Rappels

• Module 2

Principe de probabilité totale

Si $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ constitue une famille exhaustive d'événements deux à deux incompatibles, c'est-à-dire que $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \Omega$ et que $E_i \cap E_j = \phi$ pour tout i et j différents.

Pour tout événement A : $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap E_i)$ et $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap E_i)$

Donc : $$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)P(A \mid E_i)$$

Théorème de Bayes

Considérons un ensemble d'événements A_i mutuellement exclusifs et formant une partition de Ω, et un événement B quelconque. Si tous ces événements sont de probabilité non nulle, on a :

$$P[A_i/B] = \frac{P[A_i \cap B]}{P[B]} = \frac{P[A_i]P[B/A_i]}{\sum_j P[A_j]P[B/A_j]}$$

• Probabilité conditionnelle

Probabilité de l'événement A étant donné l'événement B :

$$P[A/B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \qquad avec \quad P[B] \neq 0$$

• Variables aléatoires indépendantes :

- Cas continu : Deux v.a. X et Y continues sont dites **indépendantes** si :

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)\, P(Y \leq y), \text{ pour tout réel x et y.}$$

- Cas discret : Deux v.a. X et Y discrètes (à valeurs respectivement dans I et J) sont dites **indépendantes** si

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y), \quad \text{pour tout } x \in I \text{ et y } y \in J$$

• Les transformées en z

◊ Définition: La transformée en z F*(z) d'une fonction discrète f_k est définie comme suit :

$$Z(f) \equiv F^*(z) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \; z^k \qquad z \neq 0$$

◊ La transformée en z de la suite $(A\alpha^n)_n$:

$$A\,\alpha^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A(\alpha z)^n = \frac{A}{1-\alpha z} \qquad \text{avec} |z| < 1/\alpha$$

Quelques propriétés de la transformée en z

$af_n + bg_n$	$\Leftrightarrow$	$a\,F^*(z) + b\,G^*(z)$
$a^n f_n$	$\Leftrightarrow$	$F^*(a\,z)$
f_{n+1}	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{z}\left[F^*(z) - f_0\right]$
$f_{n+k} \quad (k>0)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{F^*(z)}{z^k} - \sum_{i=0}^{k-1} f_i\, z^{i-k}$
f_{n-1}	$\Leftrightarrow$	$z\,F^*(z)$
f_{n-k}	$\Leftrightarrow$	$z^k\, F^*(z)$
$n\, f_n$	$\Leftrightarrow$	$z\,\frac{d}{dz} F^*(z)$
$n(n-1)\ldots(n-m+1) f_n$	$\Leftrightarrow$	$z^m\, \frac{d^m}{dz^m} F^*(z)$
$\sum_{k=0}^{n} f_{n-k}\; g_k$	$\Leftrightarrow$	$G^*(z) F^*(z) \Rightarrow$ convolutio n
$f_n - f_{n-1}$	$\Leftrightarrow$	$(1-z) F^*(z)$
$\sum_{k=0}^{n} f_k \quad (n \geq 0)$	$\Leftrightarrow$	$\frac{F^*(z)}{1-z}$

● Transformée de Laplace

◊ Définition : Soit une fonction continue f(t) définie dans l'ensemble des réels. On appelle transformée de Laplace la fonction définie comme suit:

$$L(f) = F^*(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt$$

◊ La transformée de Laplace de la fonction $f(t) = Ae^{-\alpha t}$ $(A \in IR$ et $a \geq 0)$:

$$F(s) = \frac{A}{s+\alpha}, \quad s + \alpha > 0$$

● Distribution exponentielle

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

PDF

$$F_x(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

CDF

Quelques propriétés de la transformée de Laplace

$af(t)+bg(t)$	$\Leftrightarrow$	$aF^*(s)+bG^*(s)$
$f(t-a)$	$\Leftrightarrow$	$e^{-sa}\,F^*(s)$
$e^{-at}\,f(t)$	$\Leftrightarrow$	$F^*(s+a)$
$t\,f(t)$	$\Leftrightarrow$	$-\frac{d}{ds}F^*(s)$
$t^n\,f(t)$	$\Leftrightarrow$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F^*(s)$
$\int_{x=0}^{t} f(t-x)g(x)dx$	$\Leftrightarrow$	$F^*(s)G^*(s)$
$\frac{d}{dt}f(t)$	$\Leftrightarrow$	$s\,F^*(s)-f(0)$
$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} s^nF^*(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}\,f'(0)-\ldots \\ \qquad -f^{(n-1)}(0) \end{cases}$

• Variable aléatoire sans mémoire

Une variable aléatoire X est dite sans mémoire si :

$$P[X>s+t/X>t]=P[X>s]\quad\forall s\geq 0\quad\text{et}\quad\forall t\geq 0$$

• Processus de Poisson

1ère Définition d'un processus de Poisson

Un processus de comptage $\{N(t),\ t\geq 0\}$ est dit processus de Poisson avec paramètre $\lambda>0$ si et seulement si :

(i) $N(0) = 0$

(ii) les accroissements de $\{N(t),\ t\geq 0\}$ sont indépendants

(iii) le nombre d'événements dans l'intervalle $(s, s + t)$ obéit à la loi de Poisson :

$$P[N(t+s)-N(t)=n]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\quad n\geq 0$$

$2^{ème}$ Définition d'un processus de Poisson

Un processus de comptage {N(t), t ≥ 0} est dit processus de Poisson avec taux l > 0 si et seulement si :

(i) N(0) = 0

(ii) les accroissement de {N(t), t ≥ 0} sont stationnaires et indépendants

(iii) P[N(h) = 1] = λh + 0(h) pour h → 0

(iv) P[N(h) ≥ 2] = 0(h) pour h → 0

● <u>Module 3</u>

THÉORÈME LIMITE CENTRAL

Soit u une variable aléatoire de moyenne $\overline{u}$, de variance vraie σ^2. Soit $\overline{u}_n$ la variable aléatoire moyenne expérimentale associée à u et construite sur n sessions (répétitions) <u>non corrélées</u>.

La distribution limite de la variable aléatoire $\dfrac{\overline{u}_n - \overline{u}}{\sigma / \sqrt{n}}$ est la distribution normale centré réduite notée N(0,1).

Le nombre minimum d'observations à considérer pour que l'erreur commise $(\Pr ob\,(|\overline{u}_n - \overline{u}| < e) \geq K)$ en estimant $\overline{u}$ par $\overline{u}_n$ vérifie : $\mathbf{n} \geq \left(\dfrac{\boldsymbol{\sigma z}}{\mathbf{e}}\right)^{\mathbf{2}}$

avec $N(-z) = \dfrac{1-K}{2}, N(z) = \dfrac{1+K}{2}, N(z) - N(-z) = K$ et N la distribution standard normale.

Analyse de variance :

L'effet principal de la ligne i (i.e. du facteur M au niveau i) est : $M_i = \overline{F}_{i.} - \overline{F}_{..}$

Et celui de la colonne j (i.e. du facteur C au niveau j) est : $C_j = \overline{F}_{.j} - \overline{F}_{..}$

L'effet d'interaction : $MC_{ij} = (F_{ij} - \overline{F}_{i.} - \overline{F}_{.j} + \overline{F}_{..})$

La variation totale : SST=SSM+SSC+SSI

où $SST = \sum_{i=1}^{l_M} \sum_{j-1}^{l_C} (F_{ij} - \overline{F}_{..})^2$ $SSM = \sum_{i=1}^{l_M} \sum_{j=1}^{l_C} M_i^2$ $SSC = \sum_{i=1}^{l_M} \sum_{j=1}^{l_C} C_j^2$ $SSI = \sum_{i=1}^{l_M} \sum_{j=1}^{l_C} MC_{ij}^2$