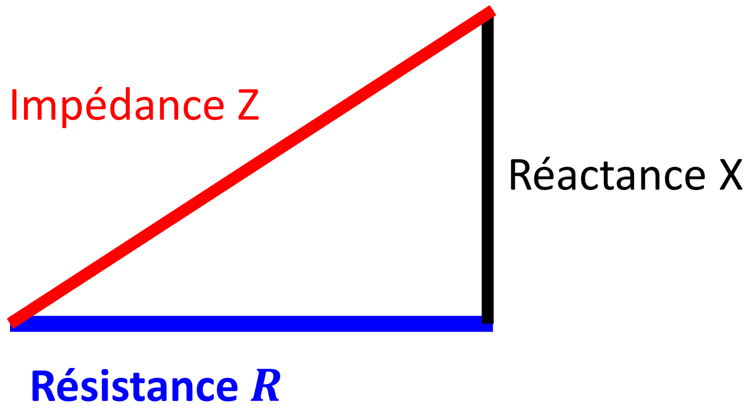
COURS 3: INSTALLATIONS ÉLECTRIQUES MONOPHASÉES

Cliquez ici pour la vidéo



POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Objectifs du cours 3

À l'issu de ce 3e cours, l'étudiant(e) sera en mesure de :

- ❑ **Identifier** une **forme d'onde sinusoïdale** et **mesurer ses caractéristiques**.
- ❑ **Déterminer** les **paramètres des tensions** et **courants sinusoïdaux**
- ❑ **Analyser** mathématiquement une onde sinusoïdale
- ❑ **Appliquer** la **loi d'Ohm** dans les **circuits alimentés en courant alternatif**.
- ❑ **Appliquer** les **lois de Kirchhoff** dans les **circuits alimentés en courant alternatif**.
- ❑ **Déterminer** les **impédances équivalentes**.

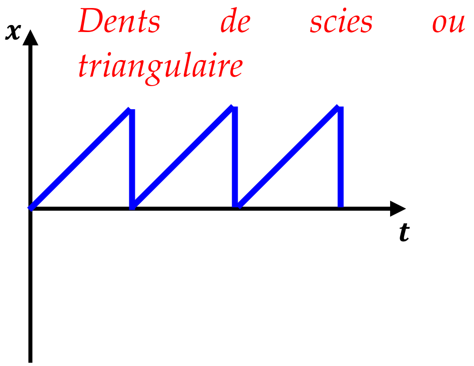
Plan du cours

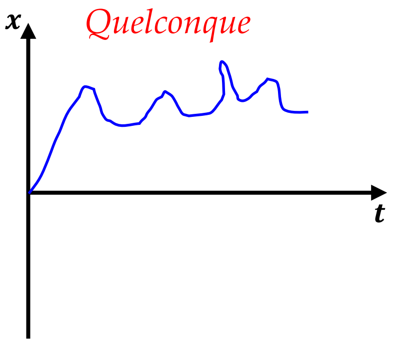
- ❑Constitution d'un circuit électrique
- ❑Le régime sinusoïdal monophasé
- ❑Les phaseurs
- ❑Impédances complexes

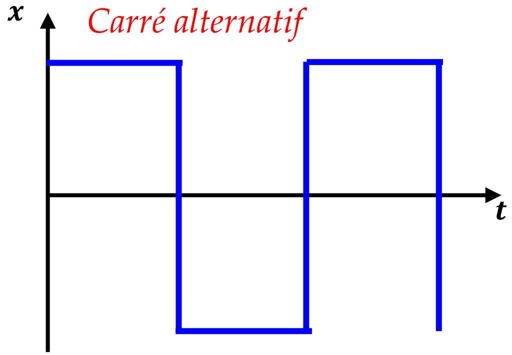
POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

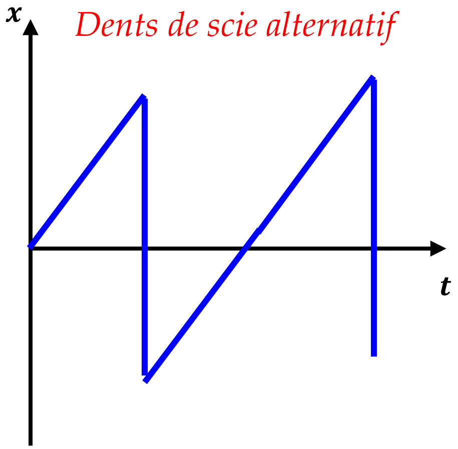
Mise en situation

- Dans le cours précédent, nous avons vu que le courant électrique est le mouvement d'ensemble des électrons libres dans un matériau conducteur soumis à une différence de potentiel (d.d.p.) aussi appelée tension électrique.
- La tension électrique peut-être **continue constante** ou alors **alternative** ou de façon plus générale **dépendante du temps**. Lorsque la tension appliquée à un composant électrique ou à une portion de circuit est **variable** alors, le courant qui y circule sera **variable également**.



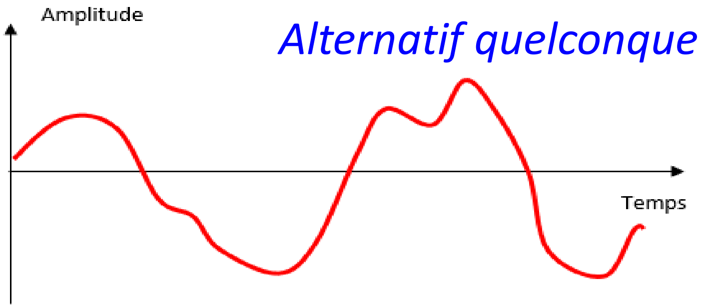






Définitions: *Alternatif et périodique*

- Un **signal alternatif** est un signal qui alterne entre le positif et le négatif.

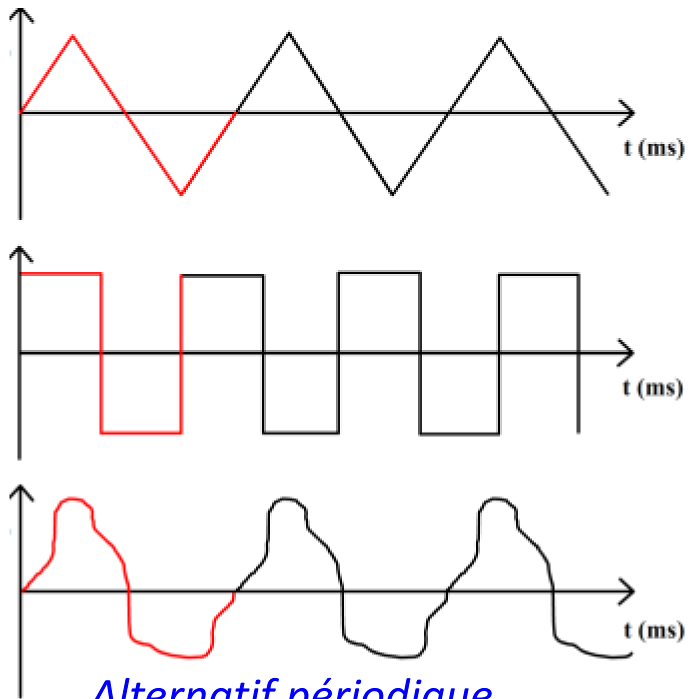


Alternatif quelconque

- Un **signal est périodique** s'il se répète identiquement à lui-même au bout d'un certain temps appelé période et noté $\boldsymbol{T}$. Le nombre de périodes par seconde est appelé fréquence et notée $\boldsymbol{f}$.

$$\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}$$

- T en **secondes (s)**.
- f en **hertz (Hz)**.

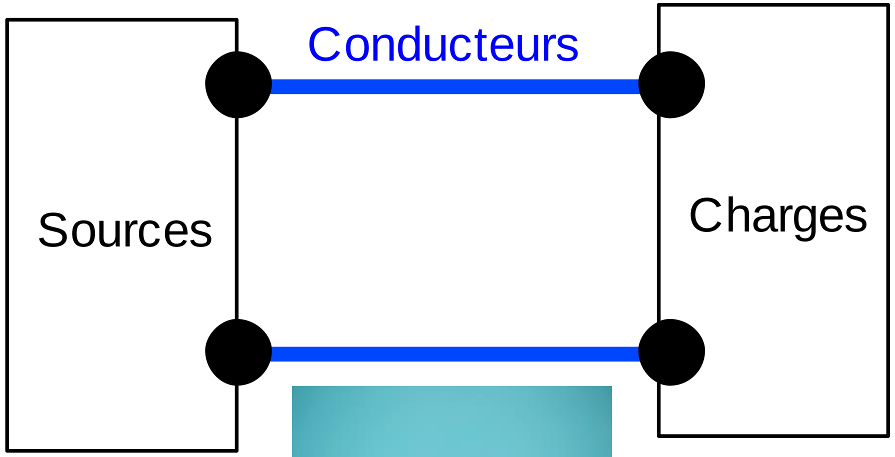


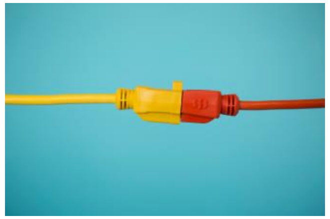
Alternatif périodique

Constitution d'un circuit électrique

Circuit électrique: interconnexion de plusieurs composants électriques dans lequel, on a un transfert d'énergie ou de puissance.

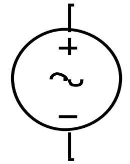
- ✓ **Source(s) fournissent l'énergie électrique**.
- ✓ **Charge(s) consomment l'énergie électrique**.
- ✓ **Conducteurs**: éléments de raccordement des sources aux charges.



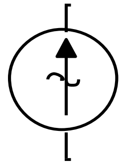


Constitution d’un circuit électrique: Sources de tension et de courant

- **Source de tension (idéale)**: dipôle actif présentant entre ses bornes une tension indépendante du courant débité.
  - ✓ Symbole: $v(t)$ pour une tension variable et V pour une tension constante
  - ✓ Unité: le volt (V).



Source sinusoïdale de tension

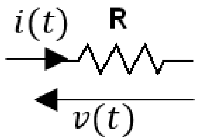


Source sinusoïdale de courant

- **Source de courant (idéale)**: dipôle actif débitant un courant électrique i indépendant de la tension e apparaissant à ses bornes.
  - ✓ Symbole: $i(t)$ pour un courant variable et I pour un courant constant
  - ✓ Unité: l’ampère (A).

Constitution d'un circuit électrique: Charges électriques de base

- **Résistance** : représente les effets d'échauffement dus au déplacement du courant électrique dans un conducteur.

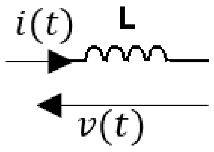


$$v(t) = Ri(t)$$

✓ Symbole: $\boldsymbol{R}$

✓ Unité: ohms (Ω).

- **Inductance** : représente les effets d'auto-induction dus à un courant variable dans un conducteur.



$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int v(u)du$$

✓ Symbole: L

✓ Unité: henrys (H).

- **Condensateur ou capacité** : représente les effets électrostatiques des charges constituants le courant .

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(u)du$$

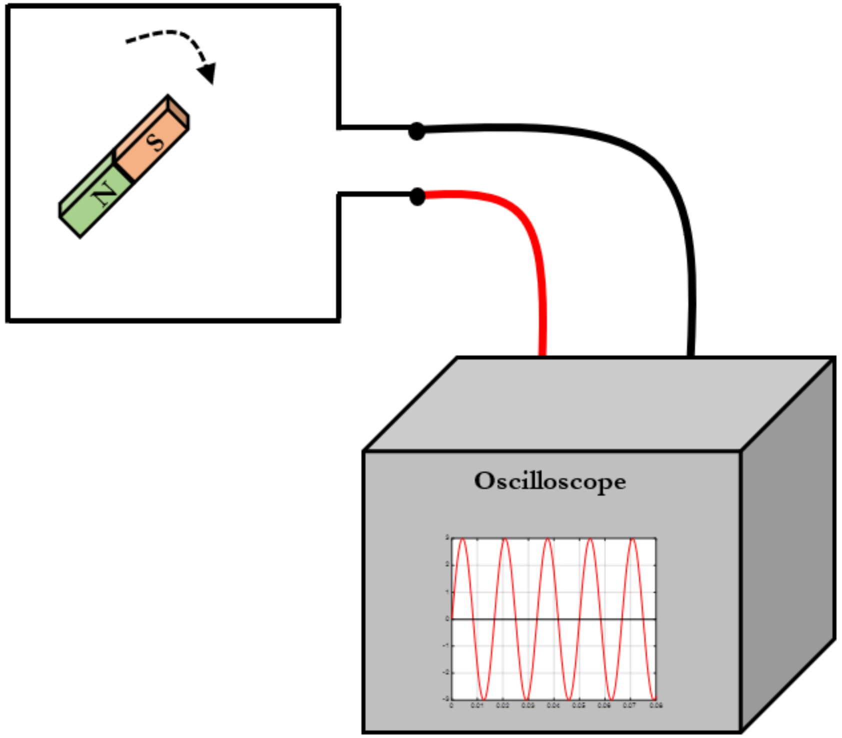
$$\Leftrightarrow i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

✓ Symbole: C

✓ Unité: farads (F).

Le régime sinusoïdal: *Avantages de la source sinusoïdale*

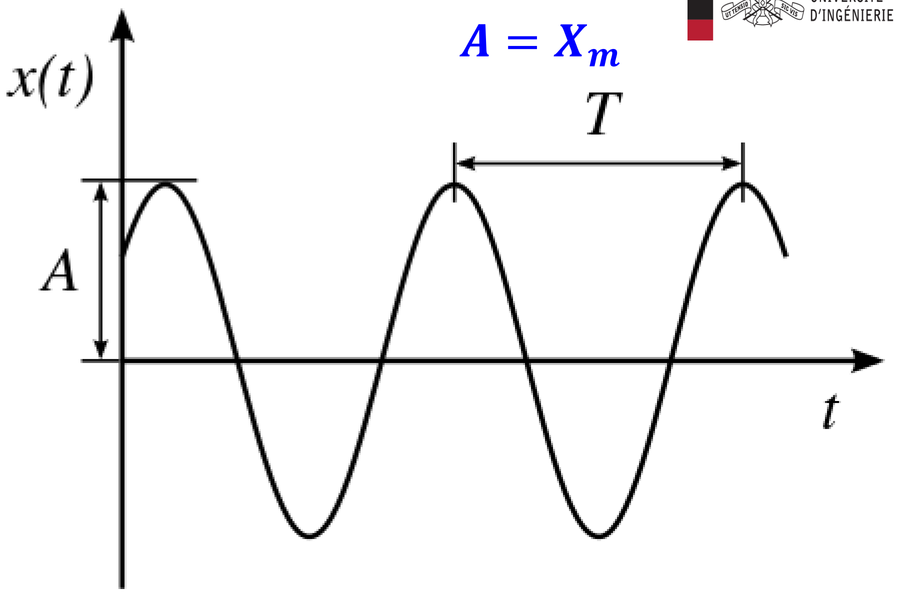
- La tension produite dans les systèmes de conversion électromécanique est sinusoïdale.
- La fonction sinusoïdale est la seule possédant une dérivée ou une intégrale analogue.
- Les sources sinusoïdales produisent moins d'interférence sur les lignes téléphoniques.
- Le rendement est meilleur dans les machines à courant alternatif (moins de pertes).
- Le couple est plus régulier durant le démarrage des machines électriques.



Le régime sinusoïdal: *Expression analytique*

- Un signal électrique $x(t)$ est dit **sinusoïdal** si son comportement dans le temps est défini par l'une des expressions suivantes :

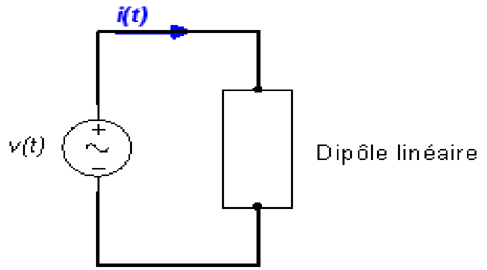
$$\boxed{\begin{cases} x(t) = X_m \cos(\omega t + \theta) \\ x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} ;\ \varphi = \theta + \frac{\pi}{2}}$$



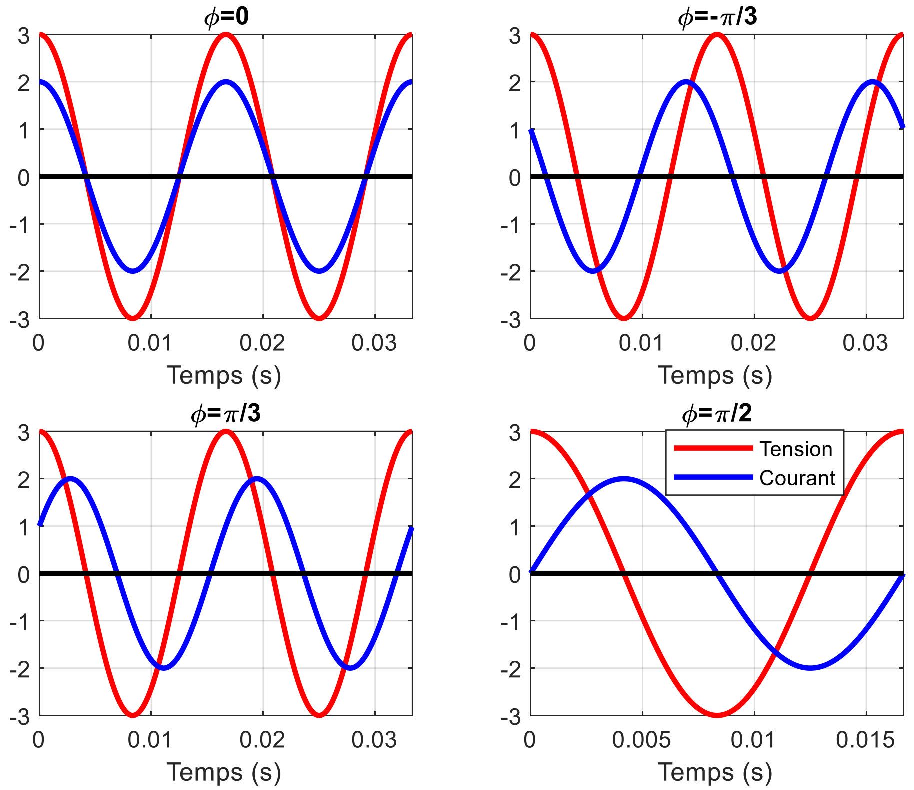
- $\boldsymbol{X_m}$: **valeur maximale** ou **amplitude** du signal
- $\boldsymbol{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$ en $\mathbf{rad/s}$: **pulsation** ou **fréquence angulaire** du signal.
- $\boldsymbol{\theta}$ ou $\boldsymbol{\varphi}$: **phase à l'origine (phase en rad** ou le °. **)** du signal $x(t)$.

- Dans le cadre de ce cours, nous adopterons la convention : $x(t) = X_m \cos(\omega t + \theta)$
- Une **tension sinusoïdale** sera $v(\boldsymbol{t})$ et dans le cas d'un **courant sinusoïdal**, on utilisera $\boldsymbol{i(t)}$.
- Lorsque la phase à l'origine $\boldsymbol{\theta}$ **est nulle**, on dit que la grandeur sinusoïdale est prise comme **origine des phases**.

Le régime sinusoïdal: *déphasage*



$$\begin{cases} v(t) = V_{\max}\cos(\omega t + \theta_v) \\ i(t) = I_{\max}\cos(\omega t + \theta_i) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi = \theta_v - \theta_i}$$



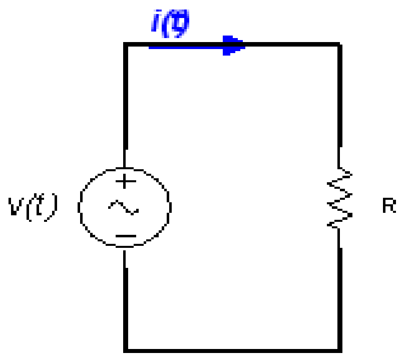
Note: on le ramènera toujours à sa valeur **principale comprise entre** $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$**.**

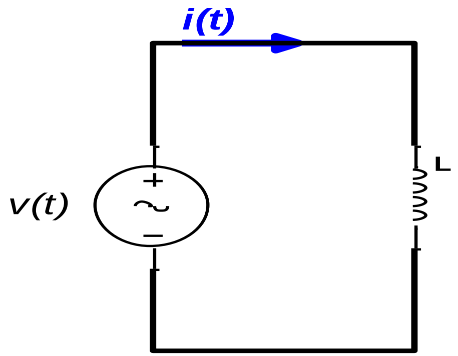
- $\varphi = 0$: Tension et courant en phase.
- $\varphi > 0$: Tension est en avance sur le courant.
- $\varphi < 0$: Tension est en retard sur le courant.
- $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$: Tension et courant en quadrature de phase.

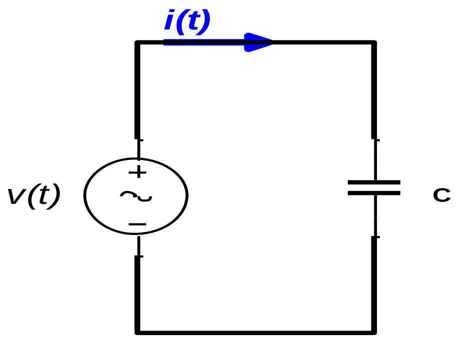
Le régime sinusoïdal: *déphasage et facteur de puissance (synthèse)*

- **Définition:** $FP = \cos(\varphi)$
- **Distinction** entre les cas $\varphi > 0$ du cas $\varphi < 0$

$$\begin{cases} FP = \cos(\varphi) \ \text{retard si } \varphi > 0 \\ FP = \cos(\varphi) \ \text{avance si } \varphi < 0 \end{cases}$$

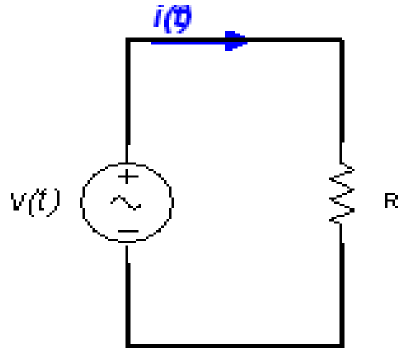




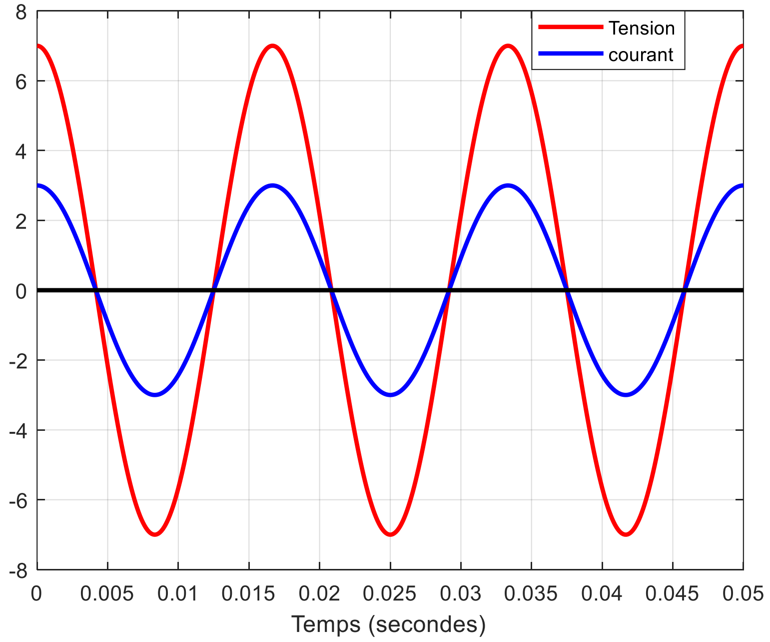


Le régime sinusoïdal: *déphasage dans le cas d'une résistance PURE R*

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}\ ;\ \ v(t) = V_{\max}\cos(\omega t + \theta_v) \Rightarrow i(t) = \underbrace{\frac{V_{\max}}{R}}_{I_{\max}}\cos\Big(\omega t + \underbrace{\theta_v}_{\theta_i}\Big)$$



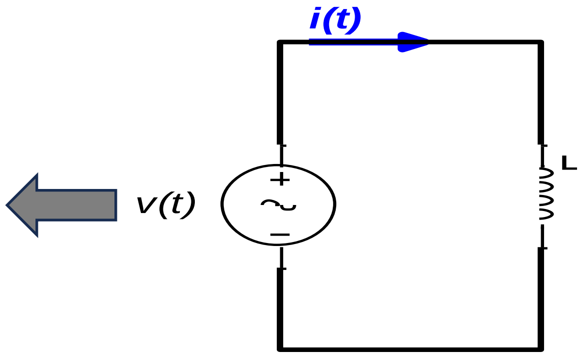
$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_{\max} = \dfrac{V_{\max}}{R} \\ \theta_i = \theta_v \end{cases} \Leftrightarrow \varphi_R = 0 \Rightarrow FP_R = 1$$



Le courant et la tension sont en phase pour une résistance.

Le régime sinusoïdal: *déphasage: cas d'une inductance PURE* L

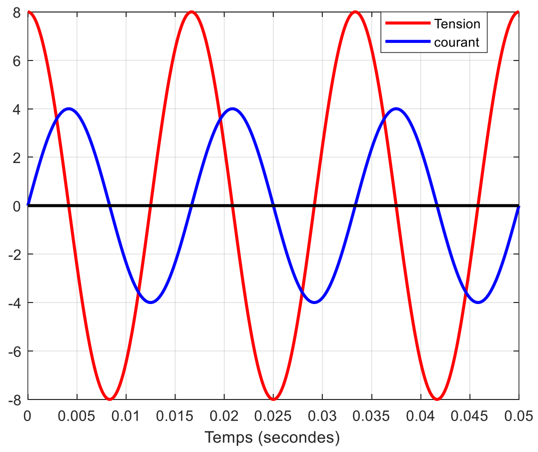
$$i(t) = \frac{1}{L}\int v(u)du \ ; \ \ v(t) = V_{\max}\cos(\omega t + \theta_v) \Rightarrow i(t) = \underbrace{\frac{V_{\max}}{L\omega}}_{I_{\max}}\sin(\omega t + \theta_v)$$



Rappel : $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

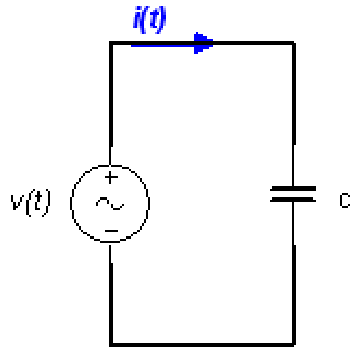
$$\Rightarrow i(t) = \underbrace{\frac{V_{\max}}{L\omega}}_{I_{\max}}\cos\left(\omega t + \underbrace{\theta_v - \frac{\pi}{2}}_{\theta_i}\right) \Rightarrow \begin{cases} I_{\max} = \dfrac{V_{\max}}{L\omega} \\ \theta_i = \theta_v - \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_L = \frac{\pi}{2} \Rightarrow FP_L = 0 \ \ \text{retard}$$

Pour une inductance pure, le courant est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension.



Le régime sinusoïdal: *déphasage : cas d'un condensateur PUR C*

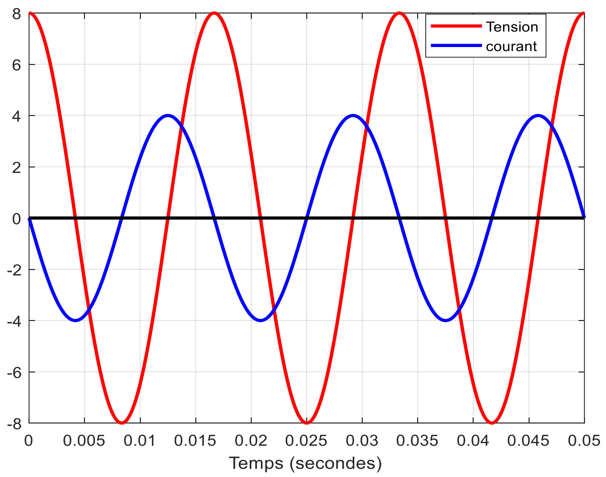
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}\ ;\ v(t) = V_{\max}\cos(\omega t + \theta_v) \Rightarrow i(t) = -\underbrace{C\omega V_{\max}}_{I_{\max}}\sin(\omega t + \theta_v)$$



Rappel : $-\sin(\alpha) = \sin(\alpha + \pi)\,;\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow i(t) = \underbrace{C\omega V_{\max}}_{I_{\max}}\cos\left(\omega t + \underbrace{\theta_v + \pi - \frac{\pi}{2}}_{\theta_i}\right) \Rightarrow \begin{cases} I_{\max} = C\omega V_{\max} \\ \theta_i = \theta_v + \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_C = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow FP_C = 0 \text{ avance}$$

Pour un condensateur pur, le courant est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension.



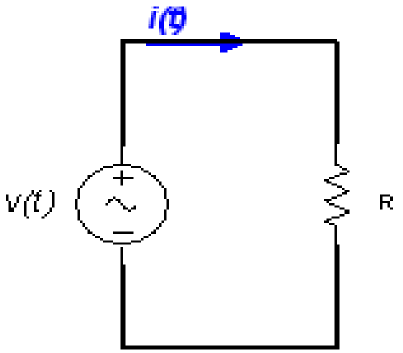
Le régime sinusoïdal: *déphasage et facteur de puissance* (*synthèse*)

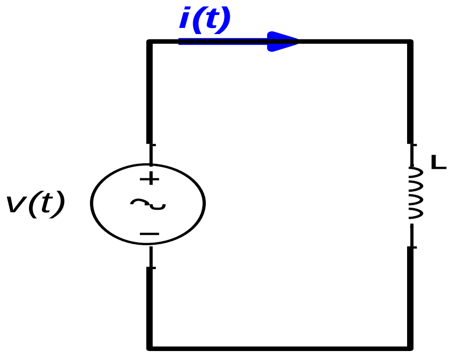
- ❑ $\boldsymbol{\varphi}$ et $\boldsymbol{FP}$ pour les composants R, L et C **PURS** (voir **page 7 sur 18** notes de cours 3)

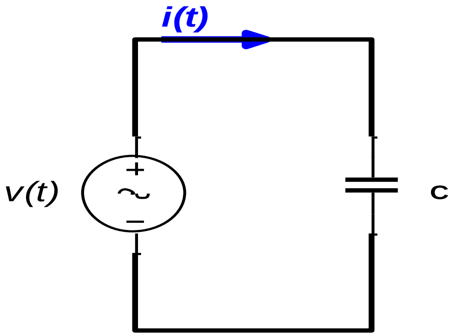
- ✓ $\varphi_R = 0 \Rightarrow FP_R = 1$

- ✓ $\varphi_L = \frac{\pi}{2} \Rightarrow FP_L = 0 \quad \text{retard}$

- ✓ $\varphi_C = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow FP_C = 0 \text{ avance}$







Le régime sinusoïdal: *valeur moyenne et valeur efficace*

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

❑ Valeur moyenne $X_{\mathbf{moy}}$

$$\langle x(t)\rangle = X_{\text{moy}} = \overline{X} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt$$

Exemple 1: Soit un signal $x(t) = X_m \cos(\omega t + \theta)$, sa valeur moyenne vaut :

$$\langle x(t)\rangle = X_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T X_m \cos(\omega t + \theta)\,dt = \frac{X_m}{T}\int_0^T \cos(\omega t + \theta)\,dt$$

$$= \frac{X_m}{T\omega}\underbrace{[\sin(\omega t + \theta)]_0^T}_{\mathbf{0}} = \boxed{\mathbf{0}}$$

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal est toujours **nulle**.

Le régime sinusoïdal: *valeur moyenne et valeur efficace*

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

❑ Valeur efficace X_{eff} ou X

$$X_{\text{eff}} = X = \sqrt{\langle (x(t))^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \left(x(t)\right)^2 dt}$$

Exemple 2: Expression de la valeur efficace de : $x(t) = X_m \cos(\omega t + \theta)$

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{\langle \left(x(t)\right)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \left(x(t)\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (X_m \cos(\omega t + \theta))^2 dt} = \sqrt{\frac{X_m^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(\omega t + \theta)\, dt}$$

$$= \sqrt{\frac{X_m^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\theta)}{2} dt}$$

$$\Rightarrow X_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{X_m^2}{2T} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} dt}_{T} \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\omega t + 2\theta)}_{0}} \Leftrightarrow X_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{X_m^2}{2}} \Rightarrow \boxed{X_{\text{eff}} = \frac{X_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow X_m = X_{\text{eff}}\sqrt{2}}$$

Remarque: une expression équivalente d'un signal sinusoïdal est alors :

$$x(t) = X_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta)$$

Le régime sinusoïdal: *Valeur efficace*

Les expressions d'une tension sinusoïdale et d'un courant sinusoïdal peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{cases} v(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_v) \\ i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_i) \end{cases}$$

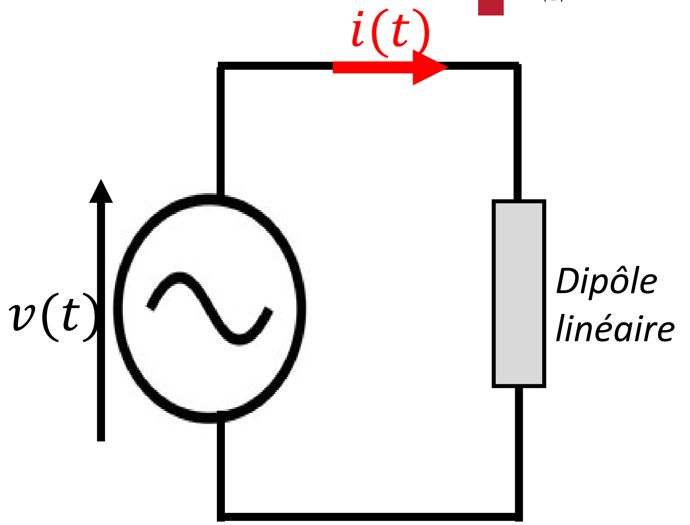
Notez-bien : sauf indication contraire, la valeur fournie pour une source sinusoïdale est sa valeur efficace. Ainsi, pour un réseau à $120\ V - 60\ Hz$, on identifiera : $\begin{cases} V = 120\ V \\ f = 60\ Hz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{\max} = 120\sqrt{2}\ V \\ \omega = 2\pi f \approx 377\ \mathrm{rad/s} \end{cases}$.

La signification de la valeur efficace sera fournie au **cours 4**; celle consacrée aux puissances mises en jeu dans un circuit alimenté en régime alternatif sinusoïdal.

Le régime sinusoïdal: *Impédance d'un dipôle*

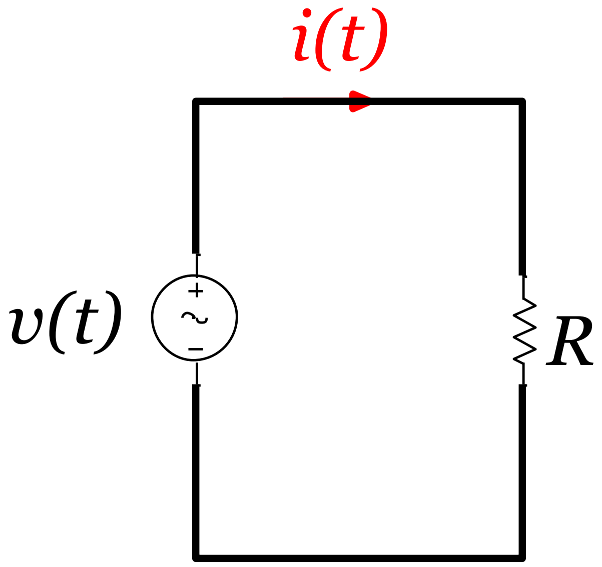
❑Définition

$$Z = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{V}{I}\ ;\ \begin{cases} V \text{ en volts } (V) \\ I \text{ en ampères } (A) \\ Z \text{ en ohms } (\Omega) \end{cases}$$



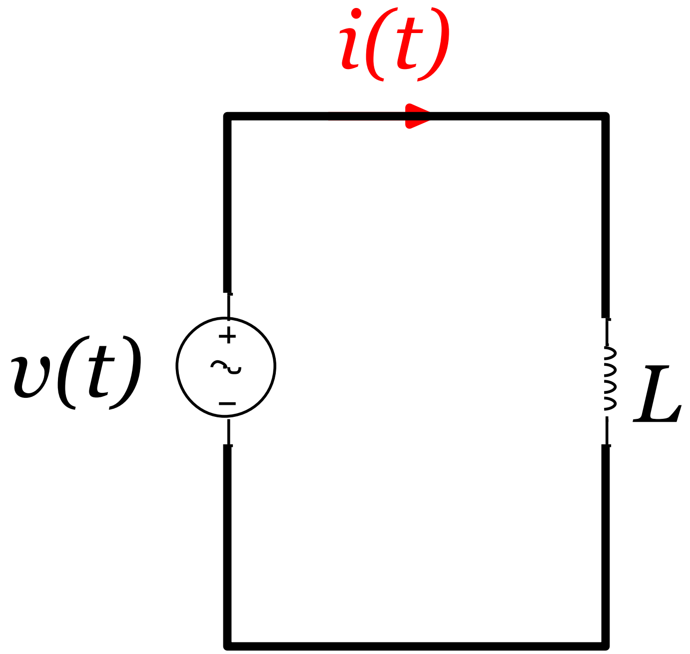
❑ Impédance d'une résistance pure

$$\begin{cases} v(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_v) \\ i_R(t) = \dfrac{v(t)}{R} = \underbrace{\dfrac{V}{R}}_{I_R}\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_v) \Rightarrow Z_R = \dfrac{V}{I_R} \Rightarrow \boxed{Z_R = R} \end{cases}$$



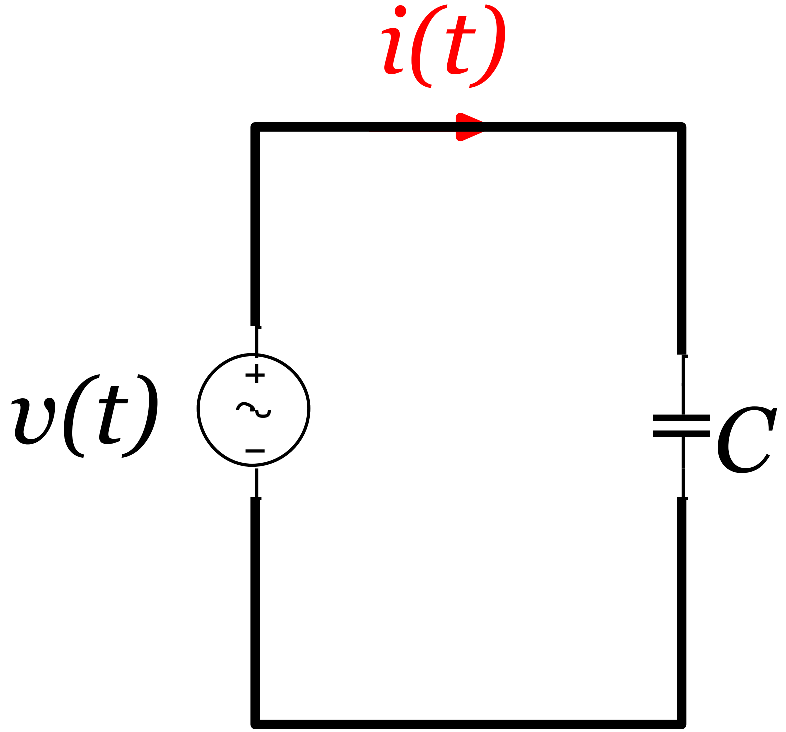
Le régime sinusoïdal: *Impédance d'une inductance pure*

$$\begin{cases} v(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_v) \\ i_L(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int v(u)du = \dfrac{V}{\underbrace{L\omega}_{I_L}}\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \theta_v - \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow Z_L = \dfrac{V}{I_L} \Rightarrow \boxed{Z_L = L\omega} \end{cases}$$



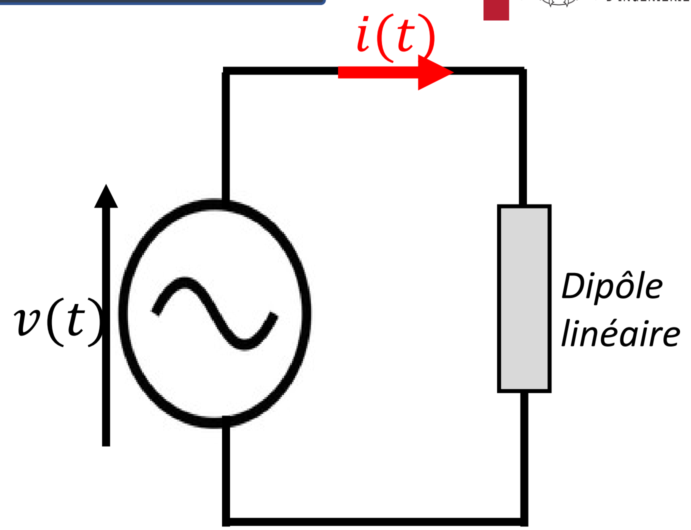
Le régime sinusoïdal: *Impédance d'une capacité pure*

$$\begin{cases} v(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_v) \\ i_C(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt} = \underbrace{C\omega V}_{I_C}\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \theta_v + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow Z_C = \frac{V}{I_C} \Rightarrow \boxed{Z_C = \frac{1}{C\omega}}$$



Le régime sinusoïdal: *Remarque sur l'impédance des dipôles L et C*

$$\begin{cases} Z_L = L\omega \\ Z_C = \dfrac{1}{C\omega} \end{cases}$$



<u>Remarque</u> : Les impédances des composants L et C varie selon la valeur de la pulsation ω.

Exemple d'application 1

On donne une tension $v(t) = 2\sqrt{2}\cos(377t + \pi/6)$. Cette tension est appliquée aux bornes d'un composant. Déterminez le courant qui traverse ce composant lorsqu'il s'agit :

- d'une résistance de $100\ \Omega$
- d'une bobine de $50\ mH$
- d'un condensateur de $50\ \mu F$

Solution 1

$$v(t) = 2\sqrt{2}\cos(377t + \pi/6) \Rightarrow \begin{cases} V = 2\ V \\ \omega = 377\ \text{rad/s} \end{cases}$$

- Pour la résistance : $Z_R = R = 100\ \Omega$ ce qui donne :

$$I_R = \frac{V}{Z_R} = \frac{2}{100} = \boxed{0.02\ A = 20\ mA}$$

- Pour la bobine, on aura $Z_L = L\omega = 50 \times 10^{-3} \times 377 = 18{,}85\ \Omega$ ce qui donne :

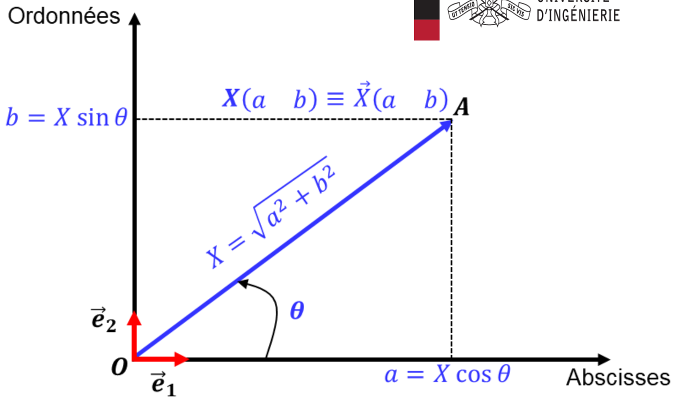
$$I_L = \frac{V}{Z_L} = \frac{2}{18.85} = \boxed{0.1\ A = 100\ mA}$$

- Pour le condensateur, on aura $Z_C = 1/C\omega = 1/(50 \times 10^{-6} \times 377) = 53.05\ \Omega$ ce qui donne :

$$I_C = \frac{V}{Z_C} = \frac{2}{53.05} = \boxed{0.04\ A = 40\ mA}$$

Les phaseurs: *représentation d'un vecteur dans un plan*

$$\begin{cases} \vec{X} = \boldsymbol{X} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 \text{ ou } X(a \quad b) \text{ ou } \boldsymbol{X}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \textbf{cartésienne ou algébrique} \\ \boldsymbol{X} = X(\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2) \Rightarrow \textbf{Trigonométrique} \\ \boldsymbol{X} = X\angle\theta = [X \quad \theta] \quad \Rightarrow \textbf{Polaire} \end{cases}$$



Nombres complexes

$$\overline{Z} = \boldsymbol{Z} = a + jb$$
$$= Z\cos\theta + jZ\sin\theta = [Z \quad \theta]$$
$$= Z\angle\theta \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} Z = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{cases} ; \\ \begin{cases} a = Z\cos\theta \\ b = Z\sin\theta \end{cases} \end{cases}$$
$$j^2 = -1$$

Vocabulaire :

- $a = \mathcal{R}_e(\overline{Z})$: partie réelle de $\overline{Z}$
- $b = \mathcal{I}_m(\overline{Z})$: partie imaginaire de $\overline{Z}$
- Z : module de $\overline{Z}$
- θ : argument de $\overline{Z}$
- $\boldsymbol{Z} = a + jb$: forme cartésienne ou algébrique
- $\boldsymbol{Z} = Z\angle\theta = Ze^{j\theta} = [Z \quad \theta]$: forme polaire.

Opérations :

- **Forme algébrique**

$$\begin{cases} \overline{Z}_1 = a_1 + jb_1 \\ \overline{Z}_2 = a_2 + jb_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \\ \overline{Z}_1 - \overline{Z}_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2) \end{cases}$$

- **Forme polaire**

$$\begin{cases} \overline{Z}_1 = Z_1\angle\theta_1 \\ \overline{Z}_2 = Z_2\angle\theta_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{Z}_1 \times \overline{Z}_2 = Z_1 \times Z_2\angle\theta_1 + \theta_2 = [Z_1.Z_2 \quad \theta_1 + \theta_2] \\ \dfrac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} = \dfrac{Z_1}{Z_2}\angle\theta_1 - \theta_2 = \left[\dfrac{Z_1}{Z_2} \quad \theta_1 - \theta_2\right] \end{cases}$$

Les phaseurs: *Définition et exemple d'application 2*

- Soit donné un signal électrique $x(t) = X_m \cos(\omega t + \theta)$. Ce signal est la partie réelle du complexe : $X_m e^{j(\omega t+\theta)}$.

$$x(t) = \mathcal{R}_e\left(X_m e^{j(\omega t+\theta)}\right) = \mathcal{R}_e\left(X_{\text{eff}}\sqrt{2}e^{j\omega t}e^{j\theta}\right)$$

- Considérons deux signaux électriques $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de même, fréquence f.

$$\begin{cases} x_1(t) = X_{m_1}\cos(\omega t + \theta_1) \\ x_2(t) = X_{m_2}\cos(\omega t + \theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \mathcal{R}_e\left(X_{\text{eff}_1}\sqrt{2}\boldsymbol{e^{j\omega t}}e^{j\theta_1}\right) \\ x_2(t) = \mathcal{R}_e\left(X_{\text{eff}_2}\sqrt{2}\boldsymbol{e^{j\omega t}}e^{j\theta_2}\right) \end{cases}$$

- **Remarque**: le terme $\sqrt{2}\boldsymbol{e^{j\omega t}}$ est commun aux deux signaux électriques. Ainsi avec une référence angulaire, la **valeur efficace** de chaque signal et sa **phase à l'origine** suffisent pour le caractériser. On appelle alors **phaseurs** des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les formes complexes respectives suivantes :

$$\begin{cases} \overline{X}_1 = X_{\text{eff}_1}e^{j\theta_1} = X_{\text{eff}_1}\angle\theta_1 = [X_{\text{eff}_1} \quad \theta_1] \\ \overline{X}_2 = X_{\text{eff}_2}e^{j\theta_2} = X_{\text{eff}_2}\angle\theta_2 = [X_{\text{eff}_2} \quad \theta_2] \end{cases}$$

Les phaseurs: *Définition et exemple d'application 2*

Écriture en phaseurs:

$$\begin{cases} x_1(t) = X_{m_1}\cos(\omega t + \theta_1) \\ x_2(t) = X_{m_2}\cos(\omega t + \theta_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{X}_1 = X_{\mathrm{eff}_1} e^{j\theta_1} = X_{\mathrm{eff}_1}\angle\theta_1 = [X_{\mathrm{eff}_1} \quad \theta_1] \\ \overline{X}_2 = X_{\mathrm{eff}_2} e^{j\theta_2} = X_{\mathrm{eff}_2}\angle\theta_2 = [X_{\mathrm{eff}_2} \quad \theta_2] \end{cases}$$

<u>Exemple d'application 2 & Solution</u>

Déterminez les phaseurs des tensions suivantes;

1. $v_1(t) = 5\cos\left(50\, t + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\boxed{\overline{V}_1 = 5/\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{3}}$$

2. $v_2(t)$ est une tension sinusoïdale de valeur efficace $3\, V$ et de phase nulle.

on lui associe alors directement le phaseur : $\boxed{\overline{V}_2 = 3\angle 0° = 3}$

3. $v_3(t)$ est un signal en créneaux d'amplitude 2 , de fréquence $100\, Hz$ et de phase $\frac{\pi}{2}$.

On ne lui associe pas de phaseur étant donné que les phaseurs sont réservés aux grandeurs sinusoïdales.

Les phaseurs: *Exemple d'application 3*

Question 1: Déterminez le phaseur de la tension $v(t) = 18\sin\left(377t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Il faut d'abord transformer le sinus en cosinus ce qui donne alors:

Rappel:

$$\sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow v(t) = 18\cos\left(377t + \frac{\pi}{3} - \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow v(t) = \left(\frac{18}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}\cos\left(377t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\boxed{\overline{V} = \frac{18}{\sqrt{2}}\angle -30° = 9\sqrt{2}\angle -30°}$$

Question 2: Déterminez l'expression temporelle du courant dont le phaseur est $\overline{I} = 5\angle + \frac{\pi}{2}$ pour une fréquence de $60\ Hz$.

$$\begin{cases} I_{\text{m}} = I_{\text{eff}} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \\ \omega = 2\pi f = 377\ rad/s \end{cases}$$

$$\boxed{i(t) = 5\sqrt{2}\cos\left(377t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Les phaseurs: *Impédances complexes*

❑ Impédance complexe :

$$\overline{Z} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} \quad \begin{cases} \overline{V} \text{ en volts } (V) \\ \overline{I} \text{ en ampères } (A) \\ \overline{Z} \text{ en ohms } (\Omega) \end{cases}$$

❑ Avec :

$$\begin{cases} \overline{V} = V\angle\theta_v \\ \overline{I} = I\angle\theta_i \end{cases} \Rightarrow \overline{Z} = \frac{V\angle\theta_v}{I\angle\theta_i} = \frac{V}{I}\angle\theta_v - \theta_i$$

<u>Remarque</u>:

$$\overline{Z} = \underbrace{\frac{V}{I}}_{Z}\angle\underbrace{\theta_v - \theta_i}_{\varphi} = Z\angle\varphi$$

L'**impédance** est le module de l'impédance complexe. L'**angle** de l'impédance complexe est le déphasage du courant $\boldsymbol{i}$ par rapport à la tension v.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

❑ Impédance complexe

$$\overline{Z} = R + jX$$

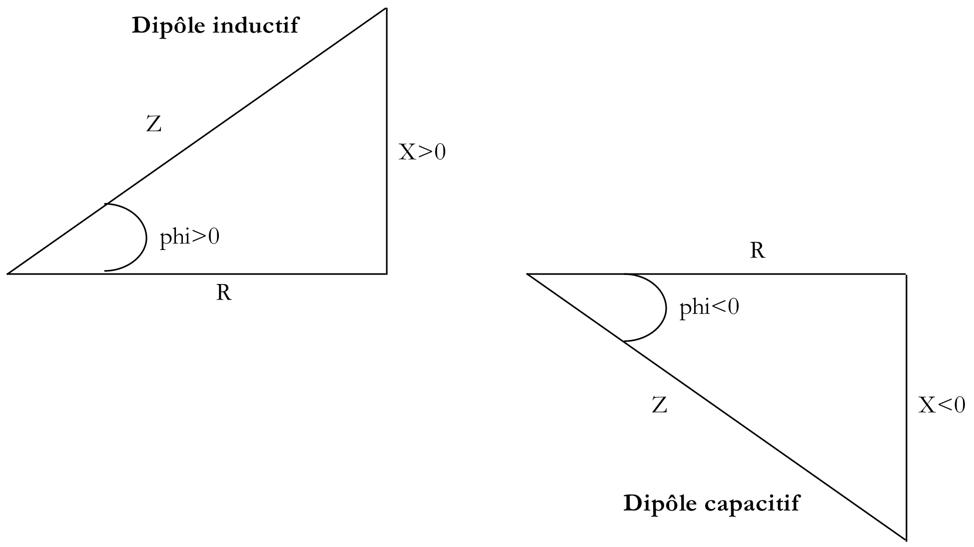
✓ **Résistance** :

$$R = \mathcal{R}_e(\overline{Z}) = \frac{V}{I}\cos\varphi = \frac{V}{I}\ FP$$

✓ **Réactance**:

$$X = \mathcal{I}_m(\overline{Z}) = \frac{V}{I}\sin\varphi$$

Triangle des impédances

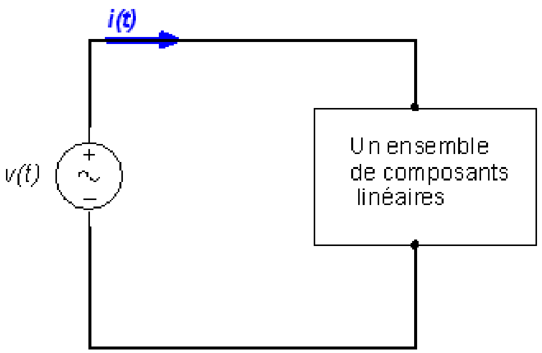


$$\begin{cases} R = Z\cos\varphi \\ X = Z\sin\varphi \end{cases} ; \quad \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{X}{R}\right) \end{cases}$$

Exemple d'application 4

Pour l'installation de la figure ci-dessous, on donne : $\begin{cases} v(t) = 110\sqrt{2}\cos(377t)\ V \\ i(t) = 20\sqrt{2}\cos(377t + 30°)\ A \end{cases}$

1. Calculez l'impédance complexe de l'installation.
2. Calculez le facteur de puissance de cette installation.
3. Calculez la résistance et la réactance, de cette installation.



Solution de l'exemple

$$\begin{cases} v(t) = 110\sqrt{2}\cos(377t)\ V \\ i(t) = 20\sqrt{2}\cos(377t + 30°)\ A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{V} = 110\ \angle 0°\ V \\ \overline{I} = 20\angle 30°\ \ A \end{cases}$$

Impédance complexe

$$\overline{Z} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{110\ \angle 0°}{20\angle 30°} = \frac{110}{20}\angle 0° - 30°$$

$$= \boxed{5.5\angle - 30°\ \Omega = 4.763 - 2.7j\ \Omega}$$

Facteur de puissance : de la question précédente, on identifie :

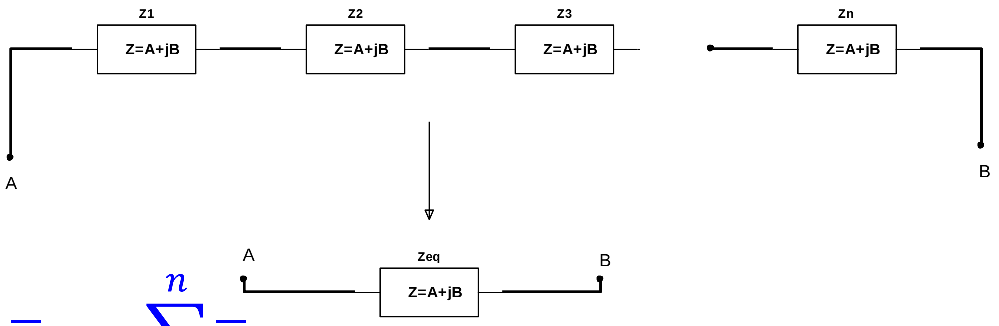
$$\varphi = -30° \Rightarrow \cos\varphi = 0.86 \Rightarrow \boxed{FP = 0.86\ \text{avance}}$$

Résistance et réactance

Par identification, on aura :

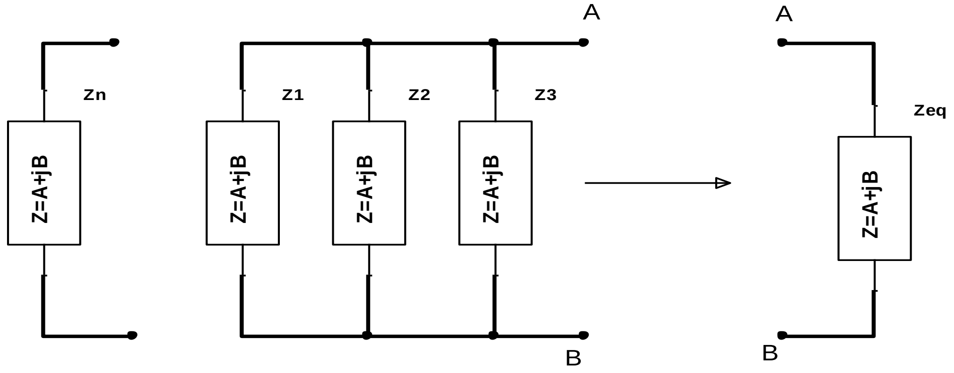
$$\overline{Z} = \underbrace{4.763}_{R}\ \underbrace{-2{,}7}_{X}j\ \Omega \Rightarrow \boxed{\begin{cases} R = 4.763\ \Omega \\ X = -2.7\ \Omega \end{cases}}$$

Les phaseurs: *Impédances complexes équivalentes*



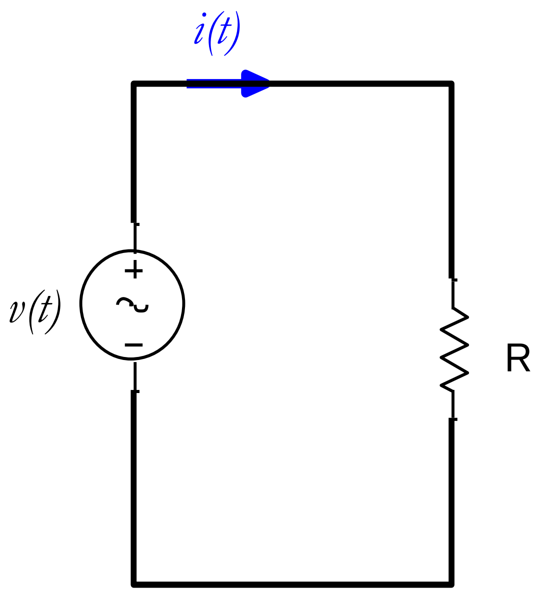
$$\overline{Z}_{eq} = \sum_{i}^{n} \overline{Z}_i$$

Attention !! Formules valables seulement en vecteurs ou phaseurs.



$$\overline{Z}_{eq} = \left(\sum_{i}^{n} \frac{1}{\overline{Z}_i}\right)^{-1}$$

Résistance



si $v(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t)$, on aura :

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V\sqrt{2}\cos(\omega t)}{R} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{I = \dfrac{V}{R}} \\ \boldsymbol{\theta_i = \theta_e = 0°} \end{cases}$$

- **Impédance**

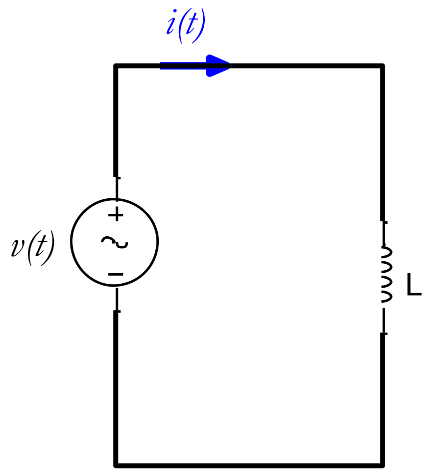
$$Z_R = \frac{V}{I} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Z_R = R}}$$

- **Impédance complexe**

$$\bar{Z}_R = \frac{\bar{\boldsymbol{V}}}{\bar{\boldsymbol{I}}} = \frac{V\angle 0°}{I\angle 0°} = \boxed{\boldsymbol{R\angle 0° = R}}$$

Inductance

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int v(u)\,du$$



Si $v(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t)$, on aura :

$$i(t) = \frac{V\sqrt{2}}{L}\int \cos(\omega u)\,du = \frac{V\sqrt{2}}{L\omega}\sin(\omega t) = \frac{V}{L\omega}\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Par identification, on obtient alors que : $\begin{cases} \boldsymbol{I = \frac{V}{L\omega}} \\ \boldsymbol{\theta_i = -90° = -\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

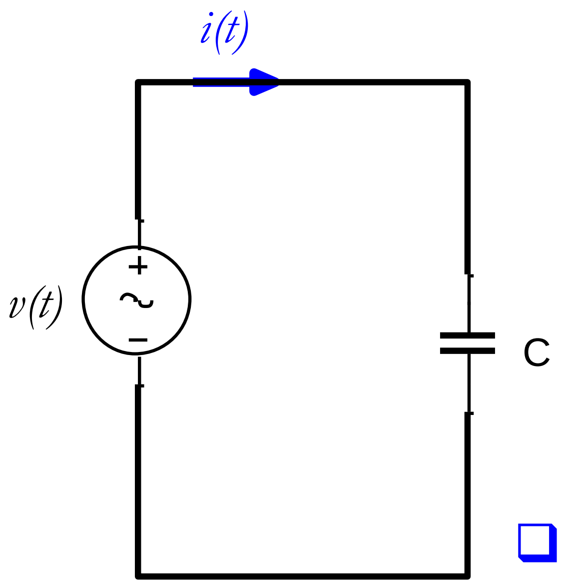
❑ Impédance

$$Z_L = \frac{V}{I} = \frac{V}{\frac{V}{L\omega}} = L\omega \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Z_L} = L\omega}$$

❑ Impédance complexe

$$\bar{Z}_L = \frac{\bar{\boldsymbol{V}}}{\bar{\boldsymbol{I}}} = \frac{V\angle 0°}{I\angle\theta_i} = \frac{V\angle 0°}{\frac{V}{L\omega}\angle -\frac{\pi}{2}} = \boxed{\boldsymbol{L\omega\angle\frac{\pi}{2} = jX_L}}$$

Condensateur



si $v(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t)$, on aura :

$$i(t) = CV\sqrt{2}\,\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = -C\omega V\sqrt{2}\sin(\omega t)$$

$$= C\omega V\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{I = C\omega V} \\ \boldsymbol{\theta_i = +90° = +\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

❑ Impédance

$$Z_C = \frac{V}{I} = \frac{V}{C\omega V} = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{Z_C = \frac{1}{C\omega}}}$$

❑ Impédance complexe

$$\overline{Z}_C = \frac{\overline{\boldsymbol{V}}}{\overline{\boldsymbol{I}}} = \frac{V\angle 0°}{I\angle\theta_i} = \frac{V\angle 0°}{C\omega V\angle + \frac{\pi}{2}} = \boxed{\boldsymbol{\frac{1}{C\omega}\angle - \frac{\pi}{2} = jX_C}}$$

❑ Impédance complexe d'une résistance pure

$$\overline{Z}_R = R\angle 0° = R$$

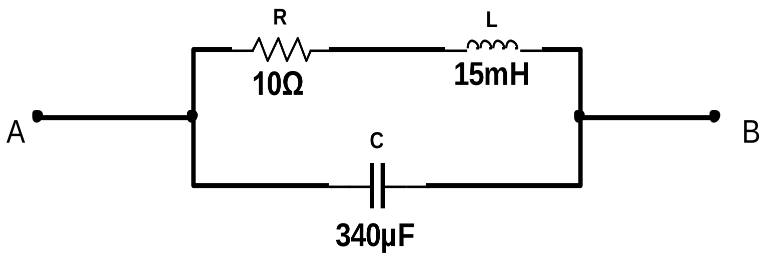
❑ Impédance complexe d'une inductance pure

$$\begin{cases} \overline{Z}_L = L\omega\angle\dfrac{\pi}{2} = jL\omega = jX_L \\ X_L = L\omega \end{cases}$$

❑ Impédance complexe d'un condensateur pur

$$\begin{cases} \overline{Z}_C = \dfrac{1}{C\omega}\angle -\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{-j}{C\omega} = jX_C \\ X_C = -1/C\omega \end{cases}$$

Exemple d'application 5: Calculez pour le circuit ci-dessous, la résistance et la réactance, du dipôle pour une fréquence de $60\ Hz$.



Solution de l'exemple

$$f = 60\ Hz \Rightarrow \omega = 377\ \text{rad/s}$$

$$\begin{cases} X_L = L\omega = 15 \times 10^{-3} \times 377 = 5.655\ \Omega \\ X_C = -\dfrac{1}{C\omega} = -\dfrac{1}{340 \times 10^{-6} \times 377} = -7.8\ \Omega \end{cases}$$

- L et R sont en série l'impédance équivalente $\overline{Z}_{eq_1}$ pour cette partie sera:

$$\overline{Z}_{eq_1} = \overline{Z}_R + \overline{Z}_L = R + jX_L = 10 + j5.655\ \Omega$$
$$= 11.5\angle 29.5°\ \Omega$$

- L'impédance complexe du condensateur est définie par :

$$\overline{Z}_C = jX_C = -j7.8\ \Omega = 7.8\angle -90°\ \Omega$$

- $\overline{Z}_{eq_1}$ et $\overline{Z}_C$ sont en parallèle, ainsi en utilisant la méthode du produit divisé par la somme, on obtient :

$$\overline{Z}_{eq} = \frac{\overline{Z}_{eq_1} \times \overline{Z}_C}{\overline{Z}_{eq_1} + \overline{Z}_C} = \frac{(11.5\angle 29.5°)(7.8\angle -90°)}{(10 + j5.655) - j7.8} = \frac{89.7\angle -60.5°}{10 - j2.145}$$
$$= \frac{89.7\angle -60{,}5°}{10.227\angle -12{,}106°} = 8.77\angle -48.394°\ \Omega$$

Ainsi :

$$\overline{Z}_{eq} = 8.77\angle -48.394°\ \Omega = 5.823 - j6.557\ \Omega \Rightarrow \boxed{\begin{cases} R = 5.823\ \Omega \\ X = -6.557\ \Omega \end{cases}}$$

Nature d’un dipôle en fonction de son impédance

De façon générale, on aura pour un dipôle linéaire quelconque :

$$\overline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{jX}$$

- R résistance du dipôle
- X réactance du dipôle

- **Purement résistive** si $\boldsymbol{X = 0}$.
- **Purement capacitive** si $\boldsymbol{R = 0}$ et $\boldsymbol{X < 0}$.
- **Purement inductive** si $\boldsymbol{R = 0}$ et $\boldsymbol{X > 0}$.
- **Capacitive** si $\boldsymbol{R > 0}$ **et** $\boldsymbol{X < 0}$
- **Inductive** si $\boldsymbol{R > 0}$ et $\boldsymbol{X > 0}$

Exemple d’application : Complétez la nature de la charge

1. $\overline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{3 - j5\ \Omega}$ ______________________________

2. $\overline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{+j99\ \Omega}$ _________________________________

3. $\overline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{5\ \Omega}$ __________________________________

4. $\overline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{3 + j5\ \Omega}$ _________________________

5. $\overline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{-j99\ \Omega}$ ___________________________

Étapes pour déterminer l'expression temporelle du courant dans un circuit alimenté en CA

Étape 1 : Remplacer chacun des éléments par son impédance complexe. On rappelle que :

$$\begin{cases} \overline{Z}_R = R = R\angle 0° \\ \overline{Z}_L = jX_L = X_L\angle +90° \\ \overline{Z}_C = jX_C = |X_C|\angle -90° \end{cases}$$

Étape 2 : Trouver l'impédance complexe équivalente

$$\overline{Z}_{EQ} = \sum_{i=1}^{n} \overline{Z}_i \text{ ou } \overline{Z}_{EQ} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{Z}_i}\right)^{-1}$$

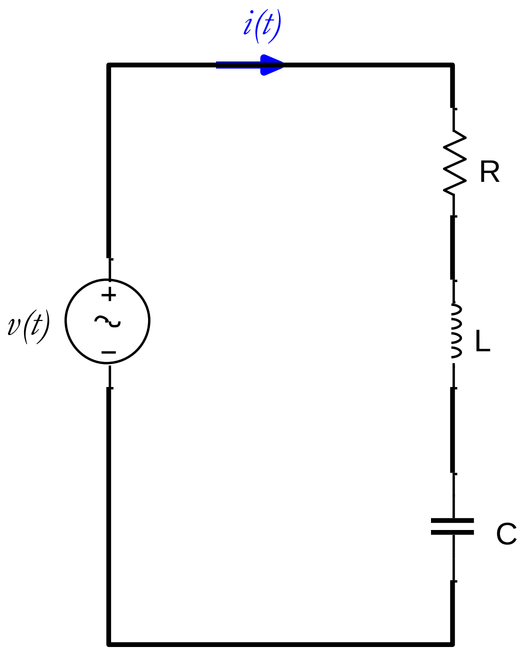
Étape 3 : Trouver le phaseur du courant comme suit :

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_{EQ}} = \frac{V\angle 0°}{\overline{Z}_{EQ}} = I\angle\theta_i$$

Étape 4 : Expression temporelle du courant :

$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_i)$$

Application: Analyse d'un circuit RLC série



Étape 1: Impédance totale

$$\overline{Z}_{\mathrm{tot}} = \overline{Z}_{\mathrm{eq}} = \overline{Z}_R + \overline{Z}_L + \overline{Z}_C = R + j(X_L + X_C)$$

$$= \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2} \angle \arctan\left(\frac{X_L + X_C}{R}\right)$$

Étape 2: Phaseur du courant

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{V\angle 0°}{\sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2} \angle \arctan\left(\frac{X_L + X_C}{R}\right)}$$

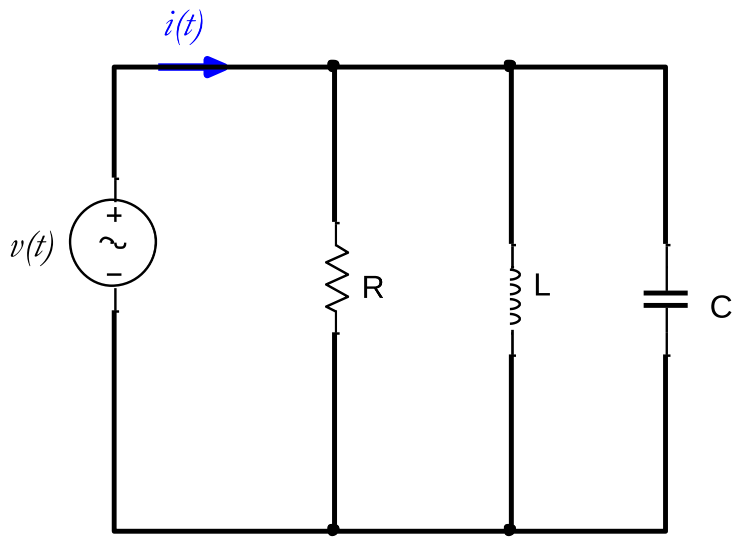
$$\Rightarrow \overline{I} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}} \angle 0 - \arctan\left(\frac{X_L + X_C}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\boldsymbol{I}} = \frac{\boldsymbol{V}}{\sqrt{\boldsymbol{R}^2 + (\boldsymbol{X}_L + \boldsymbol{X}_C)^2}} \angle -\mathbf{arctan}\left(\frac{\boldsymbol{X}_L + \boldsymbol{X}_C}{\boldsymbol{R}}\right)}$$

Étape 3: Expression temporelle du courant

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{V}}{\sqrt{\boldsymbol{R}^2 + (\boldsymbol{X}_L + \boldsymbol{X}_C)^2}} \sqrt{2}\cos\left(\boldsymbol{\omega t} - \mathbf{arctan}\left(\frac{\boldsymbol{X}_L + \boldsymbol{X}_C}{\boldsymbol{R}}\right)\right)$$

Application: Analyse d'un circuit RLC parallèle



❑ Étape 1: Impédance totale

$$\bar{Z}_{eq} = \left(\frac{1}{\bar{Z}_R} + \frac{1}{\bar{Z}_L} + \frac{1}{\bar{Z}_C}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \bar{Z}_{eq} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{jX_C}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \bar{Z}_{EQ} = \left(\frac{1}{R} - \frac{j}{X_L} - \frac{j}{X_C}\right)^{-1}$$

❑ Étape 2: Phaseur du courant

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{EQ}} = \bar{V} \times \left(\bar{Z}_{eq}\right)^{-1} = \bar{V}\left(\frac{1}{R} - \frac{j}{X_L} - \frac{j}{X_C}\right)$$

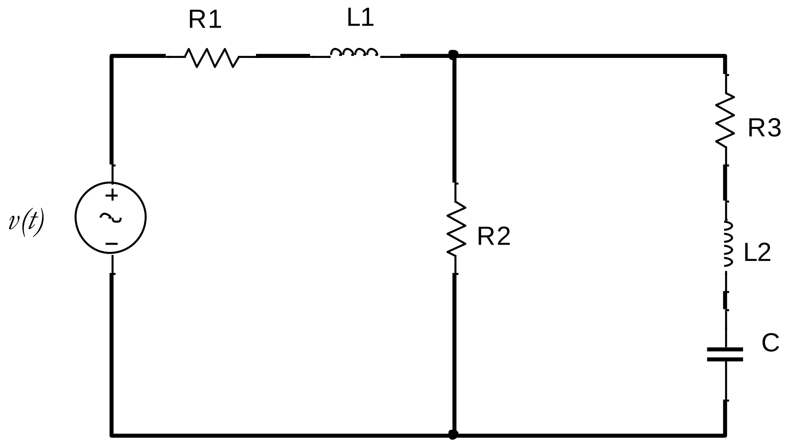
$$= V\left(\frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{X_C} + \frac{1}{X_L}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \bar{I} = V\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} + \frac{1}{X_L}\right)^2}\ \angle \arctan\left(\left(-\frac{\frac{1}{X_C} + \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}}\right)\right)$$

❑ Étape 3: Expression temporelle du courant

$$i(t) = V\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} + \frac{1}{X_L}\right)^2}\ \sqrt{2}\cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{R}{X_C} + \frac{R}{X_L}\right)\right)$$

Exemple d'application



Données: $v(t) = 170\cos(377\,t + \pi/3)$
$L_1 = 0.5\,mH;\ \ R_1 = 0.8\,\Omega, R_2 = 12\,\Omega;$
$L_2 = 25\,mH, R_3 = 5\,\Omega$ et $C = 663\,\mu F$

1. Trouvez la réactance de L1

$$f = 60\,Hz \Rightarrow \omega = 2\pi f \approx 377\ rad/s$$
$$X_{L1} = L_1 \times \omega = 0.5 \times 10^{-3} \times \mathbf{377} = \mathbf{0.188}$$

$$\boxed{\boldsymbol{X_{L_1} = 0.188\,\Omega}}$$

2. Trouvez la réactance de L2

$$X_{L2} = L_2 \times \omega = 25 \times 10^{-3} \times \mathbf{377} = \mathbf{9.42}$$

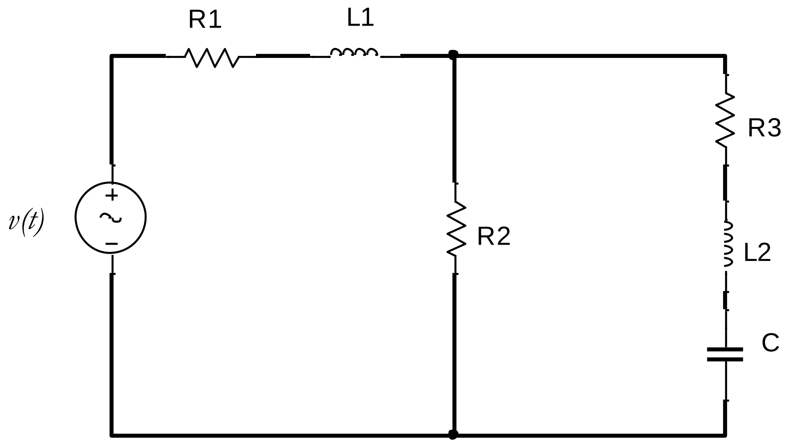
$$\boxed{\boldsymbol{X_{L_2} = 9.42\,\Omega}}$$

3. Trouvez la réactance de C

$$X_C = -\frac{1}{C\omega} = -\frac{1}{663 \times 10^{-6} \times 377} \approx \mathbf{-4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{X_C = -4\,\Omega}}$$

Exemple d'application



Données: $v(t) = 170\cos(377\,t + \pi/3)$
$L_1 = 0.5\,mH$; $R_1 = 0.8\,\Omega, R_2 = 12\,\Omega$;
$L_2 = 25\,mH, R_3 = 5\,\Omega$ et $C = 663\,\mu F$

4. Déterminez l'impédance complexe la branche R2

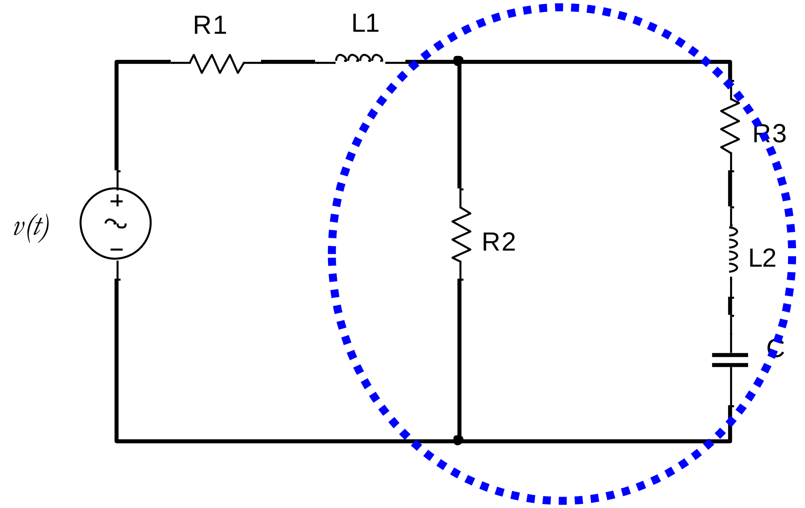
$$\boxed{\overline{Z}_{R_2} = 12\,\Omega}$$

5. Déterminez l'impédance complexe la branche R3-L2-C

$$\overline{Z}_{R3-L2-C} = \overline{Z}_{R3} + \overline{Z}_{L2} + \overline{Z}_{C} = 5 + j9.42 - 4j$$

$$\boxed{\overline{Z}_{R3-L2-C} = 5 + j5.42\,\Omega}$$

Exemple d'application



Données: $v(t) = 170\cos(377\,t + \pi/3)$
$L_1 = 0.5\,mH;\;\; R_1 = 0.8\,\Omega, R_2 = 12\,\Omega;$
$L_2 = 25\,mH, R_3 = 5\,\Omega$ et $C = 663\,\mu F$

6. Déterminez l'impédance complexe des deux branches en parallèle

- ❑ 1ere branche une seule résistance : $\overline{Z}_{R_2} = R_2 = \boldsymbol{R_2\angle 0° = 12\,\Omega}$
- ❑ 2e branche: $\overline{Z}_{R_3-L_2-C} = \boldsymbol{5 + j5.42\,\Omega}$

Forme polaire : $Z = \sqrt{5^2 + 5.42^2} = \boldsymbol{7.37}$; $\theta = \arctan\left(\frac{5.42}{5}\right) = 47.3° \Rightarrow \overline{Z}_{R_3-L_2-C} = \boldsymbol{7.37\angle 47.3°\,\Omega}$.

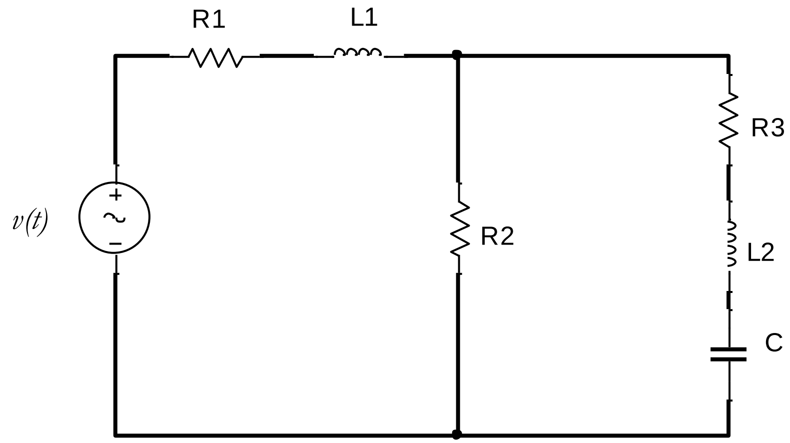
En parallèle :

$$\overline{Z}_{EQ1} = \left(\sum \frac{1}{\overline{Z}_i}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{7.37\angle 47.3°}\right)^{-1}$$

$$= \left(\underbrace{0.083 + \underbrace{0.135\angle -47.3°}_{\mathbf{0.091-j0.099}}}_{\mathbf{0.174-j0.099=0.2\angle-29.638°}}\right)^{-1} = 5\angle 29{,}638° = \boldsymbol{4.34 + j2.47}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\overline{Z}_{EQ1} = 4.31 + j2.45\,\Omega}}$$

Exemple d'application



Données: $v(t) = 170\cos(377\,t + \pi/3)$
$L_1 = 0.5\,mH;\;\; R_1 = 0.8\,\Omega, R_2 = 12\,\Omega;$
$L_2 = 25\,mH, R_3 = 5\,\Omega$ et $C = 663\,\mu F$

Merci pour votre aimable attention

À venir

Cours 4: Puissances en courant alternatif monophasé

7. Déterminer l'expression temporelle du courant débitée par la source

- L'impédance totale du circuit sera

$$\bar{Z}_{tot} = \underbrace{R_1 + jX_{L_1}}_{0.8+j0.188} + \underbrace{\bar{Z}_{EQ1}}_{4.31+j2.45} = 5{,}11 + j2{,}638 = 5{,}75\angle 27{,}3°$$

- La loi d'Ohm permet d'obtenir le phaseur du courant comme suit:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{tot}} = \frac{170/\sqrt{2}\angle 60°}{5.75\angle 27.3°} = 20.9\angle 60° - 27.3° = \underbrace{20.9}_{I_{\text{eff}}}\angle\underbrace{32.7°}_{\theta_i}$$

- Pa définition :

$$i(t) = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_i) = \mathbf{20.9 \times \sqrt{2} \times \cos(377t + 32.7°)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{i(t)} = \mathbf{29.55}\cos(377\,t + 32.68°)\;\; A}$$