TP 1 – Introduction à la programmation linéaire

1 Utilisation de Minizinc

Pour les TPs, nous utiliserons le language de modélisation Minizinc.

1. Téléchargez la dernière version de Minizinc (`https://www.minizinc.org/`).
2. Lisez les chapitres 1, 2 et 3.1 du tutoriel Minizinc (disponible sur Moodle). En particulier, comprenez les exemples `aust`, `cakes` et `simple-prod-planning`. N'hésitez pas à télécharger ces exemples, à les exécuter et à y apporter des modifications afin de bien comprendre comment ils fonctionnent.
3. Modélisez le problème suivant sur Minizinc et résolvez le en utilisant le solveur `COIN-BC`. Une base de modèle (`tp1-pl-incomplet.mzn`) est disponible sur Moodle.

$$\begin{aligned}
\underset{x_1,x_2,x_3,x_4}{\text{minimize}} \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 && \geq 2 \\
& 3x_2 - x_3 && \geq 5 \\
& x_3 + x_4 && \geq 3 \\
& x_4 && \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 && \geq 0
\end{aligned}$$

Documentation sur Minizinc

— La *Fiche pratique* : *Introduction MiniZinc*, disponible sur Moodle.
— Le tutoriel officiel, disponible sur Moodle.
— Le MOOC officiel de Minizinc (`https://www.coursera.org/learn/basic-modeling`).
— La *Cheat sheet*, reprenant la syntaxe et les opérateurs les plus utiles, disponible dans votre IDE (section *help*).

2 Problème de distribution

2.1 Énoncé

Un manufacturier doit acheminer ses produits dans six centres de distribution depuis trois usines. Pour cela, il a à disposition les quantités disponibles dans chacune de ses usines ainsi que les demandes minimales dans chacun des centres de productions. De plus, par le biais de statistiques antérieures, il a pu estimer le coût unitaire de transport d'un produit entre les usines et les centres de distributions. Son objectif est de minimiser les coûts de transport, tout en respectant les contraintes de capacité et de demande.

Cost (CAD/unité)	Toronto	Montréal	Ottawa	Québec	Sherbrooke	Saguenay	Capacité (unité)
Longueuil	569	10	231	248	157	454	180
Peterborough	139	465	268	729	623	936	230
Trois-Rivières	672	138	313	129	153	335	70
Demande (unité)	153	131	55	67	27	12	

2.2 Modélisation

1. Détaillez en **français** les contraintes de ce problème ainsi que les décisions que le manufacturier peut prendre afin de résoudre son problème.
2. Modélisez ce problème sous la forme d'un **programme linéaire**. Formalisez mathématiquement les données, les variables de décision, la fonction objectif ainsi que les contraintes.

Données : Coûts (c), demande (d), capacité (C)
Variables de décision : Quantité envoyée d'une usine à un centre (x)
Fonction objectif : Coûts unitaires × quantité envoyée :

$$\min x_{\text{Longueuil, Toronto}} \times c_{\text{Longueuil, Toronto}} + \dots + x_{\text{TR, Saguenay}} \times c_{\text{TR, Saguenay}}$$

Contraintes : Satisfaire la demande, ne pas excéder la capacit

$$x_{\text{Longueuil, Toronto}} + x_{\text{Peterborough, Toronto}} + x_{\text{TR, Toronto}} \geq d_{\text{Toronto}}$$
$$\dots$$
$$x_{\text{Longueuil, Toronto}} + x_{\text{Longueuil, Montréal}} + \dots + x_{\text{Longueuil, Saguenay}} \geq C_{\text{Longueuil}}$$
$$\dots$$

3. Présentez un modèle **générique**, c'est à dire un modèle qui puisse être généralisé à un nombre quelconque de centres de distribution et d'usines.

Données : Usines ($\mathcal{I}$), centrescoûts $\mathcal{J}$, coûts ($c_{i,j}$), demande (d_j), capacité (C_i)
Variables de décision : Quantité envoyée d'une usine i à un centre j ($x_{i,j}$)
onction objectif :

$$\min_x \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}} c_{i,j} x_{i,j}$$

Contraintes : Satisfaire la demande, ne pas excéder la capacité :

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} x_{i,j} \geq d_j, \forall j \in \mathcal{J}$$
$$\sum_{j\in\mathcal{J}} x_{i,j} \leq C_i, \forall i \in \mathcal{I}$$
$$x_{i,j} \geq 0$$

2.3 Résolution

1. Modélisez le problème du TP sur Minizinc en utilisant les générateurs `forall` et `sum`. Une base de modèle (`tp1-incomplet.mzn`) et un fichier encodant le problème (`tp1-distribution.dzn`) vous sont donnés sur Moodle.
2. Résolvez le en utilisant le solveur `COIN-BC`.

2.4 Interprétation

Une fois le modèle résolu, répondez aux questions suivantes :

1. Quel est le coût optimal du problème ? 54 809
2. Quelle est la production optimale à l'usine de Peterborough ? 195
3. Les produits de quelles usines ont-t-ils été utilisés pour satisfaire la demande de Saguenay ? Et en quelles proportions ? 3 et 9 de Longueuil et Trois-Rivières (TR)
4. Donner une contrainte active/limitante/liée pour la solution optimale. Capacité de TR.
5. Le coût marginal de la capacité de l'usine de Longueuil est de -37. Pourquoi est-il négatif ? Calculer la valeur de la fonction objectif si la capacité de l'usine de Longueuil passe de 180 à 179 ? et à 175 ? Vérifier avec MiniZinc. Le coût marginal permet-il de déterminer la valeur de la fonction objectif pour toute valeur de capacité de l'usine de Longueuil ? Capacité 179 $\rightarrow$ coût 54 846