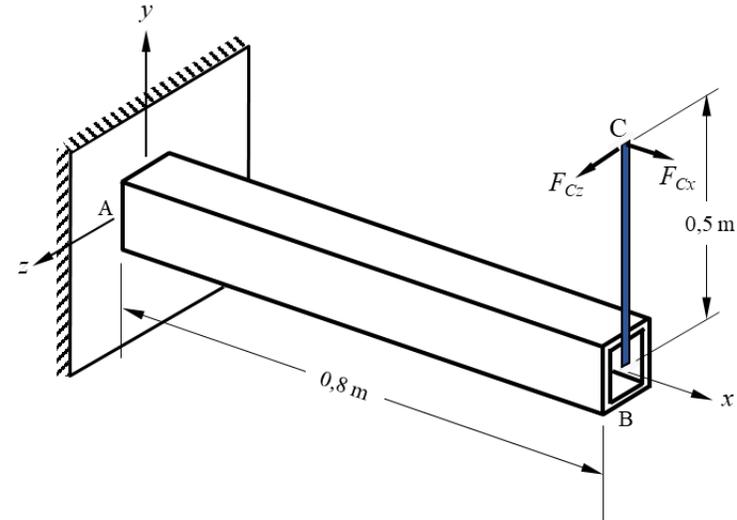


Figure 15a: poutre et chargement

Propriétés de la section:	
A	1776 mm^2
I_z	$2,274 \times 10^6 \text{ mm}^4$
S_z	$45,48 \times 10^3 \text{ mm}^3$
I_y	$0,989 \times 10^6 \text{ mm}^4$
S_y	$32,97 \times 10^3 \text{ mm}^3$

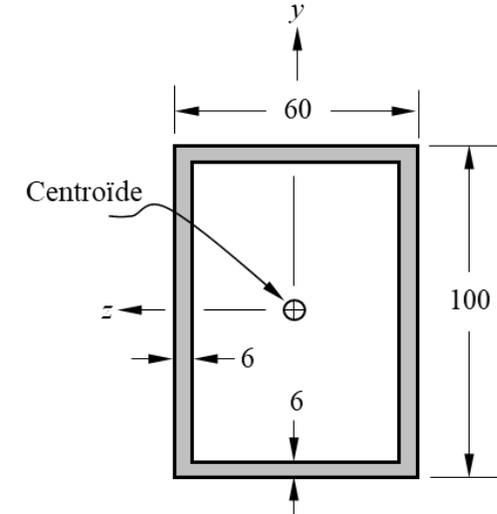


Figure 15b: section de la poutre

Section 1.7: chargements combinés – problème 16

La figure 16a illustre en isométrie un tube rectangulaire à paroi mince d'épaisseur constante $t = 4$ mm, encastré en A et soumis en B au chargement suivant :

- une force axiale $F_{Bx} = 11,04$ kN (sens montré)
- une force verticale $F_{By} =$ valeur inconnue et sens posé arbitrairement
- un moment $M_{By} =$ valeur inconnue et sens posé arbitrairement
- un moment $M_{Bx} =$ valeur inconnue et sens posé arbitrairement

L'état de contrainte induit par le chargement aux points A_1 et A_2 de la section A (voir la Figure 16b) est illustré sur les éléments infinitésimaux de la Figure 16c. Les propriétés de la section sont :

$$A = 736 \text{ mm}^2 ; I_z = 0,345 \times 10^6 \text{ mm}^4 ; S_z = 11,5 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$I_y = 0,178 \times 10^6 \text{ mm}^4 ; S_y = 8,9 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Déterminez la valeur et le sens de :

- Moments M_{Bx} et M_{By}
- Force F_{By}
- La contrainte de cisaillement au point A_2 , τ_{xy2} (voir la Figure 16c, sens montré arbitrairement).

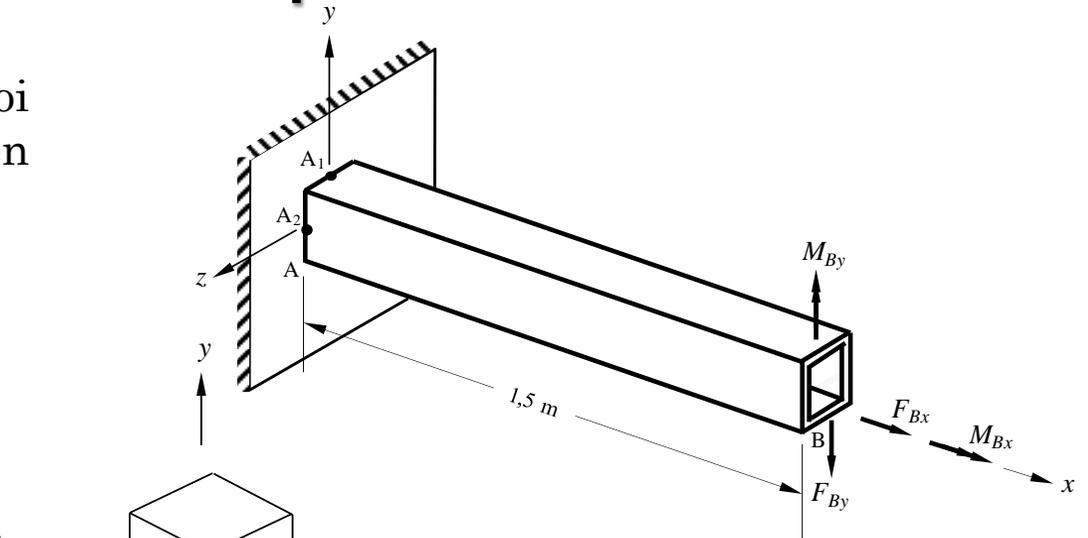


Figure 16a: poutre et chargement

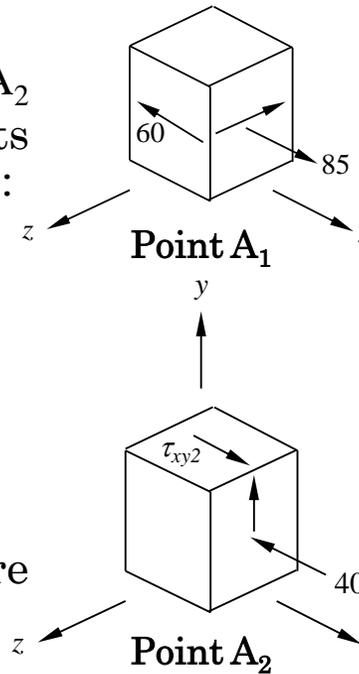


Figure 16c: cubes élémentaires des points A_1 et A_2

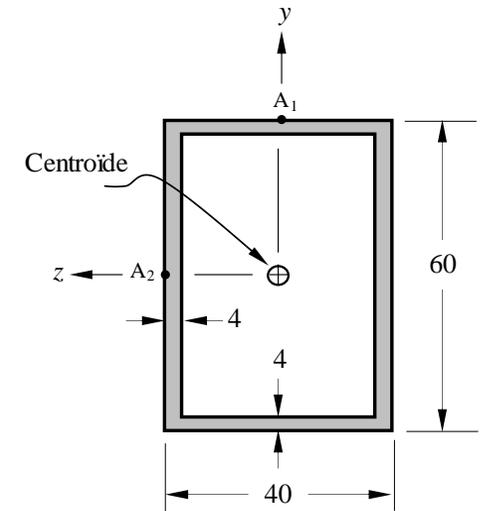


Figure 16b: poutre et chargement

Section 1.7: chargements combinés – problème 17

Un cylindre fermé à paroi mince (voir la Figure 17a) est soumis simultanément à une pression interne $P = 2 \text{ MPa}$, à une force axiale $F = 800 \text{ kN}$ en compression et à un moment M_x (valeur et sens inconnu).

Ce cylindre a un rayon moyen r de 240 mm et l'épaisseur t de sa paroi est de 8 mm . Les propriétés du matériau (acier) sont :

$E = 200\,000 \text{ MPa}$; $\nu = 0,3$; $G = 76\,923 \text{ MPa}$ et $S_Y = 300 \text{ MPa}$

Sous l'effet du chargement, une jauge d'extensométrie, collée sur la surface externe du cylindre à un angle de 45° par rapport à l'axe longitudinal x , indique une déformation $\varepsilon_a = 135,3 \mu\text{m/m}$.

Déterminez la valeur du moment M_x et indiquez son sens.

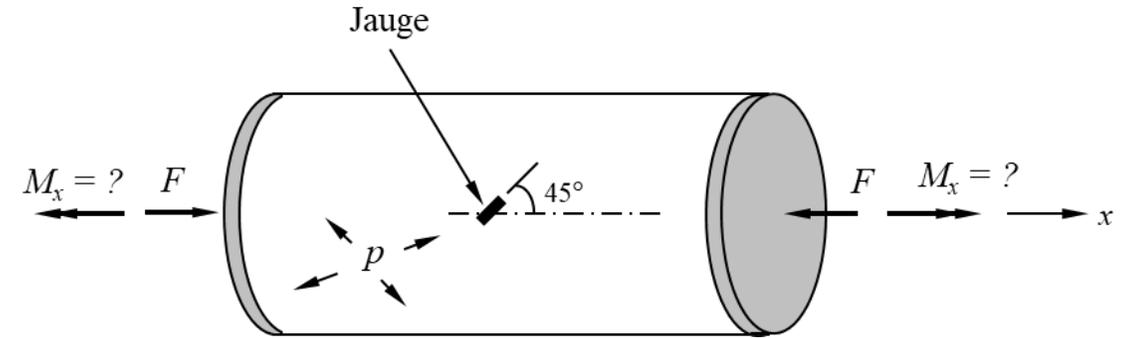


Figure 17a: poutre et chargement

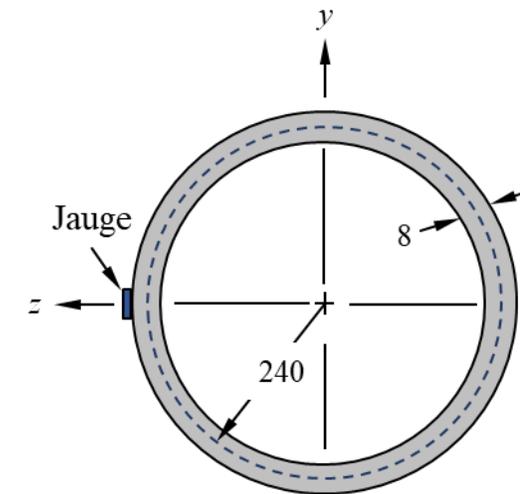


Figure 17b: section de la poutre

Section 1.9: déformations et contraintes – problème 18

La Figure 18a illustre en isométrie un tube fermé AB en acier (rayon moyen $r = 60$ mm; épaisseur $t = 5$ mm) est soumis à une pression interne $P = 5$ MPa, de plus, une force F_y de valeur inconnue (direction y) et un couple $M_{Cx} = 4$ kN.m sont appliqués au point B, comme le montre la Figure 20a. Les propriétés du matériau (acier) sont :

$E = 200\,000$ MPa ; $\nu = 0,3$; $G = 76\,923$ MPa et $S_Y = 350$ MPa

Une jauge est installée à la surface externe du tube (fibre supérieure), à une distance de 500 mm de B et à un angle de 45° par rapport à l'axe longitudinal (voir la Figure 18b). Sous l'effet du chargement, cette jauge indique une lecture de $730 \mu\text{m/m}$.

Déterminez la valeur de F_y

Propriétés de la section:

$$A = 1885 \text{ mm}^2$$

$$J = 6,786 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I = 3,393 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$S = 54,3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

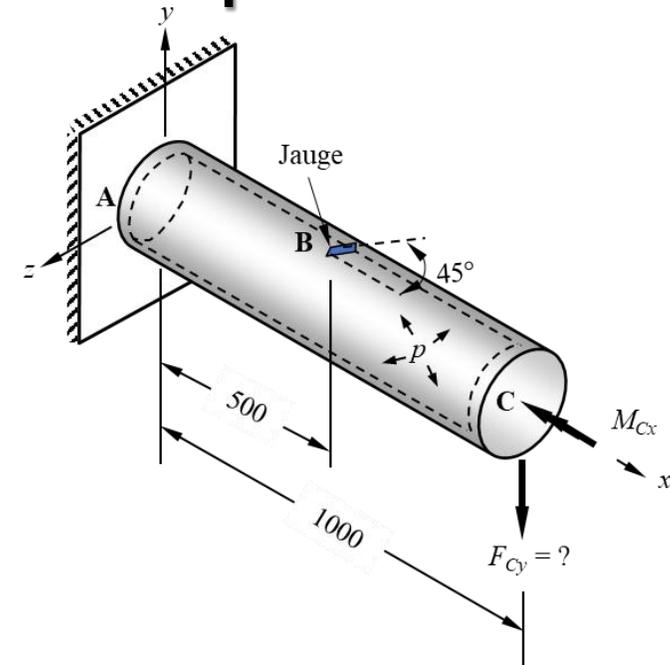


Figure 18a: poutre et chargement

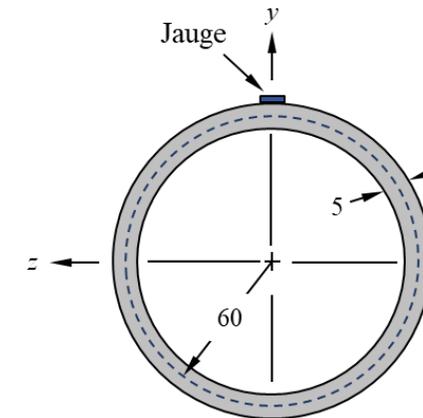


Figure 18b: section de la poutre

Section 1.9: déformations et contraintes – problème 19

Un tube en acier à paroi épaisse (rayon interne = 30 mm et le rayon externe = 40 mm) est soumis à une traction axiale F_{Cx} ainsi qu'à un moment de torsion M_{Cx} , tel qu'illustré à la figure ci-dessous. Le sens de F_{Cx} et M_{Cx} est montré de façon arbitraire.

Après l'application du chargement, les jauges a et b collées à la surface du tube indiquent les déformations suivantes :

$$\varepsilon_a = -700 \mu\text{m/m} \text{ et } \varepsilon_b = 1400 \mu\text{m/m}$$

Les propriétés du matériau (acier) sont :

$$E = 200\,000 \text{ MPa}; \nu = 0,3 ; G = 76\,923 \text{ MPa} \text{ et } S_Y = 300 \text{ MPa}$$

Déterminez les valeurs de F_{Cx} et M_{Cx} en indiquant clairement leur sens.

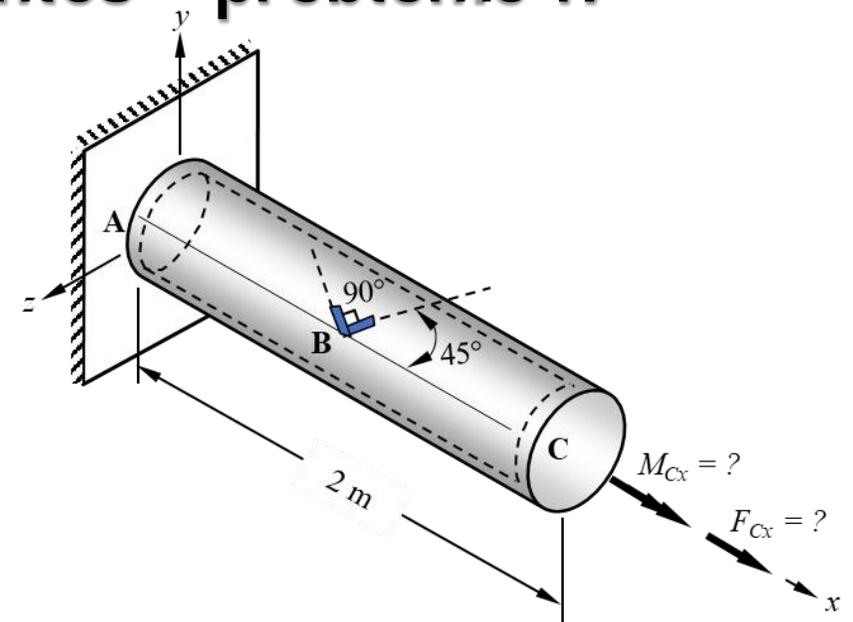


Figure 19a: poutre et chargement

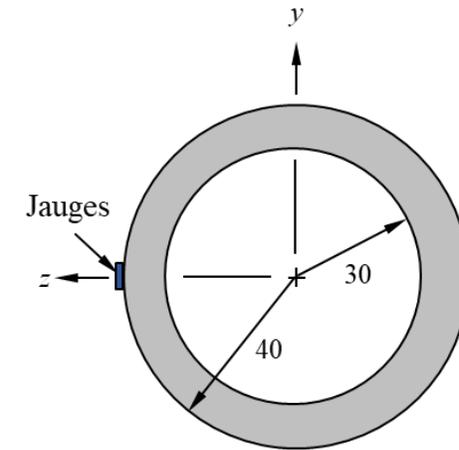


Figure 19b: section de la poutre

Section 1.9: déformations et contraintes – problème 20

La figure 20a illustre une membrure encadrée à son extrémité A et chargée à son extrémité B par un couple M_{Bx} de valeur inconnue (sens montré arbitrairement) et par un moment $M_{Bz} = 0,86 \text{ kN.m}$ (sens montré). La section de cette membrure (voir la Figure 20b) est composée de 2 tubes circulaires en acier (rayon moyen = 10 mm et épaisseur $t = 1,0 \text{ mm}$) soudés sur toute leur longueur sur une plaque d'acier (largeur = 100 mm; épaisseur = 5 mm).

Une jauge est collée sur la plaque rectangulaire, à 25 mm en haut du centroïde, (voir fig a et b), à une distance de 400 mm de B (fig. a) Sous l'effet du chargement, la lecture de cette jauge est égale à $380 \mu\text{m/m}$.

Les propriétés de l'acier sont :

$$E = 200\,000 \text{ MPa} \quad ; \quad \nu = 0,3 \quad \text{et} \quad G = 76\,923 \text{ MPa}$$

Les propriétés en flexion de la section de la membrure sont :

$$I_z = 0,430 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \text{et} \quad I_y = 7,32 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

- Déterminez la valeur et le sens de M_{Bx}
- Déterminez la valeur de la contrainte de cisaillement maximale dans les tubes circulaires.

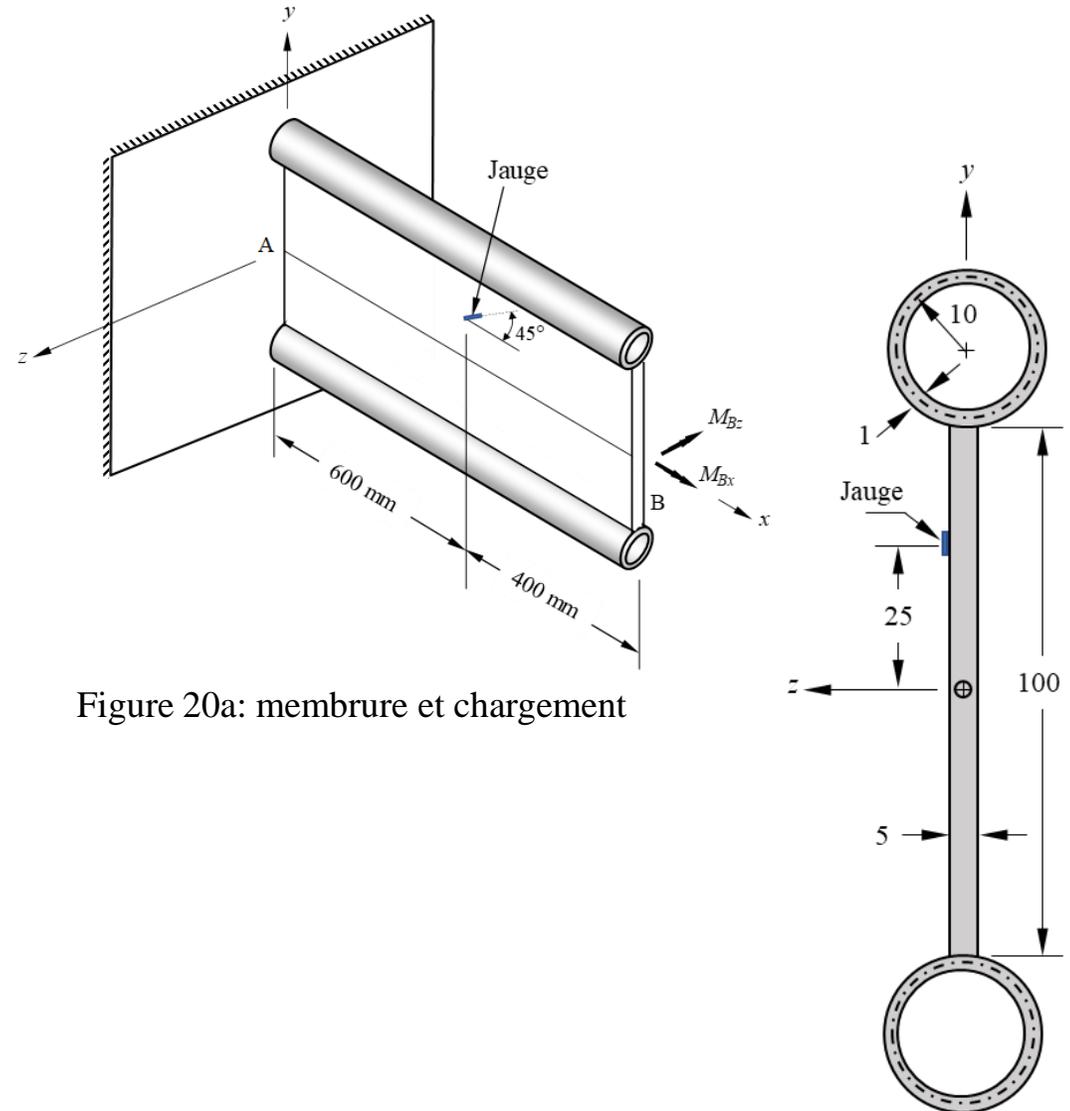


Figure 20a: membrure et chargement

Figure 20b: section de la membrure

Section 1.9: déformations et contraintes – problème 21

Une membrure, attachée à son extrémité A, est chargée à son extrémité B par un couple M_{Bx} de valeur inconnue (voir la Figure 21a).

La section de cette membrure (voir la Figure 21b) est composée de 2 tubes circulaires (rayon moyen = 15 mm; épaisseur de la paroi = 1,5 mm) en alliage d'aluminium qui sont collés, sur toute leur longueur, sur une plaque d'acier (largeur = 100 mm; épaisseur = 5 mm).

Les valeurs du module de cisaillement G sont :

$$G_{\text{Aluminium}} = 25\,000 \text{ MPa} \text{ et } G_{\text{acier}} = 76\,923 \text{ MPa}$$

Une jauge est collée au centre de la plaque rectangulaire en acier, à une distance de 300 mm de l'extrémité A. Cette jauge est orientée à un angle de 45° par rapport à l'axe x . Sous l'effet du chargement, la lecture de la jauge est égale à $-325 \mu\text{m/m}$.

Déterminez la valeur du couple M_{Bx} et indiquez son sens.

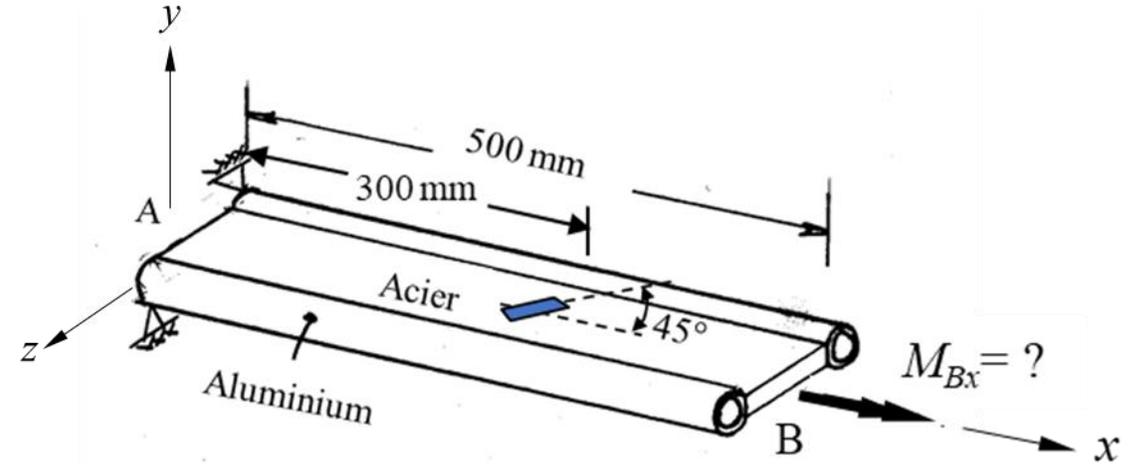


Figure 21a: membrure et chargement

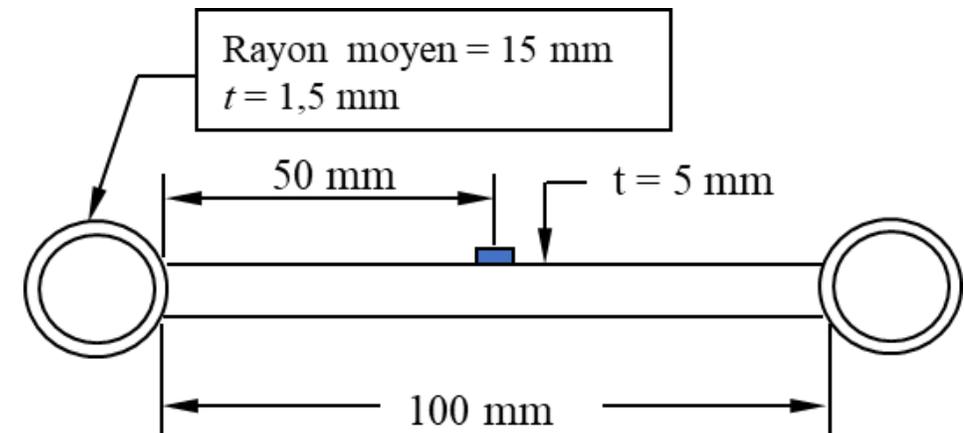


Figure 21b: section de la membrure

Réponses aux problèmes

Problème 1: $F_{xA} = -1,5 \text{ kN}$; $F_{yA} = 2,5 \text{ kN}$; $M_{xA} = 5 \text{ kN.m}$; $M_{yA} = 3 \text{ kN.m}$ et $M_{zA} = -14,5 \text{ kN.m}$

Problème 2: (a) $V_{max} = 100 \text{ kN}$; $V_{min} = 0 \text{ kN}$; $M_{max} = 250 \text{ N.m}$ et $M_{min} = 0 \text{ N.m}$

(b) $V_{max} = 3,5 \text{ kN}$; $V_{min} = -3,0 \text{ kN}$; $M_{max} = 6,0 \text{ kN.m}$ et $M_{min} = -4,0 \text{ kN.m}$

Problème 3: $V_{max} = 5 \text{ kN}$; $V_{min} = -20 \text{ kN}$; $M_{max} = 5 \text{ kN.m}$ et $M_{min} = -40 \text{ kN.m}$

Problème 4: $\tau_{ouverte} = 11,3 \text{ MPa}$ et $\tau_{fermée} = 17,0 \text{ MPa}$

Problème 5: $\tau_{tube} = 54,72 \text{ MPa}$ et $\tau_{plaque} = 3,06 \text{ MPa}$

Problème 6: $\sigma_x = \sigma_{x,F} + \sigma_{x,M_y} + \sigma_{x,M_z} = 7,9 + 70,3 + 81,3 = 159,5 \text{ MPa}$

Problème 7: $\sigma_x = \sigma_{x,F} + \sigma_{x,M_z} = -37,50 + 86,25 = 48,75 \text{ MPa}$

Problème 8: $F_{max} = 2481 \text{ N}$

Problème 9: Point C : $\sigma_1 = 39,34 \text{ MPa}$ et $\sigma_2 = -26,84 \text{ MPa}$

Point D : $\sigma_1 = 37,85 \text{ MPa}$ et $\sigma_2 = -13,56 \text{ MPa}$

Point K : $\sigma_1 = 33,94 \text{ MPa}$ et $\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$

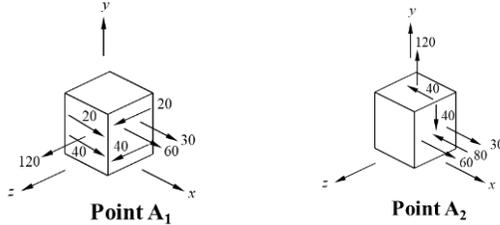
Problème 10: Point A₁ : $\sigma_1 = 29,05 \text{ MPa}$; $\sigma_2 = 1,27 \text{ MPa}$ et $\sigma_2 = \sigma_y = 0 \text{ MPa}$

Point A₂ : $\sigma_1 = 18,28 \text{ MPa}$; $\sigma_2 = -3,88 \text{ MPa}$ et $\sigma_2 = \sigma_z = 0 \text{ MPa}$

Réponses aux problèmes

Problème 11: $\sigma_x = 184,1$ MPa ; $\sigma_\theta = 60,0$ MPa et $\tau_{x\theta} = 44,2$ MPa

Problème 12:



Problème 13: $FS_{Tresca} = 2,58$; $\sigma_x = 1,13 + 8,80 + 24,26 = 34,19$ MPa et $\tau_{xs} = 65,66$ MPa

Problème 14: $FS_{Tresca} = 2,91$; $\sigma_x = 30,00 + 55,25 + 5,30 = 90,55$ MPa ; $\sigma_\theta = 60,00$ MPa et $\tau_{x\theta} = 36,84$ MPa

Problème 15: $FS_{Tresca} = 2,00$; $\sigma_x = 3,38 + 66,00 + 72,80 = 142,20$ MPa et $\tau_{xz} = 24,60$ MPa

Problème 16: (a) $M_{By} = 0,490$ kN.m et $M_{Bx} = 0,967$ kN.m

(b) $F_{By} = 536,7$ N et (c) $\tau_{xy} = 60,0 + (-1,4) = 58,6$ MPa

Problème 17: $M_x = 41,1$ kN.m

Aide : $\sigma_x = 30,0 + (-66,3) = -33,3$ MPa et $\tau_{x\theta} = 351,1 * 10^{-9} M_x$

Problème 18: $F_y = 20,7$ kN

Aide : $\sigma_x = 30,0 + 9,2 * 10^{-3} F_y$; $\sigma_\theta = 60,0$ MPa et $\tau_{x\theta} = 36,84$ MPa

Problème 19: $M_x = 5,55$ kN.m et $F = 439,8$ kN → $M_x = 11.1$ kN.m

Problème 20: (a) $M_{Bx} = 0,151$ kN.m (sens positif comme sur la figure) ; (b) $\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{189,42 - (-47,40)}{2} = 118,42$ MPa

Problème 21: $M_{x,acier} = 41,66$ N.m ; $M_{x,aluminium} = 103,42$ N.m et $M_x = 248,50$ N.m ;