TP 2 – Nombres entiers

1 Problème de manufacture

L'industrie manufacturière automobile a une place importante dans l'économie du Canada. Dans cet exercice, nous nous concentrons sur un atelier muni de six machines dédiées à la construction de pièces automobiles. Chacune des six machines doit être gérée par un ouvrier et chaque ouvrier ne peut travailler que sur une machine. Chaque ouvrier a un niveau d'expertise différent sur chaque machine. A l'aide de statistiques antérieures, on a pu évaluer la productivité (mesurée en nombre de pièces construites par heure) de chaque ouvrier sur chaque machine. Ces données sont reprises dans le Tableau 1. Notre objectif est de maximiser la productivité totale de l'atelier, c'est à dire le nombre total de pièces construites par heure.

Machines

Ouvriers	1	2	3	4	5	6
1	13	24	31	19	40	29
2	18	25	30	15	43	22
3	20	20	27	25	34	33
4	23	26	28	18	37	30
5	28	33	34	17	38	20
6	19	36	25	27	45	24

Table 1 – Productivité de chaque opérateur pour chaque machine.

1.1 Première situation

Les différentes machines fonctionnent en parallèle, c'est à dire qu'elles peuvent toutes être utilisées en même temps. Dans cette situation, la productivité totale de l'atelier est la somme des productivités des ouvriers affectés aux machines.

1. Proposez une méthode heuristique intuitive de résolution. Quel résultat obtenez-vous avec cette méthode ?
2. Modélisez ce problème avec une formulation de problème en nombres entiers. Formalisez mathématiquement les données, les variables de décision, la fonction objectif ainsi que les contraintes.
3. Résolvez ce problème en utilisant MiniZinc. Des fichiers `.mzn` et `.dzn` encodant le problème vous sont donnés.
4. Comparez votre solution avec celle obtenue avec votre heuristique.

1.2 Deuxième situation

Suite à des restrictions budgétaires, il n'est plus possible de faire fonctionner les machines en parallèle. Elles tournent désormais en série, ce qui implique que l'ouvrier le moins productif sur son poste détermine la productivité totale de l'atelier.

1. Quel impact cette modification a t-elle par rapport au problème initial ?
2. Modélisez ce problème avec une formulation de problème en nombres entiers. Formalisez mathématiquement les données, les variables de décision, la fonction objectif ainsi que les contraintes.

3. Résolvez ce problème en utilisant MiniZinc.
4. Comparez votre solution avec celle obtenue dans la première situation. Le résultat est-il logique ?

2 Transport des eaux dans un réseau

2.1 Enoncé du problème

Suite à une contamination des nappes phréatiques, la ville de Sherbrooke n'est plus autonome en eau. La source d'eau la plus proche se trouve à la ville de Chambly. Heureusement, il existe un réseau d'eau courante entre les deux villes. Ce dernier est représenté dans la Figure 1. Chaque arc représente une canalisation entre deux villes et possède une capacité quotidienne exprimées en dam^3. Afin d'estimer les rentrées quotidiennes en eau, le maire de Sherbrooke souhaite connaître la quantité d'eau maximale qu'il pourrait obtenir de Chambly.

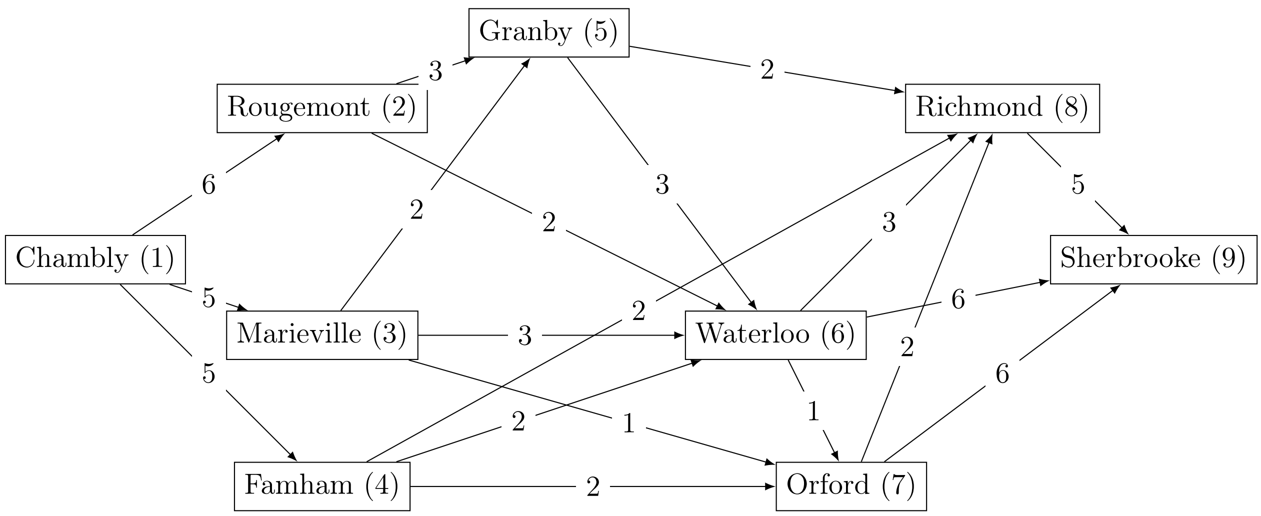

Figure 1 – Réseau de canalisations actuel.

2.2 Première situation

1. Modélisez ce problème sous la forme d'un **programme linéaire**. Formalisez mathématiquement les données, les variables de décision, la fonction objectif ainsi que les contraintes.
2. Présentez un modèle **générique**, c'est à dire qu'il puisse être généralisé à un réseau quelconque.
3. Résolvez ce problème en utilisant MiniZinc. Pour cela, il est utile d'utiliser l'expression `where`, référez vous à la documentation MiniZinc pour avoir plus d'information. Un fichier (`.dzn`) encodant l'instance vous est fourni. Ce modèle contient une arête fictive de Sherbrooke à Chambly.
4. Quelle est la quantité d'eau maximale que Sherbrooke peut obtenir de Chambly ?
5. Le maire est sceptique quant à votre résultat, pouvez vous lui prouver que votre solution est bien optimale ?

2.3 Deuxième situation

Il a ensuite été décidé que l'eau rentrant dans les villes de Granby et de Waterloo devait également transiter par un centre de traitement avant de quitter ces villes et rejoindre le réseau. La capacité quotidienne du centre de traitement est de 4 dam^3 pour Granby et de 6 dam^3 pour Waterloo.

1. Modifiez le graphe initial pour prendre en compte ces nouvelles contraintes.
2. Proposez un fichier `.dzn` encodant cette modification.
3. Résolvez ce nouveau problème en utilisant MiniZinc. Si votre modèle est bien fait, aucune modification à votre modèle initial de devrait être faite. Vous pouvez ainsi voir l'intérêt de créer un modèle générique.
4. Afin d'anticiper de futures contaminations, il a été décidé d'investir afin d'augmenter la capacité de certaines canalisations. Comment une analyse de sensibilité permettrait de déterminer lesquelles augmenter ?

3 Ouverture de succursales

Une grande chaîne commerciale souhaite implanter plusieurs succursales ($S_1, \ldots, S_5$) dans la région en vue de servir ses clients ($C_1, \ldots, C_{15}$). Chaque client doit être servi par exactement une succursale. Avant de pouvoir servir un client, la succursale doit avoir été ouverte préalablement. Ainsi, on a deux niveaux de décision à considérer :

1. Quelles succursales va t-on ouvrir ?
2. Quels clients va t-on assigner aux succursales qui ont ouvertes ?

L'ouverture d'une succursale i a un coût fixe c_i et le service d'un client j par la succursale i a un coût variable en fonction de leur distance. Afin d'alléger votre travail, la chaîne commerciale a pré-calculé ce coût pour chaque paire client/succursale. L'entièreté des données sont reprises dans le Tableau 2. L'objectif est de minimiser les coûts totaux engendrés. A titre d'illustration, la Figure 2 donne une vision synthétique de la situation, telle qu'elle pourrait se présenter en pratique.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	Ouverture
S_1	3	1	1	2	2	3	4	4	6	6	7	5	6	8	8	10
S_2	1	1	3	3	2	2	2	3	5	5	6	5	7	8	8	13
S_3	5	3	2	1	2	3	6	3	5	6	6	4	1	3	3	8
S_4	7	8	6	5	4	4	4	2	2	2	1	1	2	2	1	17
S_5	8	9	5	4	3	4	5	2	3	3	2	1	1	1	1	14

TABLE 2 – Coûts d'ouverture et de service aux différents clients (en $k\$$).

1. Modélisez ce problème sous la forme d'un **programme à nombres entiers**. Formalisez mathématiquement les données, les variables de décisions, la fonction objectif ainsi que les contraintes.
2. Modélisez et résolvez ce problème avec MinZinc. Quelle est la solution optimale du problème ? Représentez graphiquement la solution sur le schéma ci-dessous. Un fichier `.dzn` encodant le problème vous est donné.
3. La chaîne reçoit une nouvelle contrainte, la succursale S_4 doit-être absolument ouverte. Quelles sont les modifications à apporter à votre formulation ? Quelle est la nouvelle solution optimale ?

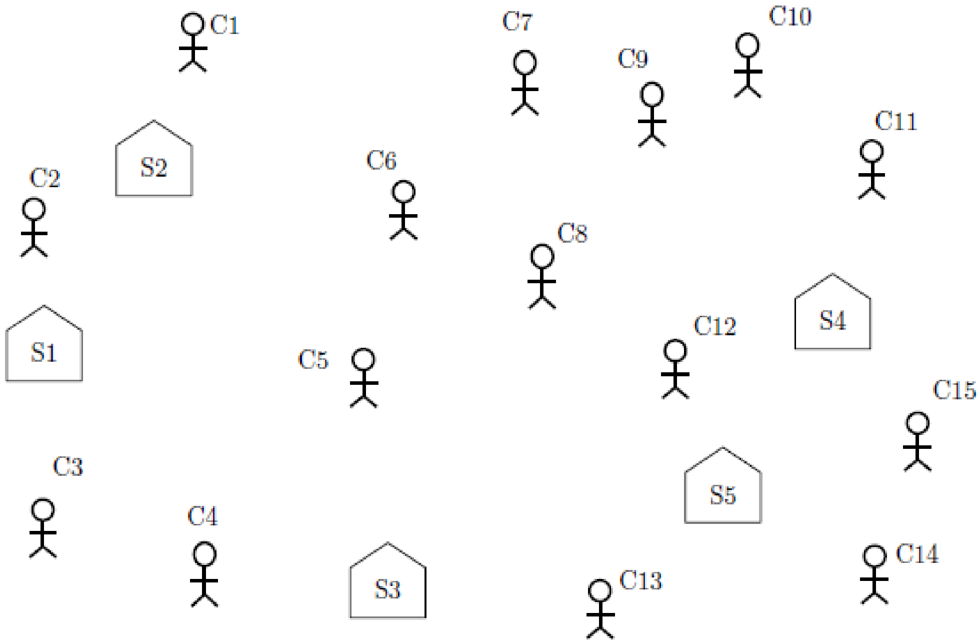

FIGURE 2 – Représentation synthétique du problème.