TP 2 – Nombres entiers

1 Problème de manufacture

1.1 Première situation

1. On affecte la première machine à l'ouvrier qui est le plus performant sur cette dernière, puis de même avec la deuxième machine et les ouvriers restants, etc. On obtient les couples (Machine, Ouvrier) : (1, 5), (2, 6), (3, 1), (4, 3), (5, 2), (6, 4) et une productivité de 193.

   Autres méthodes possibles :
   — procéder similairement mais en affectant chaque ouvrier à la machine sur laquelle il est le plus productif parmi celles restantes ;
   — choisir la case du tableau avec la valeur la plus élevée, fixer le couple (Machine, Ouvrier) correspondant, supprimer la ligne et la colonne associées, recommencer avec les cases restantes jusqu'à ce que toutes les machines soient affectées.
2. **Données** :
   — p_{ij} : productivité de l'ouvrier i sur la machine j.
   Variables :
   — $x_{ij} = 1$ si l'ouvrier i est affecté à la machine j, 0 sinon.
   Fonction objectif :

   $$\max \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} p_{ij} x_{ij}$$

   Contraintes :

   $$\forall i = 1, \ldots, 6, \sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 1 \quad \text{(Une machine par ouvrier)}$$

   $$\forall j = 1, \ldots, 6, \sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1 \quad \text{(Un ouvrier par machine)}$$

   $$\forall i = 1, \ldots, 6, \forall j = 1, \ldots, 6, x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{(Variables binaires)}$$

   On peut définir les variables comme continues et non négatives ($x_{ij} \geq 0$) et résoudre le problème avec le simplexe. On trouve une solution entière.
3. On obtient les couples (Machine, Ouvrier) : (1, 5), (2, 6), (3, 1), (4, 3), (5, 2), (6, 4) et une productivité de 193.
4. Notre heuristique nous a permis de trouver la solution optimale, mais c'est bien sûr rarement le cas. De plus, on ne savait pas si notre solution était optimale avant d'utiliser le solveur.

1.2 Deuxième situation

1. Il faut modifier la fonction objectif : on souhaite maintenant maximiser la productivité minimale dans la solution.
2. **Données** :

— p_{ij} : productivité de l'ouvrier i sur la machine j.
Variables :
— $x_{ij} = 1$ si l'ouvrier i est affecté à la machine j, 0 sinon.
— w : productivité de l'ouvrier le moins productif sur son poste.
Fonction objectif :

$$\max w$$

Contraintes :

$$\forall i = 1, \ldots, 6, \quad \sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 1 \quad \text{(Une machine par ouvrier)}$$

$$\forall j = 1, \ldots, 6, \quad \sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1 \quad \text{(Un ouvrier par machine)}$$

$$\forall i = 1, \ldots, 6, \quad w \leq \sum_{j=1}^{6} p_{ij} x_{ij} \quad \text{(w est inférieur aux productivités des ouvriers à leur poste)}$$

$$\forall i = 1, \ldots, 6, \forall j = 1, \ldots, 6, \quad x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{(Variables binaires)}$$

3. On obtient les couples (Machine, Ouvrier) : (1, 5), (2, 4), (3, 2), (4, 6), (5, 3), (6, 1), avec une productivité totale de 175. La productivité la plus basse est de 26.
4. La productivité totale est inférieure dans cette deuxième solution, ce qui n'est pas surprenant car ce n'est plus la quantité que nous cherchons à maximiser.

2 Transport des eaux dans un réseau

2.1 Énoncé du problème

2.2 Première situation

1. **Données** :
— A : ensemble des arcs du graphe (on ajoute un arc reliant Sherbrooke à Chambly)
— u_{ij} : capacité de l'arc $(i, j) \in A$ (avec $u_{91} = \infty$)
Variables :
— x_{ij} : flot circulant sur l'arc $(i, j) \in A$
Fonction objectif :

$$\max x_{91}$$

Contraintes :

$$\forall i = 1, \ldots, 9, \quad \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j,(j,i)\in A} x_{ji} \quad \text{(Conservation du flot)}$$

$$\forall (i, j) \in A, \quad x_{ij} \leq u_{ij} \quad \text{(Respect des capacités)}$$

$$\forall (i, j) \in A, \quad x_{ij} \geq 0 \quad \text{(Flot non négatif)}$$

2. **Données** :
   - S : ensemble des sommets du graphe
   - s : sommet correspondant à la source
   - t : sommet correspondant au puits
   - A : ensemble des arcs du graphe (on ajoute un arc (t, s) reliant le puits à la source)
   - u_{ij} : capacité de l'arc $(i, j) \in A$ (avec $u_{ts} = \infty$)

   Variables :
   - x_{ij} : flot circulant sur l'arc $(i, j) \in A$

   Fonction objectif :

   $$\max x_{ts}$$

   Contraintes :

   $$\forall i \in S, \quad \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j,(j,i)\in A} x_{ji} \quad \text{(Conservation du flot)}$$

   $$\forall (i, j) \in A, \quad x_{ij} \leq u_{ij} \quad \text{(Respect des capacités)}$$

   $$\forall (i, j) \in A, \quad x_{ij} \geq 0 \quad \text{(Flot non négatif)}$$

3. Le flot maximal est de $15\,\mathrm{dam}^3$.
4. Trouver le flot maximal revient à déterminer la capacité de la coupe minimale. En séparant le graphe en deux parties avec les sommets 1 et 2 d'un côté, et les sommets 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de l'autre, on obtient une coupe de capacité 15, ce qui signifie que le flot circulant ne peut pas excéder $15\,\mathrm{dam}^3$. Puisqu'il s'agit de la coupe minimale (vérifiable manuellement), le flot maximal est exactement égal à $15\,\mathrm{dam}^3$.

3 Deuxième situation

1. Nous ajoutons deux nœuds (nœuds 10 et 11) au graphe correspondant aux centres de traitement. Nous remplaçons l'origine des arcs sortant de Granby par le nœud 10 et l'origine de ceux sortant de Waterloo par le nœud 11, tout en maintenant leur capacité. Nous ajoutons un arc $(5, 10)$ avec une capacité de 4 et un arc $(6, 11)$ avec une capacité de 6.
2.
3. Le flot maximal est de $13\,\mathrm{dam}^3$.
4. Il faut choisir l'arc pour lequel la contrainte de capacité a le coût marginal le plus élevé dans la solution.

4 Ouverture de succursales

1. **Données** :
   - c_i : coût d'ouverture de la succursale i
   - s_{ij} : coût de service du client j par la succursale i

   Variables :
   - $y_i = 1$ si on ouvre la succursale i, 0 sinon

Fonction objectif :

$$\min \sum_{i=1}^{5} \left(c_i y_i + \sum_{j=1}^{15} s_{ij} x_{ij} \right)$$

Contraintes :

$$\forall i = 1, \dots, 5, \forall j = 1, \dots, 15, \quad x_{ij} \leq y_i \quad \text{(Un client ne peut être servi que par une succursale ouverte.)}$$

$$\forall j = 1, \dots, 15, \quad \sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 \quad \text{(Chaque client est servi par exactement une succursale)}$$

$$\forall i = 1, \dots, 5, \forall j = 1, \dots, 15, \quad x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \quad \text{(Variables binaires)}$$

2. On ouvre les succursales 1 et 5 pour un coût total de 54.
3. Après ajout de la contrainte $y_4 = 1$, on ouvre maintenant les succursales 1 et 4 pour un coût total de 56.