

Chapitre 6 : Installations électriques triphasées

Table des matières

Introduction.....	2
Mise en situation	2
Quelques définitions.....	3
Description et analyse d'un circuit triphasé équilibré.....	3
La source triphasée	3
La charge triphasée	7
Puissances en triphasé.....	15
Puissance instantanée	15
Bilan de puissance pour une charge triphasée équilibrée.....	16
Compensation de l'énergie réactive	20

Introduction

Mise en situation

Dans le but d'obtenir des puissances plus élevées, 90% des moteurs électriques utilisés dans les installations industrielles sont **triphasés**. La plupart des installations industrielles sont alors alimentées en alternatif **triphasé**. De plus la production, le transport et la distribution de l'énergie électrique se font en **triphasé**. Par rapport à un système monophasé, un système triphasé présente les avantages suivants :

- La puissance ne devient jamais nulle dans un système triphasé (voir équation 4.29).
- Un moteur triphasé est 1,5 fois plus puissant qu'un moteur monophasé (Cours 6 à venir).
- La production d'un champ magnétique tournant utile pour le fonctionnement des moteurs en courant alternatif est beaucoup de plus simple (Cours 6 à venir).
- Transport de l'énergie avec 3 fils seulement alors qu'il en faudrait 6 fils de plus grosses sections en monophasé (Figure 6. 1).
- Le triphasé permet de créer un potentiel neutre en associant 3 phases (voir cette partie du cours).



Figure 6. 1. Transport de l'énergie électrique. [Source](#)

La Figure 6. 2 ci-dessous montre la plaque signalétique d'un moteur triphasé d'ABB et le symbole $3\sim$ signifie que la machine doit être alimentée sur un réseau triphasé. La plupart des grandeurs représentées sur cette figure nous sont familières. Des symboles comme Y et Δ feront l'objet de ce cours. Il sera également question d'établir les relations entre les différentes grandeurs électriques montrées sur la plaque du moteur.

3 [~] Moto		M3AA 180 MLB 4	Cl. F	IP 55	IE2 CE	
V	Hz	kW	r/min	A	cos ϕ	duty
690	Y	50	22	1475	24,0	0,83 S1
400	Δ	50	22	1475	41,5	0,83 S1
415	Δ	50	22	1477	40,4	0,81 S1
Prod. code		3GAA182032-ADG		No 3GV0912345678001		
50 Hz: IE2 - 92,1(100%) - 93,1(75%) - 93,0(50%)						2009
6313-2Z/C3		6212-2Z/C3		188 kg		

spare-parts:www.abb.com/partsonline

Figure 6. 2. Plaque signalétique d'un moteur triphasé d'ABB. [Source](#)

Quelques définitions

- De façon générale, un **système polyphasé** est un ensemble de q grandeurs (tensions ou courants) sinusoïdales de même fréquence, déphasées les unes par rapport aux autres.
- Le système est **symétrique** si les valeurs efficaces des grandeurs sinusoïdales sont égales et si le déphasage entre deux grandeurs consécutives vaut $2\pi k/q$, où k , appelé **ordre de succession des phases**, est égal au nombre d'arcs $2\pi k/q$ correspondant au déphasage de deux grandeurs de numéros consécutifs.

Exemple : Dans le cas triphasé qui fera l'objet de ce cours, on aura :

- ✓ Nombre de phases : $q = 3$
 - ✓ Ordre de succession des phases : $k = 1,2,3$
 - ✓ Déphasage entre 1 et 2 : $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$
 - ✓ Déphasage entre 2 et 3 : $\frac{2\pi \times 2}{3} = 240^\circ$
- La séquence de phase représente l'ordre dans lequel se succèdent les tensions d'un système triphasé.
 - Un **circuit monophasé** faisant partie d'un système polyphasé donné est appelé par commodité **phase** (à ne pas confondre avec l'angle de phase associé à une grandeur sinusoïdale). Ainsi, pour simplifier des calculs, une phase du circuit peut être analysée.

Description et analyse d'un circuit triphasé équilibré

Le système triphasé est le type le plus courant de sources polyphasées, les trois tensions sont alors déphasées de $2\pi/3 = 120^\circ$. Comme tout circuit électrique, le **circuit triphasé** comportera une ou des **sources**, des **charges** et des **conducteurs** pour le raccordement des deux parties. Un circuit triphasé est alors l'ensemble constitué de **trois tensions triphasées** référencées par rapport à un point neutre N et d'une **charge triphasée** parcourue par trois courants sinusoïdaux (flèches rouges sur la **Figure 6.3**). Nous verrons plus loin que le 4^e fil peut ou ne pas être utilisé.

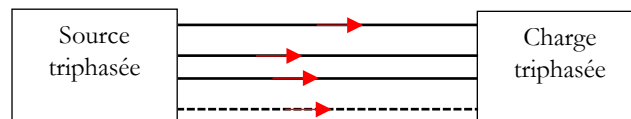


Figure 6.3. Illustration d'un système triphasé

La source triphasée

L'expression temporelle

Les trois tensions d'une ligne triphasée sont déphasées de 120° l'une par rapport à l'autre avec des valeurs efficaces V_{AN} , V_{BN} et V_{CN} . L'expression temporelle et les phaseurs correspondants s'écrivent comme montré ci-dessous.

$$\begin{cases} v_{AN}(t) = V_{AN}\sqrt{2} \cos(\omega t) \\ v_{BN}(t) = V_{BN}\sqrt{2} \cos(\omega t - 120^\circ) \\ v_{CN}(t) = V_{CN}\sqrt{2} \cos(\omega t - 240^\circ) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_{AN} = V_{AN}\angle 0^\circ \\ \bar{V}_{BN} = V_{BN}\angle -120^\circ \\ \bar{V}_{CN} = V_{CN}\angle -240^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_{AN} = V_{AN}\angle 0^\circ \\ \bar{V}_{BN} = V_{BN}\angle -120^\circ \\ \bar{V}_{CN} = V_{CN}\angle +120^\circ \end{cases} \quad (6.1)$$

Les indices avec la lettre N sont utilisés pour marquer le fait que ces tensions sont **référencées par rapport au neutre (N)**. Ces tensions seront appelées **tension de phase**. On dira que la source est **équilibrée** lorsque les valeurs efficaces

des tensions sont identiques c'est-à-dire lorsque $V_{AN} = V_{BN} = V_{CN} = V_{ph}$. La **Figure 6. 4** représente les graphes correspondant aux tensions instantanées dans les cas d'une source triphasée équilibrée.

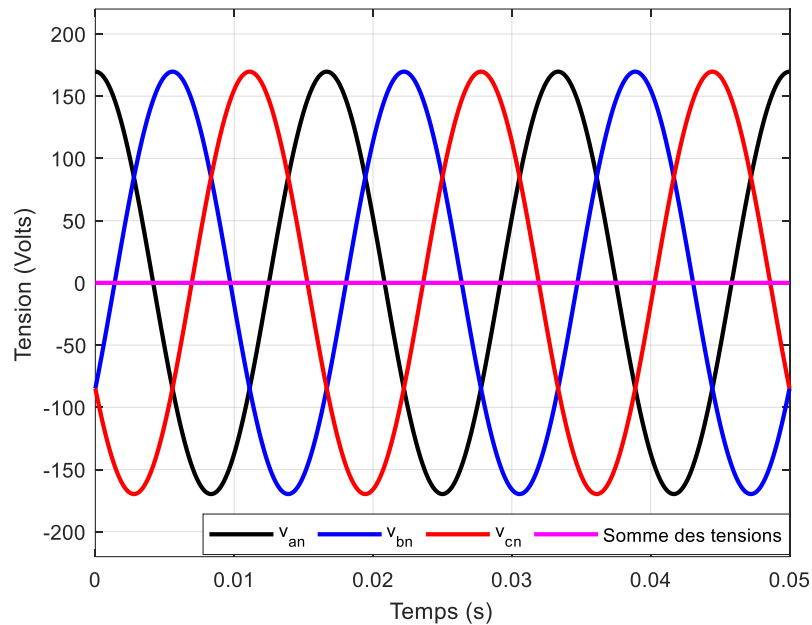


Figure 6. 4. Formes d'onde d'une source triphasée équilibrée

Remarque : à tout instant la somme des trois tensions est nulle. Les expressions dans l'équation (6.1) sont celles d'un système en **séquence directe**. On remarquera que la tension de phase 1 est prise comme origine des phases (angle de 0°).

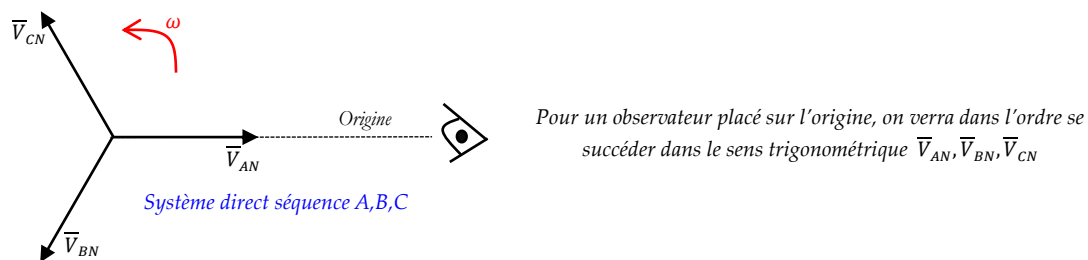


Figure 6. 5. Diagramme vectoriel de la source triphasée équilibrée directe.

Couplage étoile d'une source triphasée

Lorsque les phases d'un système ne sont pas liées entre elles, on parle d'un système non lié. Seuls les systèmes **liés** sont utilisés et considérés dans ce qui suit. On distinguera le couplage **étoile (Y)** du couplage en **triangle (Δ)**. Dans les analyses qui suivent, il est considéré le système triphasé **équilibré**. On obtient le **couplage étoile Y** ou **Wye** de manière à avoir le même point commun **N** comme montré ci-dessous. C'est le mode de couplage le plus utilisé au niveau de la source.

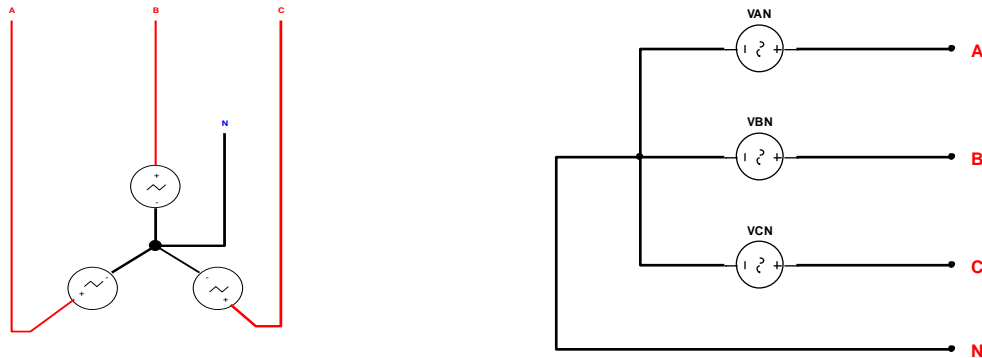


Figure 6. 6. Couplage étoile de la source triphasée

En utilisant la méthode des phaseurs, on peut évaluer la somme des trois tensions de la source triphasée équilibrée comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{V}_{AN} + \bar{V}_{BN} + \bar{V}_{CN} &= \underbrace{V_{AN}}_{V_{ph}} \angle 0^\circ + \underbrace{V_{BN}}_{V_{ph}} \angle -120^\circ + \underbrace{V_{CN}}_{V_{ph}} \angle +120^\circ \\ \Rightarrow \bar{V}_{AN} + \bar{V}_{BN} + \bar{V}_{CN} &= V_{ph} \underbrace{(1 \angle 0^\circ + 1 \angle -120^\circ + 1 \angle +120^\circ)}_0 = \boxed{0} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Cette tension représente le *triple de la tension du point neutre*. On tire alors les conclusions suivantes :

- ✓ Le point neutre dans un système triphasé équilibré connecté en étoile est tel que $\boxed{\bar{V}_N = 0}$.
- ✓ La somme des tensions d'une source triphasée équilibrée connectée en étoile est nulle.

Tension de phase et tension de ligne

La tension entre chaque ligne et le neutre est appelée **tension de phase** dont les expressions et les phaseurs dans le cas de **la d'un système équilibré** sont définis dans l'équation (4.1). La tension entre deux lignes est appelée **tension de ligne**.

En termes de phaseurs on aura alors pour les tensions de ligne :

$$\begin{cases} \bar{V}_{AB} = \bar{V}_A - \bar{V}_B \\ \bar{V}_{BC} = \bar{V}_B - \bar{V}_C \\ \bar{V}_{CA} = \bar{V}_C - \bar{V}_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_{AB} = V_{ph} - V_{ph} \angle -120^\circ = V_{ph} - V_{ph} \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \boxed{V_{ph}\sqrt{3} \angle 30^\circ} \\ \bar{V}_{BC} = (V_{ph} \angle -120^\circ) - (V_{ph} \angle +120^\circ) = \boxed{V_{ph}\sqrt{3} \angle -90^\circ} \\ \bar{V}_{CA} = (V_{ph} \angle +120^\circ) - (V_{ph} \angle 0^\circ) = \boxed{V_{ph}\sqrt{3} \angle +150^\circ} \end{cases} \quad (6.3)$$

En désignant par V_L la valeur efficace de la tension de ligne par V_L , on en déduit les conclusions suivantes :

- Relation entre les valeurs efficaces :

$$V_L = \sqrt{3}V_{ph} \quad (6.4)$$

- Déphasage par rapport à \bar{V}_{AN}

- ✓ \bar{V}_{AB} est en **avance de 30°** par rapport à \bar{V}_{AN}
- ✓ \bar{V}_{BC} est en **retard de 90°** par rapport à \bar{V}_{AN}
- ✓ \bar{V}_{CA} est en **avance de 150°** par rapport à \bar{V}_{AN}

- Déphasage entre tensions de ligne et tensions de phase correspondante :

$$\begin{cases} \bar{V}_{AN} = V_{ph} \angle 0^\circ \\ \bar{V}_{BN} = V_{ph} \angle -120^\circ \\ \bar{V}_{CN} = V_{ph} \angle +120^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_{AB} = V_{ph} \sqrt{3} \angle 30^\circ \\ \bar{V}_{BC} = V_{ph} \angle -90^\circ \\ \bar{V}_{CA} = V_{ph} \sqrt{3} \angle +150^\circ \end{cases} \quad (6.5)$$

- ✓ \bar{V}_{AB} est en *avance* de 30° par rapport à \bar{V}_{AN} .
- ✓ \bar{V}_{BC} est en *avance* de 30° par rapport à \bar{V}_{BN} .
- ✓ \bar{V}_{CA} est en *avance* de 30° par rapport à \bar{V}_{CN} .

Les tensions de ligne sont alors en *avance* de 30° par rapport aux tensions de phases correspondantes.

- Les trois tensions de ligne \bar{V}_{AB} , \bar{V}_{BC} et \bar{V}_{CA} forment un système triphasé équilibré direct.

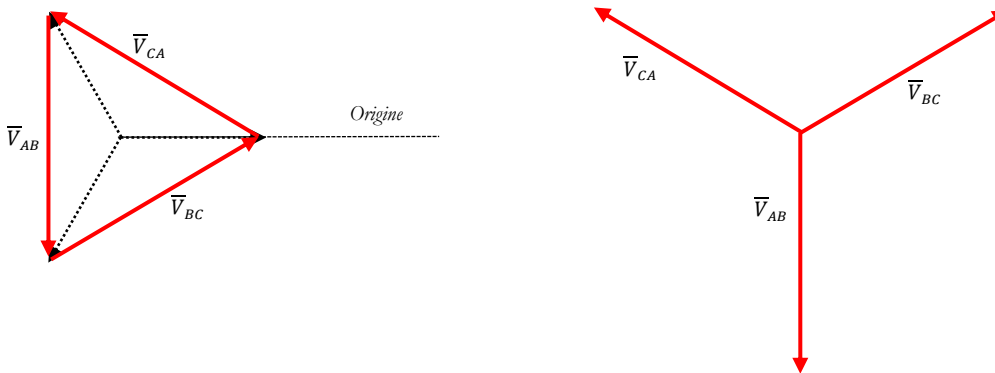


Figure 6.7. Diagramme vectoriel des tensions de ligne

Note importante : Sauf indication contraire, la tension donnée pour une ligne triphasée est sa tension de ligne.

Exemple une ligne triphasée de 208-60 Hz signifie que la tension de ligne est :

$$V_L = 208 \text{ V} \Rightarrow V_{ph} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \approx 120 \text{ V} \quad (6.6)$$

Dans certains cas, les deux niveaux de tensions dans le réseau sont fournis sous la forme : V_{ph}/V_L .

Exemple : réseau triphasé de 230 V / 400 V cela signifie que :

$$\begin{cases} V_{ph} = 230 \text{ V} \\ V_L = 400 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_L}{V_{ph}} = \frac{400}{230} \approx \sqrt{3} \quad (6.7)$$

Couplage triangle des sources

Dans un couplage triangle Δ , les lignes sont raccordées ensemble et le neutre n'est pas utilisé (**Erreur! Source du renvoi introuvable.**). On remarquera alors que les tensions de lignes sont les mêmes que celles de phases dans ce cas.

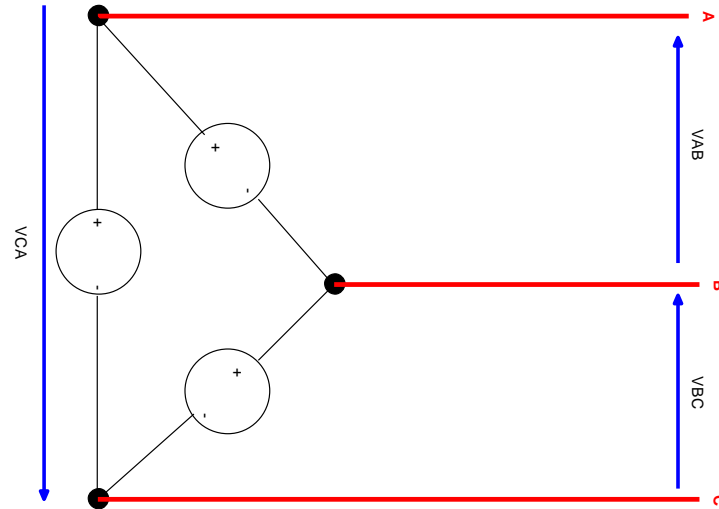


Figure 6.8. Couplage triangle de la source triphasée.

Couplage étoile et triangle des sources réelles.

À cause des bobines, l'impédance interne des générateurs triphasés est inductive et le couplage des sources Y ou Δ ont la forme montrée sur la Figure 6.9. R en série avec L représente l'impédance interne de la source. Dans la suite du cours, nous supposons les **sources idéales**.

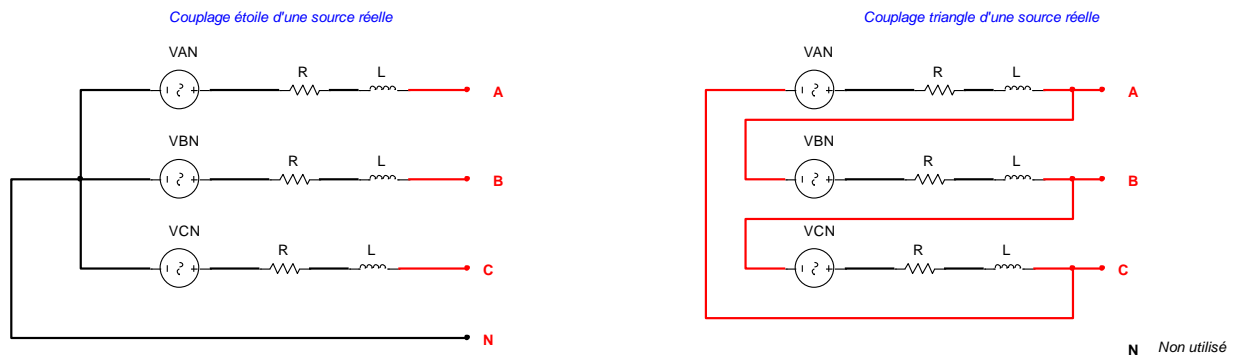


Figure 6.9. Couplage étoile et triangle de la source triphasée en tenant compte de l'impédance interne.

La charge triphasée

Définition

Une charge triphasée est caractérisée par trois impédances $\bar{Z}_1 = R_1 + jX_1$; $\bar{Z}_2 = R_2 + jX_2$ et $\bar{Z}_3 = R_3 + jX_3$. La charge triphasée est équilibrée si les impédances sont égales c'est-à-dire $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = Z \angle \varphi$.

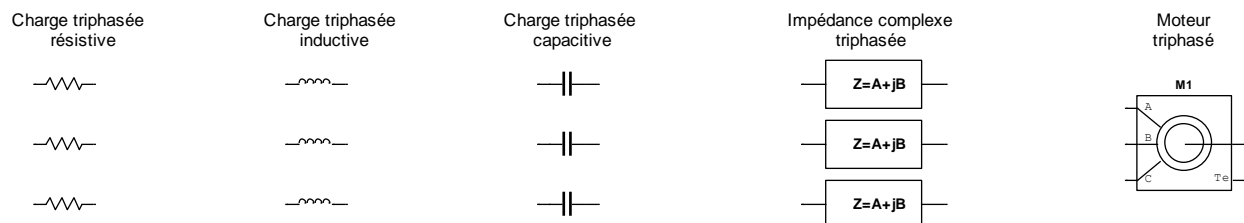


Figure 6.10. Charges triphasées

Courants de ligne et courant de phase

Les **courants de lignes** sont des courants *traversant chaque conducteur de ligne*. On les dénote $\bar{I}_{L_A}, \bar{I}_{L_B}$ et \bar{I}_{L_C} . Ainsi le courant de neutre (dans le cas d'un couplage étoile) qui sert de retour commun dans le conducteur de neutre sera définie comme suit :

$$\bar{I}_N = \bar{I}_{L_A} + \bar{I}_{L_B} + \bar{I}_{L_C} \quad (6.8)$$

Les **courants des phases** sont ceux qui *traversent chacune des charges élémentaires de la charge triphasée*. On les dénotera par $\bar{I}_{ph_A}, \bar{I}_{ph_B}$ et \bar{I}_{ph_C} . Bien évidemment lorsque la charge est **équilibrée** telle ce sera dans ce cours, ces différents courants ont la même valeur efficace et donc on posera:

$$\begin{cases} I_{ph_1} = I_{ph_2} = I_{ph_3} = I_{ph} \\ I_{L_1} = I_{L_2} = I_{L_3} = I_L \end{cases} \quad (6.9)$$

Les relations entre les courants de ligne et les courants de phase différeront selon le mode de connexion de la charge triphasée au réseau triphasé.

Il a été précédemment mentionné que **deux niveaux de tensions existent** dans un système triphasé : la tension de phase (entre ligne et neutre : V_{ph}) et la tension de ligne entre deux lignes (V_L). Cela offre alors **deux possibilités** de raccorder une charge triphasée à une source triphasée. On distinguera également comme pour la source, le **couplage étoile** des charges de leurs couplages en **triangle**.

Couplage étoile de la charge triphasée

Dans cette configuration, chacune des trois tensions de phase (ligne-neutre) est connectée à l'une des trois impédances. La **Figure 6. 11** montre le cas d'une source équilibrée raccordée à une charge équilibrée. Dans ce cas, le courant dans le neutre est nul.

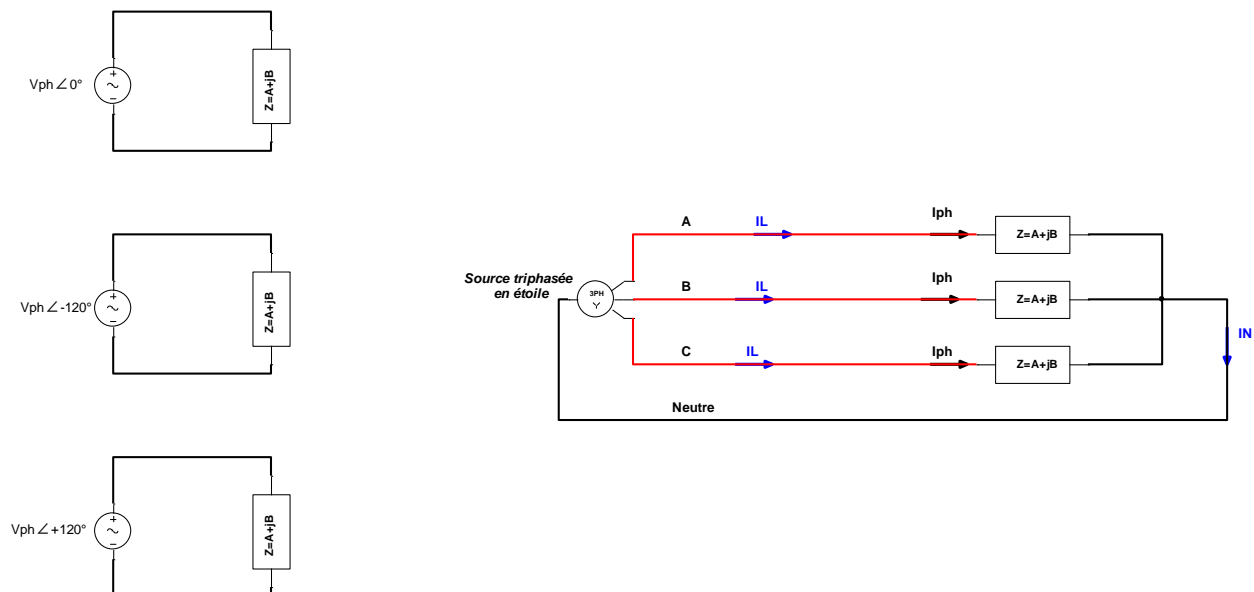


Figure 6. 11. Raccordement en étoile d'une charge équilibrée sur une source en étoile.

Le courant dans chaque ligne est le même que celui qui traverse la phase correspondante. Les impédances étant identiques, posons alors : $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = \bar{Z}_Y$. La loi d'Ohm s'écrit alors :

$$\bar{I}_{Li} = \frac{\bar{V}_{iN}}{\bar{Z}_Y} \quad (6.10)$$

On peut alors déterminer le courant de neutre en considérant la formule (4.8) comme suit :

$$\begin{cases} \bar{I}_{LA} = \frac{\bar{V}_{AN}}{\bar{Z}_Y} \\ \bar{I}_{LB} = \frac{\bar{V}_{BN}}{\bar{Z}_Y} \\ \bar{I}_{LC} = \frac{\bar{V}_{CN}}{\bar{Z}_Y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_{LA} = \frac{V_{ph} \angle 0^\circ}{\bar{Z}_Y} \\ \bar{I}_{LB} = \frac{V_{ph} \angle -120^\circ}{\bar{Z}_Y} \\ \bar{I}_{LC} = \frac{V_{ph} \angle +120^\circ}{\bar{Z}_Y} \end{cases} \Rightarrow \bar{I}_N = \frac{V_{ph} \angle 0^\circ + V_{ph} \angle -120^\circ + V_{ph} \angle +120^\circ}{\bar{Z}_Y} = \boxed{0} \quad (6.11)$$

Note importante : Le courant dans le fil de neutre est nul à cause de l'équilibre des charges.

Exemple d'application 1 : Calculez les **phaseurs** des tensions de phase au niveau de la charge ainsi que les **phaseurs** des courants de ligne dans un couplage étoile-étoile (source étoile-charge étoile). Le système est équilibré et la séquence des phases est directe.

Données : La tension de la ligne triphasée de $\bar{V}_{AB} = 208 \angle 0^\circ V$ et l'impédance de charge par phase est de $\bar{Z} = 4 + j3 \Omega$.

Solution de l'exemple d'application

✓ Tensions de phases

La valeur efficace des tensions de phases est :

$$V_{ph} = \frac{208}{\sqrt{3}} = 120 V$$

Pour les angles, on tient compte du fait que \bar{V}_{AB} est en avance de 30° par rapport à \bar{V}_{AN} et que $\bar{V}_{AN}, \bar{V}_{BN}$ et \bar{V}_{CN} forment un système triphasé équilibré direct.

$$\bar{V}_{AB} = 208 \angle 0^\circ V \Rightarrow \bar{V}_{AN} = 120 \angle -30^\circ \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_{BN} = 120 \angle (-30 - 120)^\circ \\ \bar{V}_{CN} = 120 \angle (-30 + 120)^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_{AN} = 120 \angle -30^\circ \\ \bar{V}_{BN} = 120 \angle -150^\circ \\ \bar{V}_{CN} = 120 \angle 90^\circ \end{cases} \quad (6.12)$$

✓ Courants dans la charge

$$\bar{Z} = 4 + j3 \Omega = 5 \angle 36,87^\circ \Omega \quad (6.13)$$

On obtient en utilisant l'équation (4.10) :

$$\begin{cases} \bar{I}_{LA} = \frac{\bar{V}_{AN}}{\bar{Z}_Y} = \frac{120 \angle -30^\circ}{5 \angle 36,87^\circ} = \boxed{24 \angle -66,87^\circ A} \\ \bar{I}_{LB} = \frac{\bar{V}_{BN}}{\bar{Z}_Y} = \frac{120 \angle -150^\circ}{5 \angle 36,87^\circ} = \boxed{24 \angle -186,87^\circ A} \\ \bar{I}_{LC} = \frac{\bar{V}_{CN}}{\bar{Z}_Y} = \frac{120 \angle 90^\circ}{5 \angle 36,87^\circ} = \boxed{24 \angle 53,13^\circ A} \end{cases} \quad (6.14)$$

Couplage triangle de la charge triphasée

Dans cette configuration, chacune des trois tensions de ligne (ligne-ligne) est connectée à l'une des trois impédances. La **Figure 6. 12** montre le cas d'une source équilibrée en étoile raccordée à une charge équilibrée en triangle. Les impédances étant identiques posons comme pour la charge triphasée en étoile : $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = \bar{Z}_\Delta = Z_\Delta \angle \varphi$.

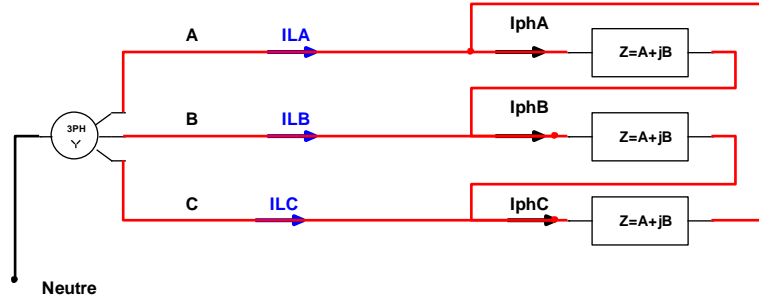


Figure 6. 12. Raccordement en triangle d'une charge équilibrée

On remarquera que les courants de phase \bar{I}_{phA} , \bar{I}_{phB} et \bar{I}_{phC} sont différents des courants de ligne \bar{I}_{L1} , \bar{I}_{L2} et \bar{I}_{L3} dans cette configuration; pour les déterminer, on applique la loi d'Ohm comme montré ci-dessous.

$$\begin{cases} \bar{I}_{phA} = \frac{\bar{V}_{AB}}{\bar{Z}_\Delta} = \frac{\bar{V}_{AB}}{Z_\Delta \angle \varphi} \\ \bar{I}_{phB} = \frac{\bar{V}_{BC}}{\bar{Z}_\Delta} = \frac{\bar{V}_{BC}}{Z_\Delta \angle \varphi} \\ \bar{I}_{phC} = \frac{\bar{V}_{CA}}{\bar{Z}_\Delta} = \frac{\bar{V}_{CA}}{Z_\Delta \angle \varphi} \end{cases} \quad (6.15)$$

En choisissant \bar{V}_{AB} comme référence de tension, on obtient :

$$\begin{cases} \bar{V}_{AB} = V_L \angle 0^\circ \\ \bar{V}_{BC} = V_L \angle -120^\circ \\ \bar{V}_{CA} = V_L \angle +120^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_{phA} = \frac{V_L}{Z_\Delta} \angle -\varphi \\ \bar{I}_{phB} = \frac{V_L}{Z_\Delta} \angle -120^\circ - \varphi \\ \bar{I}_{phC} = \frac{V_L}{Z_\Delta} \angle 120^\circ - \varphi \end{cases} \quad (6.16)$$

À partir des **courants de phase**, on peut déterminer les **courants de ligne** en appliquant la **loi des nœuds** :

$$\begin{cases} \bar{I}_{LA} = \bar{I}_{phA} - \bar{I}_{phC} \\ \bar{I}_{LB} = \bar{I}_{phB} - \bar{I}_{phA} \\ \bar{I}_{LC} = \bar{I}_{phC} - \bar{I}_{phB} \end{cases} \quad (6.17)$$

Transformation triangle étoile : Transformation de Kennely

Vue des fils de ligne, on peut procéder à la transformation suivante pour simplifier les analyses et ramener le raccordement triangle dans un mode étoile (voir **Figure 6. 13**).

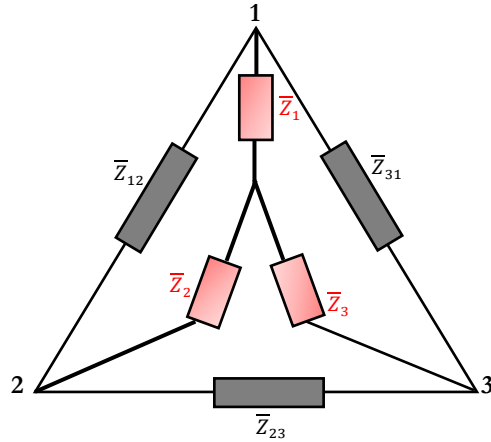


Figure 6. 13. Transformation de Kennely.

Les charges \bar{Z}_{12} , \bar{Z}_{23} et \bar{Z}_{31} sont montées en triangle et le trio de charges \bar{Z}_1 , \bar{Z}_2 et \bar{Z}_3 représente les charges équivalentes en étoile vue des mêmes points. On obtient les égalités suivantes :

- Vue des bornes 1 et 2

$$\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = \bar{Z}_{12} \text{ parallèle } (\bar{Z}_{31} + \bar{Z}_{23}) \Rightarrow \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_{12}(\bar{Z}_{31} + \bar{Z}_{23})}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{31} + \bar{Z}_{23}} \quad (6.18)$$

- Vue des bornes 2 et 3

$$\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = \bar{Z}_{23} \text{ parallèle } (\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{31}) \Rightarrow \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_{23}(\bar{Z}_{31} + \bar{Z}_{12})}{\bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{31}} \quad (6.19)$$

- Vue des bornes 3 et 1 :

$$\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 = \bar{Z}_{31} \text{ parallèle } (\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23}) \Rightarrow \bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_{31}(\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23})}{\bar{Z}_{31} + \bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23}} \quad (6.20)$$

En combinant les équations (6.18), (6.19) et (6.20), on obtient les formules de passage suivant :

- **Transformation Y-Δ**

$$\begin{cases} \bar{Z}_{12} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_3 \bar{Z}_1}{\bar{Z}_3} \\ \bar{Z}_{23} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_3 \bar{Z}_1}{\bar{Z}_1} \\ \bar{Z}_{31} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_3 \bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \end{cases} \quad (6.21)$$

- **Transformation Δ-Y**

$$\begin{cases} \bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_{12} \cdot \bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \\ \bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_{12} \cdot \bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \\ \bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_{31} \cdot \bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \end{cases} \quad (6.22)$$

Relation mnémotechnique pour le cas Δ -Y

$$\bar{Z}_Y = \frac{\text{Produit des Z adjacents du } \Delta}{\text{Somme des Z du } \Delta} \quad (6.23)$$

- **Charge triphasée équilibrée**

En supposant une charge équilibrée c'est-à-dire :

$$\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{23} = \bar{Z}_{31} = \bar{Z}_\Delta \quad \text{et} \quad \bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = \bar{Z}_Y$$

On obtient par les transformations de Kennely les relations suivantes :

$$\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_{12}(\bar{Z}_{31} + \bar{Z}_{23})}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{31} + \bar{Z}_{23}} \Rightarrow 2\bar{Z}_Y = \frac{\bar{Z}_\Delta(2\bar{Z}_\Delta)}{3\bar{Z}_\Delta} \Rightarrow \boxed{\bar{Z}_Y = \frac{\bar{Z}_\Delta}{3} \Rightarrow \bar{Z}_\Delta = 3\bar{Z}_Y} \quad (6.24)$$

Relation entre courants de ligne et courant de phase dans un couplage triangle de la charge triphasée équilibrée

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_{L_A} = \frac{\bar{V}_{AN}}{\bar{Z}_Y} \\ \bar{I}_{L_B} = \frac{\bar{V}_{BN}}{\bar{Z}_Y} \\ \bar{I}_{L_C} = \frac{\bar{V}_{CN}}{\bar{Z}_Y} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_{L_A} = \frac{3\bar{V}_{AN}}{\bar{Z}_\Delta} = 3 \frac{\left(\frac{\bar{V}_{AB}}{\sqrt{3}}\right)(1\angle - 30^\circ)}{\bar{Z}_\Delta} = \sqrt{3} \frac{\bar{V}_{AB}}{\bar{Z}_\Delta} (1\angle - 30^\circ) \\ \bar{I}_{L_B} = 3 \frac{\bar{V}_{BC}}{\sqrt{3}} (1\angle - 30^\circ) = \sqrt{3} \frac{\bar{V}_{BC}}{\bar{Z}_\Delta} (1\angle - 30^\circ) \\ \bar{I}_{L_C} = 3 \frac{\bar{V}_{CA}}{\sqrt{3}} (1\angle - 30^\circ) = \sqrt{3} \frac{\bar{V}_{CA}}{\bar{Z}_\Delta} (1\angle - 30^\circ) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_{L_A} = \sqrt{3} \bar{I}_{ph_A} (1\angle - 30^\circ) \\ \bar{I}_{L_B} = \sqrt{3} \bar{I}_{ph_B} (1\angle - 30^\circ) \\ \bar{I}_{L_C} = \sqrt{3} \bar{I}_{ph_C} (1\angle - 30^\circ) \end{array} \right.} \quad (6.25)$$

Remarque : En amplitude, le courant de ligne est donc $\sqrt{3}$ fois supérieure au courant de phase lorsque la charge est couplée en triangle. Les courants de lignes sont également en retard de 30° par rapport aux courants de phases.

Exemple d'application 2 : Calculez les phaseurs des courants de ligne et de phases pour un réseau triphasé à 600 V; la charge triphasée est couplée en triangle avec $\bar{Z}_\Delta = 55.2 + j23.4\Omega$.

Solution de l'exemple d'application

$$\bar{Z}_\Delta = 55.2 + j23.4\Omega \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Z = \sqrt{55.2^2 + 23.4^2} \approx 60 \Omega \\ \varphi = \arctan\left(\frac{23.4}{55.2}\right) \approx 23^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \bar{Z}_\Delta = 60\angle 23^\circ \Omega$$

Prenons \bar{V}_{AB} comme origine des phases, on aura alors :

$$\bar{V}_{AB} = 600\angle 0^\circ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_{BC} = 600\angle - 120^\circ \\ \bar{V}_{CA} = 600\angle + 120^\circ \end{array} \right.$$

Méthode 1 : On calcule d'abord le courant de phase ensuite, le courant de ligne.

Calculs des courants de phase : chaque charge élémentaire est alimentée par une tension de phase et donc :

$$\begin{cases} \bar{V}_{AB} = 600\angle 0^\circ \\ \bar{V}_{BC} = 600\angle -120^\circ \\ \bar{V}_{CA} = 600\angle +120^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_{phA} = \frac{\bar{V}_{AB}}{\bar{Z}_\Delta} = \frac{600\angle 0^\circ}{60\angle 23^\circ} = \boxed{10\angle -23^\circ A} \\ \bar{I}_{phB} = \frac{\bar{V}_{BC}}{\bar{Z}_\Delta} = \frac{600\angle -120^\circ}{60\angle 23^\circ} = \boxed{10\angle -143^\circ A} \\ \bar{I}_{phC} = \frac{\bar{V}_{CA}}{\bar{Z}_\Delta} = \frac{600\angle +120^\circ}{60\angle 23^\circ} = \boxed{10\angle 97^\circ A} \end{cases}$$

Déduction des courants de lignes : ils sont en retard de 30° et sont $\sqrt{3}$ fois plus élevée; ainsi on aura :

$$\begin{cases} \bar{I}_{LA} = \sqrt{3} \bar{I}_{phA} (1\angle -30^\circ) \\ \bar{I}_{LB} = \sqrt{3} \bar{I}_{phB} (1\angle -30^\circ) \\ \bar{I}_{LC} = \sqrt{3} \bar{I}_{phC} (1\angle -30^\circ) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_{LA} = 17.32\angle -53^\circ A \\ \bar{I}_{LB} = 17.32\angle -173^\circ A \\ \bar{I}_{LC} = 17.32\angle 67^\circ A \end{cases}$$

Méthode 2 : On calcule d'abord le courant de ligne et ensuite le courant de phase.

Pour cela, on calcule l'impédance équivalente en étoile :

$$\bar{Z}_Y = \frac{\bar{Z}_\Delta}{3} = \frac{60\angle 23^\circ}{3} = 20\angle 23^\circ \Omega$$

Si nous prenons toujours $\bar{V}_{AB} = 600\angle 0^\circ V$ (prise comme origine des phases).

$$\begin{cases} \bar{V}_{AB} = 600\angle 0^\circ \\ \bar{V}_{BC} = 600\angle -120^\circ \\ \bar{V}_{CA} = 600\angle +120^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_{AN} = \frac{\bar{V}_{AB}}{\sqrt{3}} (1\angle -30^\circ) = 346.41\angle -30^\circ \\ \bar{V}_{BN} = \frac{\bar{V}_{BC}}{\sqrt{3}} (1\angle -30^\circ) = 346.41\angle -150^\circ \\ \bar{V}_{CN} = \frac{\bar{V}_{CA}}{\sqrt{3}} (1\angle -30^\circ) = 346.41\angle 90^\circ \end{cases}$$

Dans ce cas, on aura les courants de ligne comme suit :

$$\begin{cases} \bar{I}_{LA} = \frac{\bar{V}_{AN}}{\bar{Z}_Y} \\ \bar{I}_{LB} = \frac{\bar{V}_{BN}}{\bar{Z}_Y} \\ \bar{I}_{LC} = \frac{\bar{V}_{CN}}{\bar{Z}_Y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_{LA} = \frac{346.41\angle -30^\circ}{20\angle 23^\circ} = \boxed{17.32\angle -53^\circ A} \\ \bar{I}_{LB} = \frac{346.41\angle -150^\circ}{20\angle 23^\circ} = \boxed{17.32\angle -173^\circ A} \\ \bar{I}_{LC} = \frac{346.41\angle 90^\circ}{20\angle 23^\circ} = \boxed{17.32\angle 67^\circ A} \end{cases}$$

Calculs des courants de phases

Les courants de ligne sont **en retard de 30°** par rapport aux courants de phases et sont $\sqrt{3}$ fois supérieure aux courants de phase. Ainsi :

$$\begin{cases} \bar{I}_{ph1} = \frac{\bar{I}_{LA}}{\sqrt{3}} (1\angle +30^\circ) = \boxed{10\angle -23^\circ A} \\ \bar{I}_{ph2} = \frac{\bar{I}_{LB}}{\sqrt{3}} (1\angle +30^\circ) = \boxed{10\angle -143^\circ A} \\ \bar{I}_{ph3} = \frac{\bar{I}_{LC}}{\sqrt{3}} (1\angle +30^\circ) = \boxed{10\angle 97^\circ A} \end{cases}$$

Exemple d'application 3

Une source triphasée équilibrée dont la tension de ligne est de 208 V alimente une charge triphasée d'impédance par phase $16 + j12 \Omega$. Prendre \bar{V}_{AB} comme origine des phases.

1. Calculez les phaseurs du courant de ligne si les impédances sont en étoile.
2. Calculez les phaseurs du courant de ligne si les impédances sont en triangle.

Solution de l'exemple

Puisque \bar{V}_{AB} est pris comme origine des phases, on aura:

$$\bar{V}_{AB} = 208 \angle 0^\circ \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_{BC} = 208 \angle -120^\circ \text{ V} \\ \bar{V}_{CA} = 208 \angle +120^\circ \text{ V} \end{cases}$$

Les tensions de lignes sont en avance de 30° par rapport aux tensions de phases correspondantes et ont une amplitude $\sqrt{3}$ fois supérieure et donc :

$$\begin{cases} \bar{V}_{AB} = 208 \angle 0^\circ \text{ V} \\ \bar{V}_{BC} = 208 \angle -120^\circ \text{ V} \\ \bar{V}_{CA} = 208 \angle +120^\circ \text{ V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_{AN} = 120 \angle -30^\circ \text{ V} \\ \bar{V}_{BN} = 120 \angle -150^\circ \text{ V} \\ \bar{V}_{CN} = 120 \angle +90^\circ \text{ V} \end{cases}$$

La forme polaire de l'impédance de charge par phase est :

$$\bar{Z} = 16 + j12 \Omega = 20 \angle 36.87^\circ \Omega$$

1. Courant de ligne si les impédances sont couplées en étoile

Dans ce cas, chaque impédance est soumise à la tension de phase et le courant de ligne est celui qui parcourt directement l'impédance ce qui donne par la loi d'Ohm :

$$\begin{cases} \bar{I}_{LA} = \bar{I}_{AY} = \frac{\bar{V}_{AN}}{\bar{Z}} = \frac{120 \angle -30^\circ}{20 \angle 36.87^\circ} = \boxed{6 \angle -66.87^\circ \text{ A}} \\ \bar{I}_{LB} = \bar{I}_{BY} = \frac{\bar{V}_{BN}}{\bar{Z}} = \frac{120 \angle -150^\circ}{20 \angle 36.87^\circ} = \boxed{6 \angle -186.87^\circ \text{ A}} \\ \bar{I}_{LC} = \bar{I}_{CY} = \frac{\bar{V}_{CN}}{\bar{Z}} = \frac{120 \angle +90^\circ}{20 \angle 36.87^\circ} = \boxed{6 \angle 53.13^\circ \text{ A}} \end{cases}$$

2. Courant de ligne si les impédances sont couplées en triangle

Dans ce cas, chaque impédance est soumise à la tension de ligne. On peut alors obtenir directement les **courants de phases** par la loi d'ohm comme suit

$$\begin{cases} \bar{I}_{phA} = \frac{\bar{V}_{AB}}{\bar{Z}} = \frac{208 \angle 0^\circ}{20 \angle 36.87^\circ} = 10.4 \angle -36.87^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_{phB} = \frac{\bar{V}_{BC}}{\bar{Z}} = \frac{208 \angle -120^\circ}{20 \angle 36.87^\circ} = 10.4 \angle -156.87^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_{phC} = \frac{\bar{V}_{CA}}{\bar{Z}} = \frac{208 \angle +120^\circ}{20 \angle 36.87^\circ} = 10.4 \angle 83.13^\circ \text{ A} \end{cases}$$

On trouve alors les courants de ligne comme suit :

$$\begin{cases} \bar{I}_{A\Delta} = \sqrt{3} \bar{I}_{phA} (1 \angle -30^\circ) \\ \bar{I}_{B\Delta} = \sqrt{3} \bar{I}_{phB} (1 \angle -30^\circ) \\ \bar{I}_{C\Delta} = \sqrt{3} \bar{I}_{phC} (1 \angle -30^\circ) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_{A\Delta} = \sqrt{3} (10.4 \angle -36.87^\circ) (1 \angle -30^\circ) = \boxed{18 \angle -66.87^\circ \text{ A}} \\ \bar{I}_{B\Delta} = \sqrt{3} (10.4 \angle -156.87^\circ) (1 \angle -30^\circ) = \boxed{18 \angle -186.87^\circ \text{ A}} \\ \bar{I}_{C\Delta} = \sqrt{3} (10.4 \angle 83.13^\circ) (1 \angle -30^\circ) = \boxed{18 \angle 53.13^\circ \text{ A}} \end{cases}$$

Puissances en triphasé

Puissance instantanée

Considérons une source triphasée équilibrée couplée en étoile et une charge triphasée équilibrée **purement résistive**. La puissance dissipée dans une charge élémentaire sur la première phase (phase A) sera :

$$p_A(t) = \frac{v_{AN}^2(t)}{R} = \frac{V_{mA}^2}{2R} (1 + \cos(2\omega t)) = \frac{V_{ph}^2}{R} (1 + \cos(2\omega t)) \quad (6.26)$$

Pour la 2^e et 3^e phase, on aura :

$$\begin{cases} p_B(t) = \frac{v_{BN}^2(t)}{R} = \frac{V_{ph}^2}{R} \left(1 + \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ p_C(t) = \frac{v_{CN}^2(t)}{R} = \frac{V_{ph}^2}{R} \left(1 + \cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \end{cases} \quad (6.27)$$

La puissance totale sera alors :

$$p(t) = p_A(t) + p_B(t) + p_C(t) = \frac{V_{ph}^2}{R} \left[3 + \underbrace{\cos(2\omega t) + \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)}_0 \right] \quad (6.28)$$

Ce qui donne alors :

$$p(t) = \frac{3V_{ph}^2}{R} = \text{Constante} \quad (6.29)$$

La figure montre le cas d'une charge résistive de 50Ω alimentés par une source triphasée de $208 V$. On y voit que la puissance sur chacune des phases fluctue avec une fréquence double de celle du réseau. Cependant la somme des puissances à un instant donné **reste constante**.

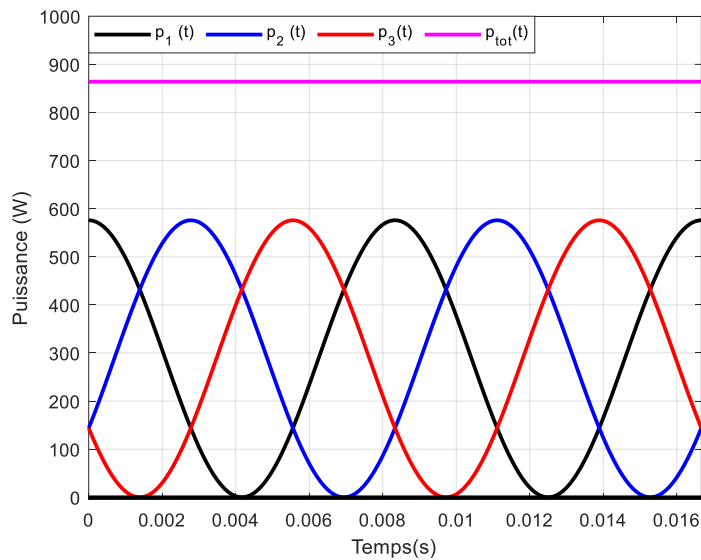


Figure 6.14. Puissance sur chaque phase et puissance totale dans un système triphasé équilibré.

Bilan de puissance pour une charge triphasée équilibrée

Dans cette partie, il sera considéré la puissance pour chaque élément de la charge triphasée (**puissance par phase**) afin de déterminer la **puissance totale** de la charge triphasée. Pour cela, posons l'impédance de phase comme suit : $\bar{Z} = Z \angle \varphi$.

Puissance réelle ou active

- ✓ Puissance réelle par phase

$$P_{\text{ph}} = V_{\text{ph}} \cdot I_{\text{ph}} \cos \varphi \quad (6.30)$$

- ✓ Puissance réelle sur les 3 phases :

$$P_{\text{tot}} = 3P_{\text{ph}} = 3V_{\text{ph}} \cdot I_{\text{ph}} \cos \varphi \quad (6.31)$$

Puissance réactive

De la même façon, on obtient pour les puissances réactives suivantes :

- ✓ Puissance réactive par phase

$$Q_{\text{ph}} = V_{\text{ph}} \cdot I_{\text{ph}} \sin \varphi \quad (6.32)$$

- ✓ Puissance réactive sur les 3 phases :

$$Q_{\text{tot}} = 3Q_{\text{ph}} = 3V_{\text{ph}} \cdot I_{\text{ph}} \sin \varphi \quad (6.33)$$

Puissance apparente totale

De la même façon, on obtient pour les puissances réactives suivantes :

$$\bar{S}_{\text{tot}} = P_{\text{tot}} + jQ_{\text{tot}} = 3\bar{V}_{\text{ph}_i} (\bar{I}_{\text{ph}_i})^* \quad (6.34)$$

i dans cette équation représente le numéro de phase. Le module de la puissance apparente vaudra alors :

$$S_{\text{tot}} = \sqrt{P_{\text{tot}}^2 + Q_{\text{tot}}^2} = 3V_{\text{ph}} \cdot I_{\text{ph}} \quad (6.35)$$

Analyse des cas Y et Δ

1^{er} cas : si la charge est **couplée en étoile**, on aura :

$$\begin{cases} V_{\text{ph}} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \\ I_{\text{ph}} = I_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{\text{tot}} = 3V_{\text{ph}} \cdot I_{\text{ph}} \cos \varphi = \sqrt{3}V_L \cdot I_L \cos \varphi \\ Q_{\text{tot}} = 3V_{\text{ph}} \cdot I_{\text{ph}} \sin \varphi = \sqrt{3}V_L \cdot I_L \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow S_{\text{tot}} = \sqrt{3}V_L \cdot I_L \quad (6.36)$$

2^e cas : si le charge est **couplée en triangle**, on aura :

$$\begin{cases} V_{\text{ph}} = V_L \\ I_{\text{ph}} = \frac{I_L}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{\text{tot}} = 3V_{\text{ph}} \cdot I_{\text{ph}} \cos \varphi = \sqrt{3}V_L \cdot I_L \cos \varphi \\ Q_{\text{tot}} = 3V_{\text{ph}} \cdot I_{\text{ph}} \sin \varphi = \sqrt{3}V_L \cdot I_L \sin \varphi \\ S_{\text{tot}} = \sqrt{3}V_L \cdot I_L \end{cases} \Rightarrow S_{\text{tot}} = \sqrt{3}V_L \cdot I_L \quad (6.37)$$

Remarque : indépendamment du couplage les formules encadrées dans les équations (6.36) et (6.37) restent vraies.

Facteur de puissance

$$FP = \cos \varphi = \frac{P_{\text{tot}}}{S_{\text{tot}}} = \frac{3P_{\text{ph}}}{3S_{\text{ph}}} = \frac{P_{\text{ph}}}{S_{\text{ph}}} \quad (6.38)$$

Avec φ qui aussi est le déphasage entre le courant qui parcourt un élément et la tension correspondante à ses bornes.

Exemple d'application 4

Pour le réseau de 208 V, ci-dessous (*Figure 6. 15*), la charge 1 est couplée en triangle avec $\bar{Z}_\Delta = 8 + j6 \Omega = 10 \angle 36,87^\circ \Omega$. La charge 2 est couplée en étoile avec : $\bar{Z}_Y = 12.7 \Omega$. Calculez le courant, la puissance réelle et la puissance réactive fournies par la source triphasée aux charges ci-dessous en parallèle.

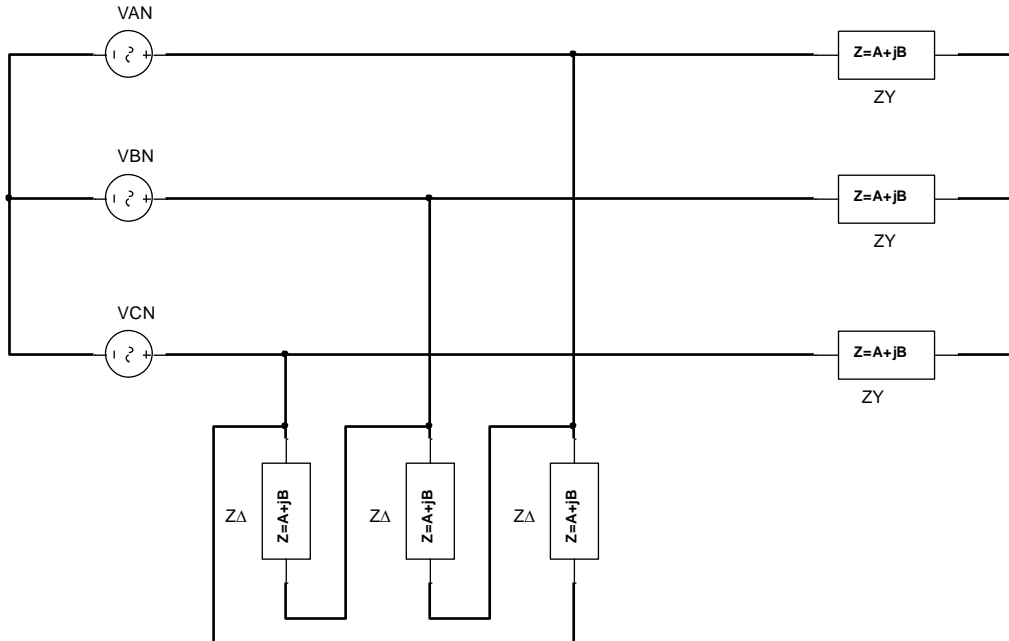


Figure 6. 15. Figure pour l'exemple d'application 4.

Solution de l'exemple

On peut ne pas utiliser des phaseurs dans cet exercice. Dans ce qui deux méthodes sont proposées mais la solution avec le bilan de puissance est recommandée.

Méthode du bilan de puissance.

- **Analyse de la charge couplée en triangle**

Son impédance est $Z_\Delta = 10 \Omega$ et elle est parcourue par les courants de phase dont la valeur efficace s'obtient comme suit :

$$I_{ph} = \frac{V_L}{Z_\Delta} = \frac{208}{10} = 20.8 \text{ A} \Rightarrow I_{L_\Delta} = I_{ph} \sqrt{3} = 36.027 \text{ A}$$

L'angle de l'impédance permet d'obtenir de facteur de puissance comme suit :

$$FP = \cos(36.87^\circ) = 0.8 \text{ retard}$$

On obtient alors la puissance réelle (active) de cette charge comme suit :

$$P_\Delta = \sqrt{3} V_L \cdot I_{L_\Delta} \cdot FP = \sqrt{3} \times 208 \times 36.027 \times 0.8 = 10383 \text{ W}$$

La puissance réactive de cette charge sera :

$$Q_\Delta = P_\Delta \tan \varphi = 10383 \times \tan(36.87^\circ) = 7787.5 \text{ var}$$

- **Analyse de la charge couplée en étoile.**

Elle est purement résistive avec une impédance de $Z_Y = 12.7 \Omega$. Dans un couplage étoile, chaque impédance est soumise à la tension de phase et directement parcourue par le courant de ligne. On obtient alors :

$$I_{LY} = \frac{V_{ph}}{Z_Y} = \frac{120}{12,7} \approx 9,45 \text{ A}$$

Le facteur de puissance est unitaire car cette charge est purement résistive. Ainsi on aura :

$$\begin{cases} P_Y = \sqrt{3}V_L \cdot I_{LY} \cdot FP = \sqrt{3} \times 208 \times 9,45 \times 1 = 3404,1 \text{ W} \\ Q_Y = 0 \text{ (car purement résistive)} \end{cases}$$

Le bilan de puissance donne alors :

$$\begin{cases} P_{\text{tot}} = P_{\Delta} + P_Y = 13787,5 \text{ W} \\ Q_{\text{tot}} = Q_{\Delta} + Q_Y = 7787,5 \text{ var} \end{cases} \Rightarrow S_{\text{tot}} = \sqrt{P_{\text{tot}}^2 + Q_{\text{tot}}^2} = 15833,3 \text{ VA}$$

$$FP = \frac{P_{\text{tot}}}{S_{\text{tot}}} = \frac{13785,8}{15833,3} = 0,87 \text{ retard}$$

Le courant de ligne se calcule comme suit :

$$S_{\text{tot}} = \sqrt{3}V_L \cdot I_L \Rightarrow I_L = \frac{S_{\text{tot}}}{\sqrt{3}V_L} = \frac{15833,3}{\sqrt{3} \times 208} = 43,949 \text{ A}$$

Méthode des phaseurs

Prenons \bar{V}_{AB} comme origine des phases, on aura alors $\bar{V}_{AB} = 208 \angle 0^\circ \text{ V}$, ce qui donne alors:

Pour la charge 1 en Δ

Chaque impédance est alimentée par une tension de ligne et on peut alors déterminer les courant de phases comme suit :

$$\begin{cases} \bar{V}_{AB} = 208 \angle 0^\circ \\ \bar{V}_{BC} = 208 \angle -120^\circ \\ \bar{V}_{CA} = 208 \angle +120^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_{phA} = \frac{\bar{V}_{AB}}{\bar{Z}_{\Delta}} = \frac{208 \angle 0^\circ}{10 \angle 36,87^\circ} = 20,8 \angle -36,87^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_{phB} = \frac{\bar{V}_{BC}}{\bar{Z}_{\Delta}} = \frac{208 \angle -120^\circ}{10 \angle 36,87^\circ} = 20,8 \angle -156,87^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_{phC} = \frac{\bar{V}_{CA}}{\bar{Z}_{\Delta}} = \frac{208 \angle +120^\circ}{10 \angle 36,87^\circ} = 20,8 \angle 83,13^\circ \text{ A} \end{cases}$$

Ce qui donne alors :

$$\begin{cases} P_{\Delta} = 3R_{\Delta}I^2 = 3 \times 8 \times (20,8)^2 = 10383,36 \text{ W} \\ Q_{\Delta} = 3X_{\Delta}I^2 = 3 \times 6 \times (20,8)^2 = 7787,52 \text{ var} \end{cases}$$

Pour la charge 2 en étoile

On aura chaque impédance est alimentée par la tension de phase correspondante, ce qui donne :

$$\begin{cases} \bar{V}_{AB} = 208 \angle 0^\circ \\ \bar{V}_{BC} = 208 \angle -120^\circ \\ \bar{V}_{CA} = 208 \angle +120^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_{AN} = 120 \angle -30^\circ \\ \bar{V}_{BN} = 120 \angle -150^\circ \\ \bar{V}_{CN} = 120 \angle +90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_{LA} = \frac{\bar{V}_{AN}}{\bar{Z}_Y} = \frac{120 \angle -30^\circ}{12,7} = 9,45 \angle -30^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_{LB} = \frac{\bar{V}_{BN}}{\bar{Z}_Y} = \frac{120 \angle -150^\circ}{12,7} = 9,45 \angle -150^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_{LC} = \frac{\bar{V}_{CN}}{\bar{Z}_Y} = \frac{120 \angle +90^\circ}{12,7} = 9,45 \angle 90^\circ \text{ A} \end{cases}$$

Et donc :

$$\begin{cases} P_Y = 3R_Y I^2 = 3 \times 12,7 \times (9,45)^2 = 3402,425 \text{ W} \\ Q_Y = 3X_Y I^2 = 0 \text{ var} \end{cases}$$

Bilan :

$$\begin{cases} P_{\text{tot}} = P_{\Delta} + P_Y = 13785.8 \text{ W} \\ Q_{\text{tot}} = Q_{\Delta} + Q_Y = 7787.52 \text{ var} \end{cases} \Rightarrow S_{\text{tot}} = \sqrt{P_{\text{tot}}^2 + Q_{\text{tot}}^2} = 15833.3 \text{ VA}$$

Facteur de puissance :

$$FP = \frac{P_{\text{tot}}}{S_{\text{tot}}} = \frac{13785.8}{15833.3} = 0.87 \text{ retard}$$

Phaseurs des courants de ligne

$$\bar{S}_{\text{tot}} = P_{\text{tot}} + jQ_{\text{tot}} = 13785.8 + j7787.52 = 15833.3 \angle 29.46^\circ$$

$$\bar{S}_{\text{tot}} = 3\bar{E}_1(\bar{I}_1)^* \Rightarrow \begin{cases} (\bar{I}_1)^* = \frac{\bar{S}_{\text{tot}}}{3\bar{E}_1} = \frac{15833.3 \angle 29.46^\circ}{3 \times 120 \angle -30^\circ} \approx 44 \angle 59.46^\circ \Rightarrow \bar{I}_{L1} = 44 \angle -59.46^\circ \text{ A} \\ (\bar{I}_2)^* = \frac{\bar{S}_{\text{tot}}}{3\bar{E}_2} = \frac{15833.3 \angle 29.46^\circ}{3 \times 120 \angle -150^\circ} \approx 44 \angle 179.46^\circ \Rightarrow \bar{I}_{L2} = 44 \angle -179.46^\circ \text{ A} \\ (\bar{I}_3)^* = \frac{\bar{S}_{\text{tot}}}{3\bar{E}_3} = \frac{15833.3 \angle 29.46^\circ}{3 \times 120 \angle +90^\circ} \approx 44 \angle -60.54^\circ \Rightarrow \bar{I}_{L3} = 44 \angle +60.54^\circ \text{ A} \end{cases}$$

Validation des résultats dans multisim

Sur la **Figure 6. 16**, on peut visualiser la valeur efficace réelle du courant de ligne dans multisim. La paramétrisation de la source triphasée est basée sur la tension de phase (ligne-neutre).

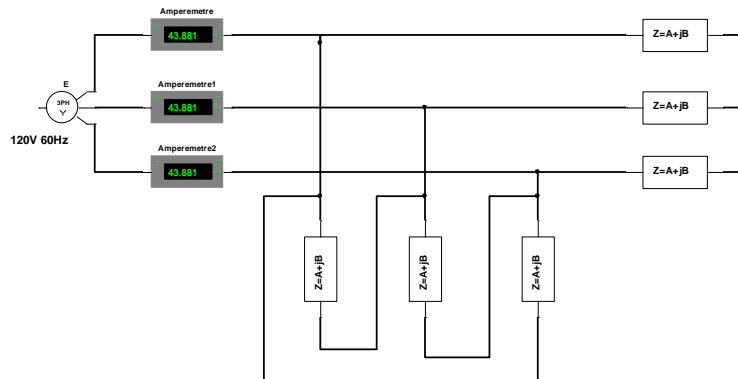


Figure 6. 16. Validation de la valeur efficace dans multisim

Les captures ci-dessous montrent les paramétrisations des impédances couplées en triangle et en étoile dans le logiciel.



Figure 6. 17. Paramétrisation de l'impédance de charge dans Multisim.

Compensation de l'énergie réactive

Comme dans le cas des installations monophasées, la problématique de l'amélioration du facteur de puissance s'impose. La technique est identique au cas monophasé; mais il faut utiliser **trois condensateurs** pouvant être raccordés en **triangle** ou en **étoile** comme montré sur la **Figure 6. 18**.

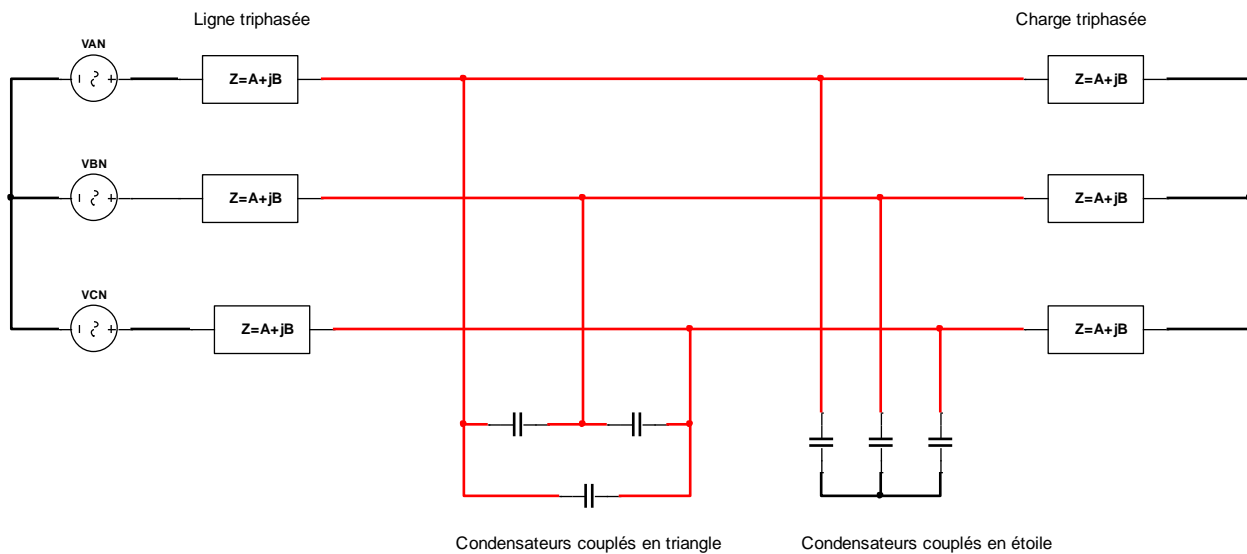


Figure 6. 18. Différents modes de couplage des condensateurs sur la ligne triphasée

Le bilan de puissance après compensation permet de déterminer la puissance réactive des condensateurs comme suit :

$$Q_C = Q_{apc} - Q_{avc} \quad (6.39)$$

Avec Q_{apc} qui est la puissance réactive restante **après** compensation et Q_{avc} la puissance réactive **avant** compensation. Ces puissances peuvent être déterminées directement à partir du triangle de puissance avant et après compensation.

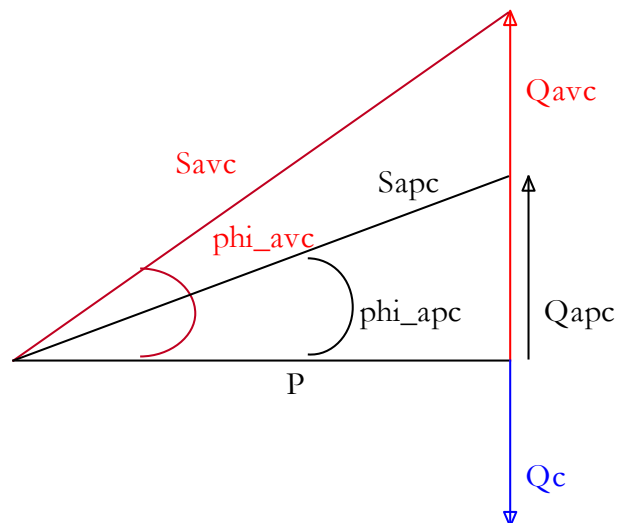


Figure 4. 1. Triangle de puissance avant et après compensation

De ce triangle, on obtient :

$$Q_C = P(\tan \varphi_{apc} - \tan \varphi_{avc}) \quad (6.40)$$

1^{er} cas : si les condensateurs sont couplés en **triangle** alors, chaque condensateur sera alimenté par la tension de ligne; ce qui donne :

$$Q_c = 3 \frac{V_L^2}{X_c} \Rightarrow X_c = 3 \frac{V_L^2}{Q_c} \Rightarrow \underbrace{X_c}_{\frac{1}{C_\Delta \omega}} = 3 \frac{V_L^2}{Q_c} \Rightarrow C_\Delta = -\frac{Q_c}{3\omega V_L^2} \quad (6.41)$$

2^e cas : si les condensateurs sont couplés en **étoile** alors, chaque condensateur sera alimenté par la tension de phase; ce qui donne :

$$Q_c = 3 \frac{V_{ph}^2}{X_c} \Rightarrow X_c = 3 \frac{\left(\frac{V_L}{\sqrt{3}}\right)^2}{Q_c} \Rightarrow \underbrace{X_c}_{\frac{1}{C_Y \omega}} = \frac{V_L^2}{Q_c} \Rightarrow C_Y = -\frac{Q_c}{\omega V_L^2} \quad (6.42)$$

Remarque : pour une même quantité de puissance à compenser sur un même réseau, on a : $C_Y = 3C_\Delta$.

Exemple d'application 5

On mesure la puissance consommée par une machine triphasée dont les phases sont équilibrées et on obtient : $P = 500 \text{ W}$, $Q = 1212.435 \text{ var}$. La tension du réseau triphasé est de 208 V.

1. Le récepteur est-il plutôt inductif ou capacitif ? Justifier votre réponse.
2. Quel est le facteur de puissance du récepteur ?
3. Quelle est la valeur du condensateur à connecter en étoile pour améliorer le facteur de puissance à 0,9 retard.

Solution de l'exemple

1. Nature du récepteur

Inductif car $Q > 0$

2. Facteur de puissance

$$FP = \frac{P}{S} \text{ avec } S = \sqrt{P^2 + Q^2} = S = \sqrt{(300)^2 + (1212,435)^2} = 1248.99 \approx 1249 \text{ VA} \Rightarrow FP = \frac{300}{1249} = 0.24$$

$$\boxed{FP = 0.24 \text{ retard}}$$

3. Amélioration du facteur de puissance.

Avec les données du problème, on aura :

$$\begin{cases} \varphi_{apc} = \arccos(0.9) = 25.842^\circ \\ \varphi_{avc} = \arccos(0.24) = 76.11^\circ \end{cases}$$

La puissance réactive du condensateur sera de :

$$Q_c = P(\tan \varphi_{apc} - \tan \varphi_{avc}) = 500(\tan 25.842^\circ - \tan 76.11^\circ) = -1780 \text{ var}$$

$$C_Y = -\frac{Q_c}{\omega V_L^2} = -\frac{-1780}{377 \times (208)^2} = \boxed{109.134 \mu\text{F}}$$

Fin du cours ici, la suite dans les exercices