Notes de cours de calcul II: Hiver 2024

MTH1102

Mohamed Ousmoï

École Polytechnique de Montréal

Deuxième partie : Intégrales curvilignes

- Courbes paramétrées
- Courbes et Mouvements
- Longueur d'arc et courbure
- Champs vectoriels
- Intégrales curvilignes
- Théorème fondamental des intégrales curvilignes
- Théorème de Green

Définition

Définition. Une *courbe paramétrée dans l'espace* est définie par une fonction vectorielle $\vec{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ qui associe à chaque valeur du paramètre t un point $\vec{r}(t)$ de l'espace.

Une telle courbe est décrite par

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

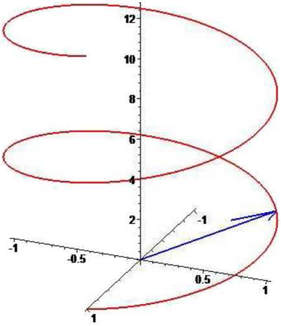
ou par ses équations paramétriques

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & f(t) \\ y(t) & = & g(t) \\ z(t) & = & h(t) \end{array} \right. , \quad a \leq t \leq b.$$

Exemple

- Une droite dans l'espace
- Un cercle dans un plan

Exemple



Hélice $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \leq t \leq 4\pi$ et vecteur position $\vec{r}(2\pi/3)$.

Vecteur tangent

Théorème. La dérivée de la fonction vectorielle $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ en un point t est donnée par

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Définition. Le *vecteur tangent (unitaire)* à la courbe $\vec{r}(t)$ au point $\vec{r}(t_0)$ est

$$\vec{T}(t_0) = \frac{\vec{r}\,'(t_0)}{||\,\vec{r}\,'(t_0)\,||}.$$

Exemple

Calculer un vecteur tangent en tout point pour

- une droite dans l'espace ;
- le cercle unitaire ;
- l'hélice de l'exemple plus haut.

Longueur d'une courbe (arc)

La longueur de la courbe définie par

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

avec $a \leq t \leq b$ est

$$L = \int_a^b ||\,\vec{r}\,'(t)\,||\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Exemple

Calculer la longueur de l'arc

- $\overrightarrow{r}(t) = (2\sin t, 5t, 2\cos t), \qquad -10 \leq t \leq 10$
- $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{i} + t^2\overrightarrow{j} + t^3\overrightarrow{k}, \qquad 0 \leq t \leq 1$

Abscisse curviligne

L'*abscisse curviligne* d'une courbe définie par

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

avec $a \leq t \leq b$ est

$$s(t) = \int_a^t ||\,\vec{r}'(u)\,||\,du.$$

L'abscisse curviligne $s(t)$ est donc la longueur de la courbe entre les points $\vec{r}(a)$ et $\vec{r}(t)$.

Théorème Par le théorème fondamental du calcul, on a

$$\frac{ds}{dt} = ||\,\vec{r}'(t)\,||.$$

Exemple

Utiser l'abscisse curviligne pour une reparamétrisation de la courbe

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Vecteurs normaux

Soit une courbe définie par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

1. Le *vecteur normal* est le vecteur unitaire $\vec{N}(t) = \dfrac{\vec{T}'(t)}{||\,\vec{T}'(t)\,||}$.
2. Le *vecteur binormal* est le vecteur unitaire $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$.

Remarques

- Les vecteurs $\vec{T}$, $\vec{N}$ et $\vec{B}$ forment un repère orthonomal qui se déplace le long de la courbe.
- Les vecteurs tangent et normaux engendrent le *plan osculateur* de la courbe.
- Le *cercle osculateur* de la courbe est le cercle de rayon $\rho = 1/\kappa(t)$ tangent à la courbe et contenu dans le plan osculateur.

Courbure d'un arc

La *courbure* d'une courbe définie par

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

est la fonction

$$\kappa(s) = \left|\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|\right|.$$

La courbure est donc le taux de variation du vecteur tangent par rapport à l'abscisse curviligne.

Théorème La courbure est donnée par

1. $\kappa(t) = \dfrac{||\vec{T}'(t)||}{||\vec{r}'(t)||}$
2. $\kappa(t) = \dfrac{||\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)||}{||\vec{r}'(t)||^3}.$

Exemples

- Soit P la particule décrivant le cercle $x^2 + y^2 = a^2$, calculer $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ et $\kappa(t)$
- Calculer $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{B}$ pour l'hélice $\overrightarrow{r}(t) = \cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j} + t\,\overrightarrow{k}$

Vitesse et accélération

Pour une particule dont la position est donnée par $\vec{r}(t)$

- sa *vitesse* est le taux de variation par rapport au temps du vecteur position :
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$
- sa *vitesse scalaire* est : $v(t) = ||\,\vec{v}(t)\,||.$
- son *accélération* est le taux de variation par rapport au temps du vecteur vitesse :
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Exemples

- Calculer la vitesse, l'accélération et la vitesse scalaire de point dont le mouvement est donné par le vecteur position $\overrightarrow{r}(t) = (2t, e^t, te^t)$

Composantes de l'accélération

L'accélération se décompose en composantes tangentielle et normale comme suit :

$$\vec{a} = v'\vec{T} + v^2\kappa\vec{N}.$$

ou de façon équivalente :

$$\vec{a} = \left(\frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}''}{||\vec{r}'||}\right)\vec{T} + \left(\frac{||\vec{r}' \times \vec{r}''||}{||\vec{r}'||}\right)\vec{N}.$$

Exemples

- Calculer les composantes normale et tangentielle de l'accélération du vecteur position $\overrightarrow{r}(t) = (2t^2+1)\overrightarrow{i} + (2t+1)\overrightarrow{j} + 3t\,\overrightarrow{k}$

Champ de vecteurs

Un *champ de vecteurs* dans $\mathbf{R}^n$ est une fonction vectorielle $\vec{F}:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ qui associe à chaque point $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ un vecteur $\vec{F}(\mathbf{x})$.

Exemple

Décrire le champ de vecteurs dans chacun des cas suivant :

- $\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}$
- $\overrightarrow{F}(x,y) = y\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}$
- $\overrightarrow{F}(x,y) = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$

Champ de gradients

Un *champ de gradients* est un champ de vecteurs donné par $\vec{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$, pour une fonction différentiable $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Dans ce cas, f est appelée *fonction potentielle* de $\vec{F}$ et le champ $\vec{F}$ est dit *conservatif*.

Remarque

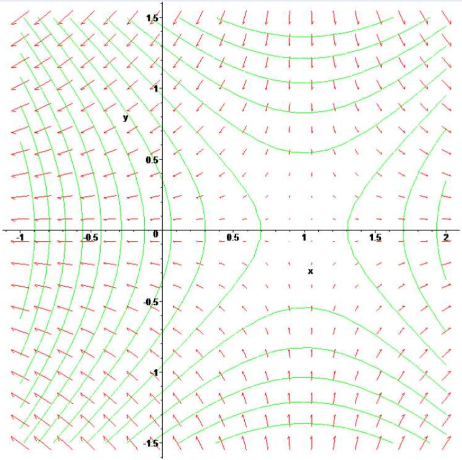
- Le champ de gradients est composés de vecteurs perpendiculaires au courbes de niveau de la fonction potentiel
- La norme d'un gradient est le taux de croissance de la fonction potentiel dans la direction où celle-ci est croissante

Exemple

Définir le champ des gradients de f dans chacun des cas suivants :

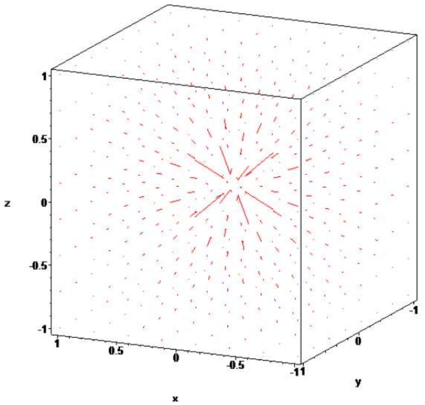
- $f(x, y) = xy^2 - yz^3$
- $f(x, y) = x^a e^{-bx}$

Champ de vecteurs



Champ de gradients de $f(x, y) = (x-1)^2 - y^2$.

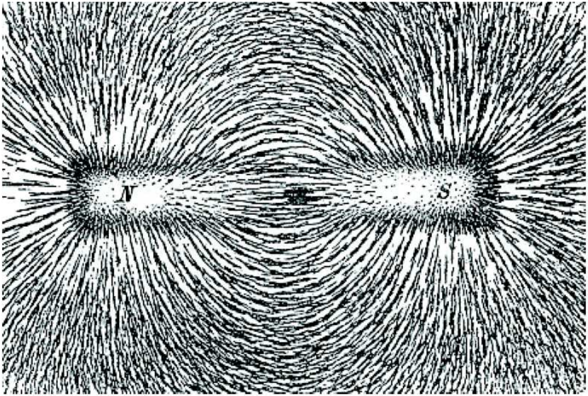
Champ de vecteurs



Champ gravitationnel $\vec{F}(x,y,z) = \frac{mMg}{||\vec{\mathbf{x}}||^3}\vec{\mathbf{x}}$.

Champs vectoriels

Champ de vecteurs



Champ magnétique autour d'un dipôle.

Intégrales curvilignes dans un plan

Un courbe C paramétrée par une fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ avec $t \in [a, b]$ est

1. *fermée* si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$
2. *lisse* si $\vec{r}\,'(t)$ est continue et non nulle pour tout $t \in [a, b]$
3. *lisse par morceaux* si C est l'union d'un nombre fini de courbes lisses.

Soit C une courbe lisse du plan paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $t \in [a, b]$ et f une fonction définie dans un voisinage de C.
Subdivisons $[a, b]$ en sous-intervalles de même longueur Δt par $t_0{=}a{<}t_1{<}\cdots{<}t_n{=}b$.
Soit $t_i^*{\in}[t_i, t_{i+1}]$ pour chaque sous-intervalle. Soit Δs_i la longueur de l'arc de C reliant les points $(x(t_i), y(t_i))$ et $(x(t_{i+1}), y(t_{i+1}))$.

Définition. L'inégrale de f le long de C est définie par

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x(t_i^*), y(t_i^*))\, \Delta s_i$$

si cette limite existe.

Intégrales curvilignes d'un champ vectoriel

Théorème. L'intégrale de f le long de C est donnée par

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,||\,\vec{r}\,'(t)\,||\,dt.$$

Théorème. Si $C = C_1 \cup C_2$ et $C_1 \cap C_2$ est un point alors

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{C_1} f(x,y)\,ds + \int_{C_2} f(x,y)\,ds.$$

Exemples

- Calculer la masse d'un fil en forme d'un demi-cercle $x^2+y^2=1$, $y \geq 0$ et d'un segment reliant les extrêmités du demi-cercle, si $\rho(x,y) = 2 + x^2 y$
- Calculer $\int_C xydx + (x-y)dy$, où C est la réunion des deux segments de $(0,0)$ à $(2,0)$ et de $(2,0)$ à $(3,2)$
- Calculer $\int_C y^2dx + xdy$, où C est l'arc de la parabole $x = 4 - y^2$ entre $(-5,-3)$ et $(0,2)$

Intégrales curvilignes dans l'espace

Soit C une courbe lisse paramétrée par $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$ et f une fonction de trois variables définie dans un voisinage de C.

L'intégrale de f le long de C est donnée par

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\, ||\, \vec{r}\,'(t)\, ||\, dt.$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Exemples

- Calculer $\int_C xy^3 ds$, où C est définie par $x(t) = 4\sin t$, $y(t) = 4\cos t$ et $z(t) = 3t$ avec $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
- Calculer $\int_C zdx + xdy + ydz$, où C est définie par $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$ et $z(t) = t^2$ avec $0 \le t \le 1$

Intégrales curvilignes d'un champ vectoriel

Soit C une courbe lisse et $\vec{F}$ un champ de vecteurs défini dns un voisinage
L'intégrale de $\vec{F}$ le long de C est définie par

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

où $\vec{T}$ est le vecteur tangent à C.

Théorème. L'intégrale de $\vec{F}$ le long de C est donnée par

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt.$$

Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ alors

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P\, dx + \int_C Q\, dy + \int_C R\, dz.$$

Calculer $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, si

- $\overrightarrow{r}(t) = (t^2, -t^3)$ avec $0 \leq t \leq 1$ et $\overrightarrow{F} = x^2y^3\overrightarrow{i} + -y\sqrt{x}\,\overrightarrow{j}$
- $\overrightarrow{r}(t) = (t^3, -t^2, t)$ avec $0 \leq t \leq 1$ et $\overrightarrow{F} = \sin(x)\,\overrightarrow{i} + \cos(y)\,\overrightarrow{j} + xz\,\overrightarrow{k}$

Théorème fondamental des intégrales curvilignes

L'intégrale du champ vectoriel $\vec{F}$ est *indépendante du chemin* d'intégration si

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

pour toute paire de courbes C_1 et C_2 ayant les mêmes extrémités.

Lorsque C est une courbe fermée, on dénote l'intégrale curviligne par $\displaystyle\oint_C$.

Théorème. L'intégrale du champ vectoriel $\vec{F}$ est indépendante du chemin d'intégration si et seulement si $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ pour toute courbe fermée C.

Théorème fondamental des intégrales curvilignes

Définition. Un champ vectoriel est *continu* si ses composantes sont des fonctions continues.

Définition. Un domaine D du plan ou de l'espace est

- *ouvert* s'il ne contient aucun point de sa frontière.
- *connexe* si toute paire de points dans D peut être reliée par un chemin entièrement contenu dans D (le domaine est "d'un seul morceau").
- *simplement connexe* s'il est connexe et si toute courbe fermée dans D n'entoure que des points de D (le domaine "n'a pas de trous").

Théorème fondamental des intégrales curvilignes

Théorème. (Théorème fondamental pour les intégrales curviligne). Soit C une courbe lisse paramétrée par $\vec{r}(t)$ avec $t \in [a,b]$ et f une fonction dont le gradient est continu. Alors

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Exemples

- Calculer le travail effectué par le champ gravitationnel

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{mMG}{||\vec{x}||^3}\vec{x},$$

lorsqu'une particule de masse m se déplace du point $(3,4,12)$ au point $(2,2,0)$ le long d'une courbe lisse. (M représente la masse de la terre)

Théorème fondamental des intégrales curvilignes

Théorème. Soit F un champ vectoriel continu sur un domaine D ouvert et connexe. Si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ est indépendante du chemin d'intégration alors $\vec{F}$ est nécessairement conservatif, c-à-d qu'il existe f telle que $\vec{F} = \nabla f$.

Théorème. Soit $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ un champ vectoriel conservatif et tel que P, Q possèdent des dérivées partielles premières continues. Alors

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Théorème. Soit $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ un champ vectoriel défini sur un domain simplement connexe D et tel que P, Q possèdent des dérivées partielles premières continues. Si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

partout sur D alors $\vec{F}$ est conservatif.

Exemples

- Est-ce que le champ vectoriel $\overrightarrow{F}$ suivant est conservatif ? Si oui donner f t.q. $\nabla f = \overrightarrow{F}$,

$$a) \qquad \overrightarrow{F} = \left(x^3 + 4xy\right)\overrightarrow{i} + \left(4xy - y^3\right)\overrightarrow{j}.$$
$$b) \qquad \overrightarrow{F} = e^y\,\overrightarrow{i} + xe^y\,\overrightarrow{j}.$$

- Trouver une fonction f t.q. $\nabla f = \overrightarrow{F}$, puis calculer $\int_C \overrightarrow{F}\,d\overrightarrow{r}$ si

$$a) \qquad \overrightarrow{F} = \frac{y^2}{1+x^2}\overrightarrow{i} + 2y\arctan x\,\overrightarrow{j},$$

et C est définie par $\overrightarrow{r}(t) = t^2\overrightarrow{i} + 2t\overrightarrow{j}$ avec $0 \leq t \leq 1$.

$$b) \qquad \overrightarrow{F} = yz\,\overrightarrow{i} + xz\,\overrightarrow{j} + (xy + 2z)\,\overrightarrow{k},$$

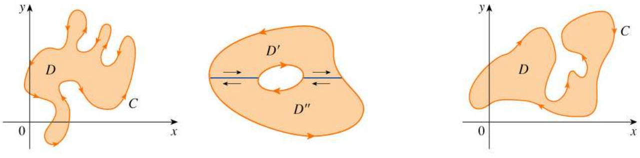
et C est le segment de droite reliant $(1, 0, -2)$ et $(4, 6, 3)$.

Théorème de Green

Soit C une courbe simple, fermée et lisse par morceaux dans le plan. Soit D la région délimitée par C.

Définition. La courbe C est *orientée positivement* si elle parcourue dans le sens antihoraire.

Ainsi, si nous parcourons C dans le sens positif alors la région D est toujours à notre gauche.



(a) Positive (b) Negative

Théorème de Green

Théorème de Green. Soit C une courbe fermée, simple et lisse par morceaux du plan, orientée positivement. Soit D le domaine délimité par C.

Si P et Q sont des fonctions de deux variables ayant des dérivées partielles continues dans un voisinage de D alors

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Remarque:

Si le membre de droite est l'intégrale d'un champ vectoriel le long d'une courbe, le théorème s'écrit :

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Théorème de Green : Exemples

- Soit le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 9$. Calculer

$$\oint_C \left(3y - e^{\sin x}\right) dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) dy$$

- Soit C la frontière du demi-anneau à l'intérieure du cercle $x^2 + y^2 = 4$ et à l'extérieure du cercle $x^2 + y^2 = 1$. Calculer

$$\oint_C y^2 dx + 3xydy$$