

Théorème de Green

Théorème de Green. Soit C une courbe fermée, simple et lisse par morceaux du plan, orientée positivement. Soit D le domaine délimité par C .

Si P et Q sont des fonctions de deux variables ayant des dérivées partielles continues dans un voisinage de D alors

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Remarque:

Si le membre de droite est l'intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe, le théorème s'écrit :

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Théorème de Green : Exemples

- Soit le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 9$. Calculer

$$\oint_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$$

- Soit C la frontière du demi-anneau à l'intérieure du cercle $x^2 + y^2 = 4$ et à l'extérieure du cercle $x^2 + y^2 = 1$. Calculer

$$\oint_C y^2 dx + 3xy dy$$