Devoir 1: Résolution de programmes linéaires

Remise le 25 septembre sur Moodle

Consignes

- Les devoirs doivent être réalisés seul ou par binôme (de préférence par binôme).
- Soumettez un document (format pdf) reprenant votre devoir, ainsi que votre modèle MiniZinc (fichier `.mzn`).
- Indiquez vos noms et matricules dans le titre des fichiers soumis.
- Veillez à rendre un rapport **structuré**, **clair** et **concis**. Les lacunes de forme seront pénalisées.
- L'utilisation d'une IA générative est **STRICTEMENT INTERDITE**.

Question 1 (2 pts)

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2}{\text{maximize}} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Représentez graphiquement l'espace des solutions réalisables.
2. Représentez graphiquement la fonction objectif évaluée à un coût donnant lieu à plusieurs solutions.
3. Représentez graphiquement la fonction objectif évaluée à un coût ne donnant lieu à aucune solution.
4. Représentez graphiquement la fonction objectif évaluée au coût optimal.
5. Quel est le coût optimal et quelles sont les valeurs des variables x_1 et x_2 donnant ce coût ?

Question 2 (2 pts)

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \underset{x}{\text{maximize}} \quad & x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 \\ \text{subject to} \quad & 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 3 \\ & 2x_1 + 3x_3 = 6 \\ & x_2, x_3, x_4 \geq 0,\ x_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Donnez le dual de ce problème, en justifiant calculs et transformations. Présentez le dual avec des variables positives ou dans $\mathbb{R}$.
2. Donnez le dual du dual.

Question 3 (2 pts)

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \underset{x_1,x_2}{\text{minimize}} \quad & \max(5x_1 - x_2,\, 4x_1 + 2x_2) \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 - x_2 \geq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Reformulez ce problème afin qu'il soit linéaire.

Question 4 : Le pays des 400 fromages (14 pts)

Après avoir décelé un fort potentiel dans le marché québecois, Le Fromage du Monde, une fromagerie française, a décidé d'augmenter sa production et d'exporter différentes variétés de fromage dans quelques villes du Québec. La fromagerie va procéder comme suit :

1. Le fromage est produit en France et entreposé dans des conteneurs réfrigérés avant d'être exporté vers le Québec.
2. Le fromage voyage dans un porte-conteneurs.
3. Le fromage est réparti entre les différentes villes.

La fromagerie doit donc décider quelle quantité de fromage elle va produire pour chaque ville. Une étude menée en amont du projet a permis d'obtenir une estimation du profit que peut rapporter chaque variété de fromage dans les différentes villes (Table 1). De plus, chaque ville demande à ce que le quantité totale de fromage qu'elle reçoit, toutes variétés confondues, se trouve au dessus d'un certain poids minimum (Table 2). Chaque variété de fromage doit être entreposée dans son propre conteneur et comme le poids de ces derniers est limité, cela restreint la production maximale (Table 3). Enfin, en raison de restrictions budgétaires, le porte-conteneurs ne peut pas transporter plus de 2000 tonnes de fromage au total. L'objectif de la fromagerie est de maximiser le profit issu de ses ventes tout en respectant les contraintes qui lui sont imposées.

	Munster	Comté	Éppoisses	Reblochon	Brie	Camembert	Cantal	Gruyère	Roquefort
Montréal	5	10	4	4	6	11	8	8	4
Ville de Québec	3	20	10	19	6	15	4	7	16
Gaspé	10	22	23	4	5	18	13	4	3
Saguenay	2	8	22	16	25	26	5	14	20
Longueuil	15	2	6	15	18	12	19	10	8
Trois-Rivières	6	6	2	9	12	7	9	8	5
Sherbrooke	8	14	21	16	9	4	6	8	13

Table 1 – Estimation du profit pour les ventes de chaque variété de fromage en CAD/kg

Montréal	Ville de Québec	Gaspé	Saguenay	Longueuil	Trois-Rivières	Sherbrooke
800	350	150	100	150	200	100

Table 2 – Minimum de demande en fromage pour chaque ville en tonnes

1. Modélisez ce problème sous la forme d'un programme linéaire en variables entières. Formalisez mathématiquement les données, les variables de décisions, la fonction objectif ainsi que les contraintes. Combien de variables et de contraintes avez-vous au total ? (4pts)

Munster	Comte	Éppoisses	Reblochon	Brie	Camembert	Cantal	Gruyère	Roquefort
300	450	200	500	750	600	800	800	650

Table 3 – Quantité maximale de fromage pouvant être produite en tonnes

2. Modélisez et résolvez ce problème à l'aide de MiniZinc. Reportez la production optimale de chaque fromage pour chaque ville ainsi que le profit optimal dans le rapport. Utilisez le fichier `.dzn` fourni. (6pts)
3. Indiquez (et justifiez) deux exemples de contraintes liées dans votre solution. (1pt)
4. La fromagerie a la possibilité de produire un peu plus de fromage : 50 tonnes de Camembert ou 100 tonnes de Brie. Quel est le meilleur choix ? (1pt)
5. La capacité du porte-conteneurs limite-t-elle le profit de la fromagerie ? Pourquoi ? Et avec une capacité de 3000 tonnes ? 6000 tonnes ? (2pt)
6. Bonus : La fromagerie doit maintenant payer 8 CAD par kg de fromage transportée sur le porte-conteneurs. Quelles modifications apporteriez-vous au modèle ? (+1pt)