Devoir 1: Résolution de programmes linéaires

Correction

Question 1

1.

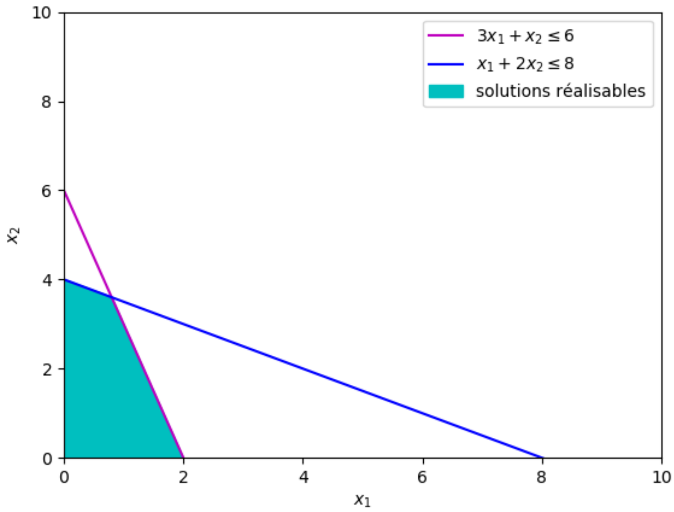

FIGURE 1 – Espace des solutions réalisables

2.

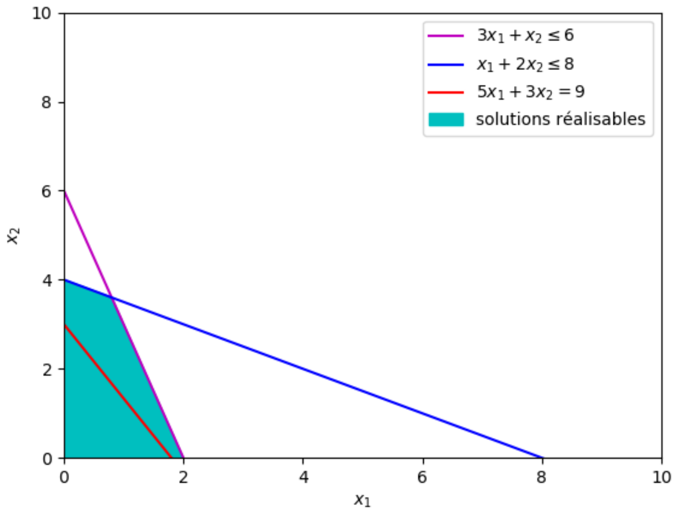

FIGURE 2 – Fonction objectif évaluée à un coût donnant lieu à plusieurs solutions

3.

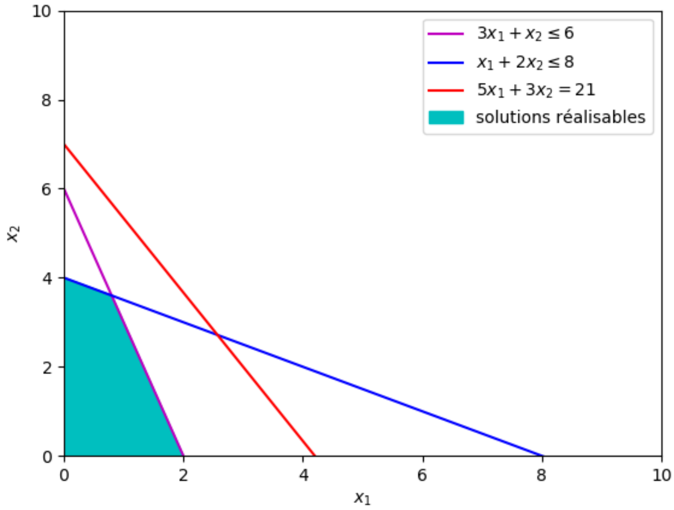

Figure 3 – Fonction objectif évaluée à un coût ne donnant lieu à aucune solution

4.

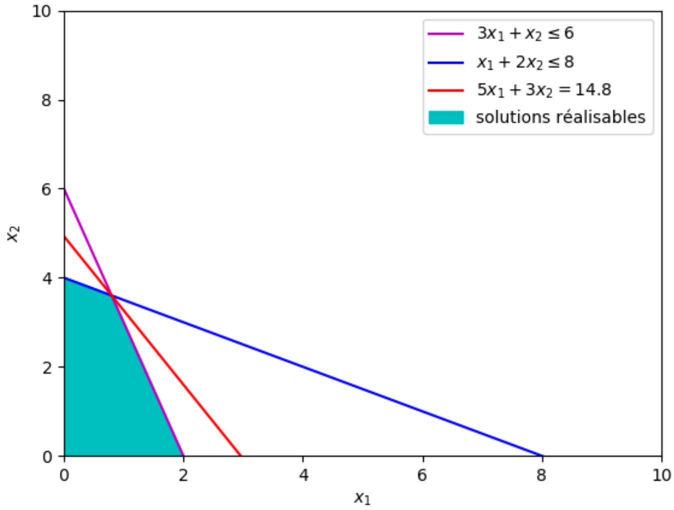

Figure 4 – Fonction objectif évaluée au coût optimal

5. Le cout optimal est 14.8 et est donné par $x_1 = 0.8$ et $x_2 = 3.6$.

Question 2

1. On commence par réécrire le problème en "retournant" la première contrainte :

$$\begin{aligned} \underset{x}{\text{maximize}} \quad & x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 \\ \text{subject to} \quad & -4x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \\ & x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 3 \\ & 2x_1 + 3x_3 = 6 \\ & x_2, x_3, x_4 \geq 0, \; x_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   On a un problème de maximisation donc le dual est un problème de minimisation.
   Le problème comporte 3 contraintes donc on a 3 variables duales : y_1, y_2 et y_3. Les deux premières contraintes sont de la forme "$\leq$" donc $y_1 \geq 0$ et $y_2 \geq 0$. La troisième contrainte est de la forme "$=$" donc $y_3 \in \mathbb{R}$.
   Le problème comporte 4 variables donc le dual a 4 contraintes. $x_1 \in \mathbb{R}$ donc la contrainte associée est de la forme "$=$". $x_2, x_3, x_4 \geq 0$ donc les contraintes associées sont de la forme "$\geq$".
   Enfin, en transposant les matrices des coefficients des contraintes et de la fonction objectif et des membres de droite des contraintes, on obtient le dual :

$$\begin{aligned} \underset{y}{\text{minimize}} \quad & -2y_1 + 3y_2 + 6y_3 \\ \text{subject to} \quad & -4y_1 + 2y_3 = 1 \\ & -y_1 + y_2 \geq -2 \\ & -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 4 \\ & -y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0, \; y_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. En procédant de la même façon que précédemment ou simplement en utilisant le fait que le dual du dual est le primal, on obtient que le dual du dual est :

$$\begin{aligned} \underset{x}{\text{maximize}} \quad & x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 \\ \text{subject to} \quad & -4x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \\ & x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 3 \\ & 2x_1 + 3x_3 = 6 \\ & x_2, x_3, x_4 \geq 0, \; x_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Question 3

1. Pour linéariser le problème, on pose la variable $w = \max(5x_1 - x_2, 4x_1 + 2x_2)$ et on ajoute les deux contraintes suivantes au problèmes :
   — $5x_1 - x_2 \leq w$
   — $4x_1 + 2x_2 \leq w$
   Le problème est donc équivalent à :

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & w \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 - x_2 \geq 8 \\ & 5x_1 - x_2 \leq w \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq w \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Question 4 : Le pays des 400 fromages (14 pts)

1. Données :
   p_{ij}, $1 \leq i \leq 7$, $1 \leq j \leq 9$: profit estimé pour la vente du fromage j dans la ville i (CAD/kg)
   d_i, $1 \leq i \leq 7$: minimum de demande en fromage dans la ville i (tonnes)
   q_j, $1 \leq j \leq 9$: quantité maximale du fromage j pouvant être produite (tonnes)
   $Q = 2000$: quantité maximale de fromage que peut transporter le porte-conteneurs (tonnes)

   Variables de décision :
   x_{ij}, $1 \leq i \leq 7$, $1 \leq j \leq 9$: quantité de fromage j produite pour la ville i (tonnes)

   Fonction objectif :

   $$\max \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{9} 1000 \times x_{ij} \times p_{ij}$$

   Contraintes :
   — $\forall\ 1 \leq i \leq 7$, $\sum_{j=1}^{9} x_{ij} \geq d_i$
   Réponse à la demande
   — $\forall\ 1 \leq j \leq 9$, $\sum_{i=1}^{7} x_{ij} \leq q_j$
   Respect des quantités
   — $\sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{9} x_{ij} \leq Q$
   Respect de l'espace disponible
   — $\forall\ 1 \leq i \leq 7$, $1 \leq j \leq 9$, $x_{ij} \geq 0$
   Positivité des variables
   On a 63 variables et 17 contraintes (sans compter les contraintes de positivité).

2. Profit optimal : 32 450 000 CAD

	Munster	Comté	Éppoisses	Reblochon	Brie	Camembert	Cantal	Gruyère	Roquefort
Montréal	0	200	0	0	0	600	0	0	0
Ville de Québec	0	200	0	150	0	0	0	0	0
Gaspé	0	50	100	0	0	0	0	0	0
Saguenay	0	0	0	0	250	0	0	0	0
Longueuil	0	0	0	0	0	0	150	0	0
Trois-Rivières	0	0	0	0	200	0	0	0	0
Sherbrooke	0	0	100	0	0	0	0	0	0

Table 1 – Production optimale en tonnes

3. La réponse à la demande pour Montréal et le respect de la quantité disponible de Comté sont deux contraintes liées dans la solution.
4. Dans la solution actuelle, la quantité de Brie produite est de 450 tonnes, soit un écart de 300 à la contrainte sur la quantité qu'il est possible de produire. Augmenter la quantité de Brie que l'on peut produire n'aura donc pas d'influence sur le profit optimal. En revanche, la quantité de Camembert produite dans la solution est de 600 tonnes ce qui est égal à la contrainte, il est donc possible qu'augmenter la quantité de Camembert que l'on peut produire permette d'améliorer le profit. Il vaut donc mieux choisir les 50 tonnes de Camembert.

5. La quantité totale de fromage produit est exactement 2000 tonnes donc la capacité du porte-conteneurs est limitante.
   En modifiant la contrainte de capacité du porte-conteneurs dans MiniZinc, on obtient une solution dans laquelle la quantité totale de fromage produit est exactement 3000 tonnes donc la capacité du porte-conteneurs est encore limitante.
   La quantité maximale de fromage pouvant être produit est 5050 tonnes au total, un porte-conteneur d'une capacité de 6000 tonnes n'est donc plus limitant.
6. Il suffit de modifier la fonction objectif :

$$\max \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{9} 1000 \times x_{ij} \times (p_{ij} - 8)$$