TP 2 – Nombres entiers

1 Problème de manufacture

1.1 Première situation

1. On affecte la première machine à l'ouvrier qui est le plus performant sur cette dernière, puis de même avec la deuxième machine et les ouvriers restants, etc. On obtient les couples ($Machine$, $Ouvrier$) : (1, 5), (2, 6), (3, 1), (4, 3), (5, 2), (6, 4) et une productivité de 193.
   Autres méthodes possibles :
   — procéder similairement mais en affectant chanque ouvrier à la machine sur laquelle il est le plus productif parmi celles restantes
   — choisir la case du tableau avec la valeur la plus élevée, fixer le couple ($Machine$, $Ouvrier$) correspondant, supprimer la ligne et la colonne associée, recommencer avec les cases restantes jusqu'à ce que toutes les machines soient affectées
2. Données : p_{ij} = productivité de l'ouvrier i sur la machine j
   Variables : $x_{ij} = 1$ si l'ouvrier i est affecté à la machine j, 0 sinon
   Fonction objectif :
   $$\max \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} p_{ij} x_{ij}$$
   Contraintes :
   $$\forall\, i = 1, ...6,\ \sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 1 \qquad \text{Une machine par ouvrier}$$
   $$\forall\, j = 1, ...6,\ \sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1 \qquad \text{Un ouvrier par machine}$$
   $$\forall\, i = 1, ...6,\ j = 1, ...6,\ x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{Variables binaires}$$
3. On obtient les couples ($Machine$, $Ouvrier$) : (1, 5), (2, 6), (3, 1), (4, 3), (5, 2), (6, 4) et une productivité de 193.
4. Notre heuristique nous a permis de trouver la solution optimale mais c'est bien sûr rarement le cas. De plus, on ne savait pas si notre solution était optimale avant d'utiliser le solveur.

1.2 Deuxième situation

1. Il faut modifier la fonction objectif : on souhaite maintenant maximiser la productivité minimale dans la solution.
2. Données : p_{ij} = productivité de l'ouvrier i sur la machine j
   Variables : $x_{ij} = 1$ si l'ouvrier i est affecté à la machine j, 0 sinon
   w = productivité de l'ouvrier le moins productif sur son poste
   Fonction objectif :
   $$\max w$$

Contraintes :

$$\forall\, i = 1, ...6,\ \sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 1 \qquad \text{Une machine par ouvrier}$$

$$\forall\, j = 1, ...6,\ \sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1 \qquad \text{Un ouvrier par machine}$$

$$\forall\, i = 1, ...6,\ w \leq \sum_{j=1}^{6} p_{ij} x_{ij} \qquad w \text{ est inférieur aux productivités des ouvriers à leur poste}$$

$$\forall\, i = 1, ...6,\ j = 1, ...6,\ x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \text{Variables binaires}$$

3. On obtient les couples ($Machine$, $Ouvrier$) : (1, 5), (2, 4), (3, 2), (4, 6), (5, 3), (6, 1) et une productivité de 175. La productivité la plus basse est 26.
4. La productivité totale est moins bonne dans la deuxième solution, ce qui n'est pas surprenant car ce n'est plus ce qu'on cherche à maximiser.

2 Transport des eaux dans un réseau

2.1 Énoncé du problème

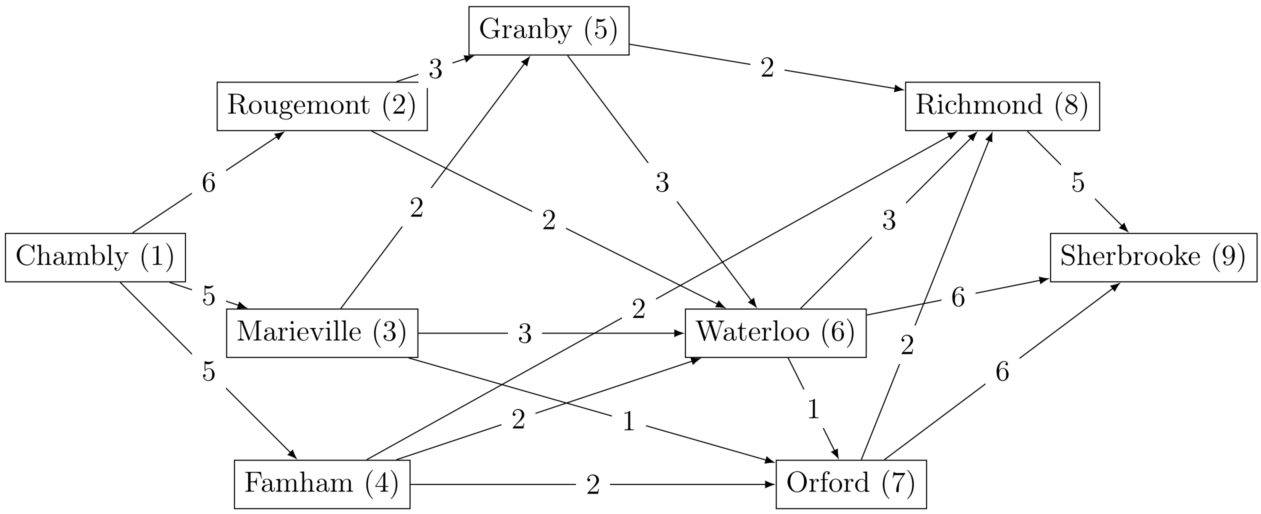

Figure 1 – Réseau de canalisations actuel

2.2 Première situation

1. Données : A = ensemble des arcs du graphe (on ajoute un arc reliant Sherbrooke à Chambly)
   u_{ij} = capacité de l'arc $(i, j) \in A$ ($u_{91} = \infty$)
   Variables : x_{ij} = flux circulant sur l'arc $(i, j) \in A$
   Fonction objectif :
   $$\max x_{91}$$

Contraintes :

$$\forall\, i = 1, ...9, \sum_{j,\,(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j,\,(j,i)\in A} x_{ji} \qquad \text{Conservation du flux}$$

$$\forall\, (i,j) \in A,\ x_{ij} \le u_{ij} \qquad \text{Respect des capacités}$$

$$\forall\, (i,j) \in A,\ x_{ij} \ge 0 \qquad \text{Flux positif}$$

2. (a) Données : S = ensemble des sommets du graphe
   s = sommet correspondant à la source
   t = sommet correspondant au puit
   A = ensemble des arcs du graphe (on ajoute un arc (t, s) reliant le puit à la source)
   u_{ij} = capacité de l'arc $(i, j) \in A$ ($u_{ts} = \infty$)
   Variables : x_{ij} = flux circulant sur l'arc $(i, j) \in A$
   Fonction objectif :

$$\max x_{ts}$$

   Contraintes :

$$\forall\, i \in S, \sum_{j,\,(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j,\,(j,i)\in A} x_{ji} \qquad \text{Conservation du flux}$$

$$\forall\, (i,j) \in A,\ x_{ij} \le u_{ij} \qquad \text{Respect des capacités}$$

$$\forall\, (i,j) \in A,\ x_{ij} \ge 0 \qquad \text{Flux positif}$$

   (b)
   (c) Le flux maximal est $15dam^3$.
   (d) Trouver le flux maximal revient à déterminer la capacité de la coupe minimale. En coupant le graphe en deux avec les sommets 1, 2 d'un côté et 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de l'autre, on obtient une coupe de capacité 15, ce qui signifie que le flux circulant ne peut pas excéder $15dam^3$. De plus, il s'agit de la coupe minimale (on peut le vérifier à la main), donc le flux maximal est exactement égal à $15dam^3$.

2.3 Deuxième situation

(a) On ajoute un sommet 10 au graphe correspondant au centre de traitement. On remplace l'origine des arcs sortant de Granby et Waterloo par le centre de traitement en maintenant leur capacité. On ajoute un arc (5, 10) de capacité 4 et un arc (6, 10) de capacité 6.
(b)
(c)
(d) Il faudrait choisir l'arc dont la contrainte de capacité a le coût marginal le plus élevé dans la solution.

3 Ouverture de succursales

3. Données : c_i = coût d'ouverture de la succursale i
   s_{ij} = coût de service du client j par la succursale i
   Variables : y_i = 1 si on ouvre la succursale i, 0 sinon

$x_{ij} = 1$ si le client j est servi par la succursale i, 0 sinon
Fonction objectif :

$$\min \sum_{i=1}^{5} (c_i y_i + \sum_{j=1}^{15} s_{ij} x_{ij})$$

Contraintes :

$\forall\ i = 1, ...5,\ j = 1, ...15,\ x_{ij} \leq y_i$	Un client ne peut pas être servi par une succursale non ouv
$\forall\ j = 1, ...15,\ \sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1$	Chaque client est servi par exactement une succursale
$\forall\ i = 1, ...5,\ j = 1, ...15,\ x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}$	Variables binaires

4. On ouvre les succursales 1 et 5 pour un coût total de 54.
5. On ajoute la contrainte $y_4 = 1$. On ouvre maintenant les succursales 1 et 4 pour un coût total de 56.