

Devoir 2 : Réseaux et programmation en nombres entiers

Remise le 16 octobre sur Moodle (facultatif)

Consignes

- Les devoirs doivent être réalisés seul ou par binôme (de préférence par binôme).
- Soumettez un document (format pdf) reprenant votre devoir, ainsi que votre modèle MiniZinc (fichier `.mzn`).
- Indiquez vos noms et matricules dans le titre des fichiers soumis.
- Veillez à rendre un rapport **structuré, clair et concis**. Les lacunes de forme seront pénalisées.
- L'utilisation d'une IA générative est **STRICTEMENT INTERDITE**.

Question 1

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2}{\text{minimize}} & 4x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} & -2x_1 + 9x_2 \leq 11 \\ & 5x_1 + 7x_2 \leq 28 \\ & 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

1. Représentez graphiquement ce problème.
2. Résolvez manuellement ce problème avec un algorithme *branch-and-bound*. Représentez graphiquement l'arbre de recherche obtenu en indiquant précisément pour chaque noeud : (1) la solution du problème relaxé (valeurs de x_1 et de x_2 ainsi que le coût de la solution), (2) l'ordre de visite des noeuds (1 pour le premier noeud visité, 2 pour le second, etc.), (3) les meilleures bornes supérieures et inférieures actuelles que vous avez lors de la visite d'un noeud, (4) la raison pour laquelle vous ne branchez pas sur un noeud (le cas échéant). Lors d'un branchement, indiquez également quelle contrainte vous avez rajouté. Branchez sur x_1 en premier dans l'algorithme.
3. Donnez la solution optimale de ce problème.
4. Auriez-vous pu commencer en branchant sur x_2 ? Quel impact cela aurait-il sur le *branch-and-bound*? Ne pas redétailler tout l'algorithme.

Question 2

Deux rats, Razmo et Rapido, ont réussi à s'introduire sur le porte-conteneurs transportant le fromage. Ils veulent traverser le bateau pour rejoindre la salle des commandes mais c'est un long périple et ils ont donc besoin de s'alimenter sur le chemin. Par chance, leur voyage les fait traverser trois conteneurs remplis de fromage : du comté (C_1), du brie (C_2) et du camembert (C_3). À chaque étape, ils ont deux solutions : Razmo vole du fromage pendant que Rapido monte la garde (R_1) ou l'inverse (R_2). Le tableau 1 indique la quantité maximale qu'ils peuvent récupérer d'une étape à l'autre (en portions), et ils ont pu estimer la quantité de fromage qu'ils vont consommer ainsi que la difficulté de le transporter (différentes en fonction de l'étape). La quantité de fromage nécessaire pour chaque étape ainsi que le coût de transport du fromage excédentaire (effort par portion de nourriture) sont donnés tableau 2.

Leur réserve se compose actuellement de 1 morceau de reblochon tombé lors du chargement (1 portion de fromage).

Le coût de transport jusqu'à C_i est déterminé par la quantité de nourriture restante à la fin de C_{i-1} (le coût pour la période C_1 est donc fixe puisqu'il concerne uniquement la réserve qu'ils ont actuellement).

Leur objectif est de minimiser le coût de transport tout en s'assurant d'avoir la quantité de fromage nécessaire pour chaque étape.

	C_1	C_2	C_3
R_1	20	0	10
R_2	15	5	0

TABLE 1 – Quantité de fromage disponible avec chaque méthode à chaque étape (en portions)

	C_1	C_2	C_3
Besoin en fromage	10	10	25
Coût de transport	10	40	20

TABLE 2 – Fromage nécessaire et coût de transport pour chaque étape (en portions)

1. Représentez graphiquement cet énoncé sous la forme d'un réseau. Veillez à bien dessiner le réseau et à indiquer les coûts et bornes de chaque arrête.
2. Modélisez ce problème sous la forme d'un problème de flux à coût minimum. Formalisez mathématiquement les données, les variables de décisions, la fonction objectif ainsi que les contraintes.
3. Donnez la solution optimale de ce problème, en expliquant votre raisonnement.
4. Modélisez et résolvez ce problème avec MiniZinc; le modèle doit être générique (les données doivent être nommées et déclarées avant les contraintes, vous n'avez pas besoin de produire un `.dzn`). Aviez-vous bien trouvé la solution optimale du problème? Est-elle unique? Décrivez la solution en français pour expliquer le plan d'action retenu aux rats qui n'ont pas suivi le cours MTH8414.
5. Nos rats peuvent acheter une souris pour 90 pièces afin de réduire de 5 la pénibilité (coût) de transport par portion pour toutes les étapes. S'ils estiment vouloir payer jusqu'à une pièce par pénibilité évitée, la souris vaut-elle le coup? À partir de quel ratio pièce/pénibilité la décision changerait?

6. Nos rats se rendent compte qu'ils ne peuvent pas transporter plus de 15 portions au total entre les étapes. Cela a-t-il une influence sur le problème ?