Rappel - analyse et synthèse de fonctions combinatoires

Pierre Langlois

Rappel - analyse et synthèse de fonctions combinatoires

- Variables booléennes et valeurs logiques
- Fonctions booléennes
- Portes logiques
- Tables de vérité
- Simplification d’expressions booléennes
- Analyse d’un circuit combinatoire
- Conception d’un circuit combinatoire

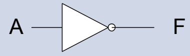
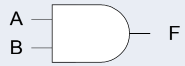
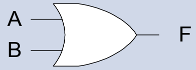
Variables booléennes

- La logique booléenne est à la base des systèmes numériques.
- Dans un système numérique, tous les signaux sont des variables booléennes.
- Une variable booléenne peut prendre une seule de deux valeurs: vrai ou faux.
- On peut interpréter ces deux valeurs de différentes façons selon le contexte.

Valeur logique	Équivalent numérique	Exemple: lampe	Exemple: tension	Exemple: alarme
Vrai	1	Allumée	Élevée	Activée
Faux	0	Éteinte	Basse	Désactivée

Fonctions booléennes de base NON, ET, OU: symboles et tables de vérité

- Il y a trois fonctions booléennes de base
  - La négation (NON - *not*);
  - La conjonction (ET logique - *and*); et,
  - La disjonction (OU logique - *or*).
- On peut réaliser toutes les fonctions logiques à partir de ces trois fonctions de base.

Fonction	Notation algébrique	Symbole
Négation (NON, *not*)	F = A’	
Conjonction (ET, *and*)	F = AB	
Disjonction (OU, *or*)	F = A + B	

A	F = A’
0	
1	

A	B	F = AB
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

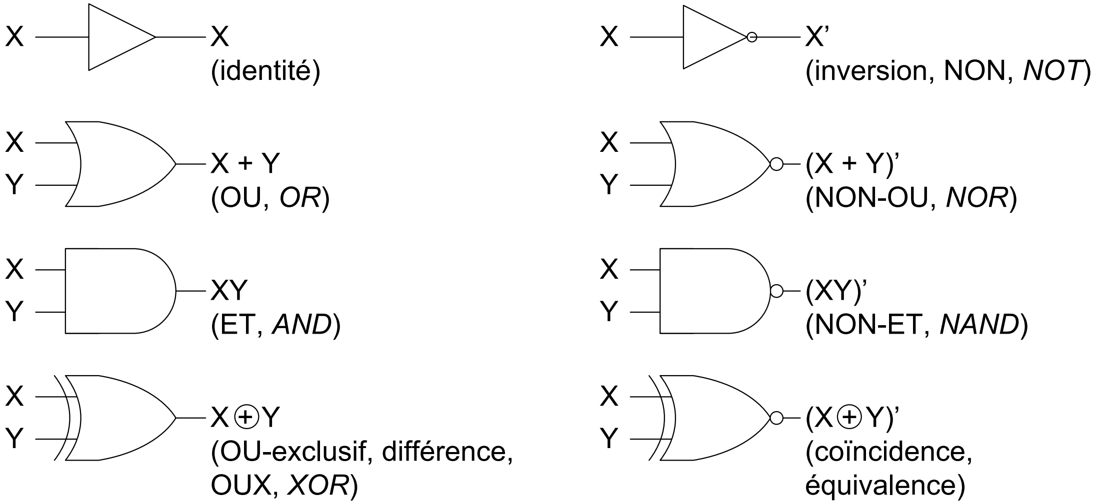
A	B	F = A + B
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Fonctions booléennes dérivées, symboles et tables de vérité

- Plusieurs fonctions peuvent être dérivées des trois fonctions de base, comme par exemple:
  - le NON-OU (*nor*);
  - le NON-ET (*nand*);
  - le OU-exclusif (*xor*) et l'équivalence (*xnor*).

$$F = X \oplus Y = X'Y + XY'$$

$$G = F' = X \otimes Y = X'Y' + XY$$



X	Y	F = (X + Y)'
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

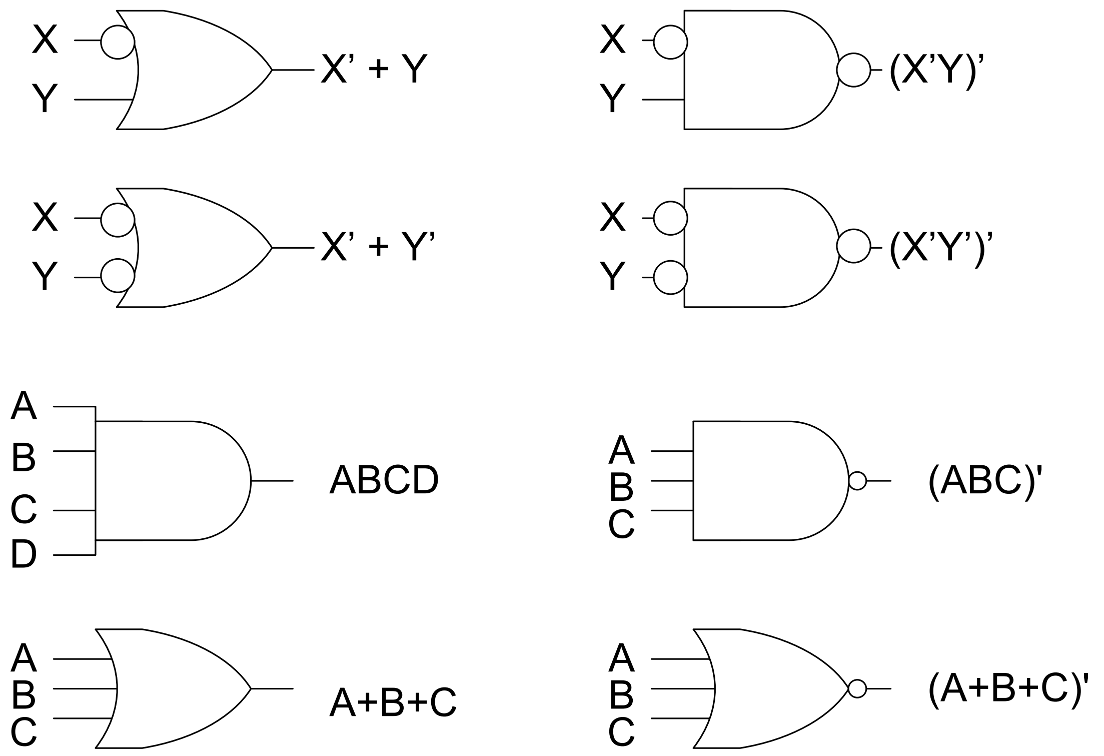
X	Y	F = (XY)'
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

X	Y	F = X xor Y
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

X	Y	F = X xnor Y
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Différentes portes logiques

- On peut ajouter une bulle aux entrées et aux sorties de portes logiques.
- Une bulle sur un port d’entrée ou de sortie signifie la négation du signal correspondant, comme si on ajoutait une porte NON.
- Toutes les portes logiques sauf la négation et l’identité peuvent avoir plus de deux entrées.



Tables de vérité

- Une table de vérité (*truth table*) énumère toutes les combinaisons d'entrées d'une fonction et donne la valeur de la fonction pour chacune des entrées.
- Une fonction à *n* entrées a une table de vérité comportant 2^n rangées.
- Par convention, on place les combinaisons d'entrées dans un ordre binaire croissant.
- Une table de vérité peut avoir plusieurs colonnes pour des fonctions de sortie.

A	B	C	G(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

A	F(A)
0	1
1	1

A	B	H(A, B)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Remplir une table de vérité à partir d’une équation booléenne

- Remplir une table de vérité à partir d’une équation booléenne revient à identifier pour quelles combinaisons d’entrée la valeur de la sortie est vraie (1) ou fausse (0).
- Le processus dépend de la formulation de l’équation booléenne:
  - Si l’équation est formulée en sommes de produits, chaque produit correspond à un cas où la fonction peut être vraie.
  - Si l’équation est formulée en produits de sommes, chaque somme correspond à un cas où la fonction peut être fausse.
  - Pour les formulations hybrides, il faut se débrouiller!

Somme de produits
$F = A' + AC' + BC + AB$

A	B	C	F
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Produits de sommes
$G = (A + B')(B + C)(A + C')$

A	B	C	G
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Donner une équation booléenne correspondant à une table de vérité

- Il est relativement facile de lire une équation booléenne non réduite à partir d'une table de vérité.
- Pour obtenir la somme de produits:
  - On énumère les termes de la fonction qui correspondent à une valeur de 1 de celle-ci.
  - Chaque terme est composé d'un produit (ET logique) de chaque variable de la fonction.
  - Une variable ayant la valeur 0 dans la rangée correspondante est complémentée.
- L'expansion en produit de sommes est similaire.

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Somme de produits
F = A'B'C'+A'B'C+ABC'

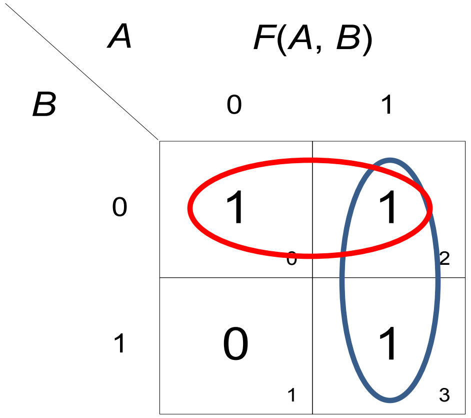
Simplification d’expressions booléennes

La simplification d’une expression booléenne a pour but d’éliminer la redondance qu’elle renferme.

Les trois méthodes les plus usitées sont:

1. L’application de règles et théorèmes d’algèbre booléenne.
2. L’utilisation de tables de Karnaugh.
3. L’utilisation de la méthode tabulaire de Quine-McCLuskey.

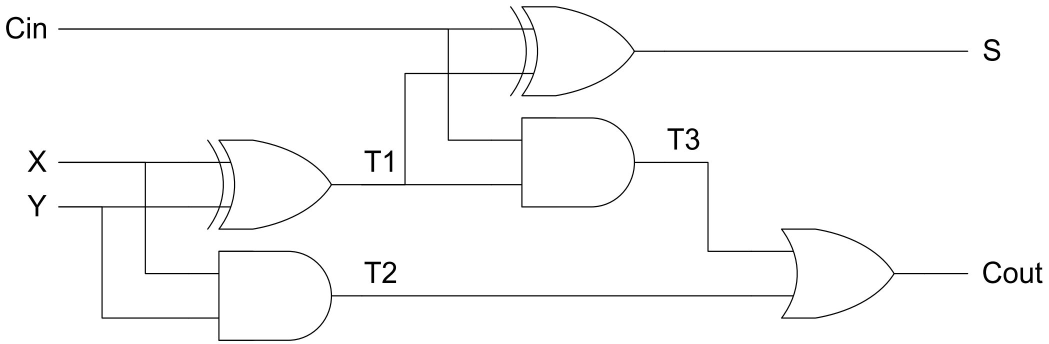
$$
\begin{aligned}
F &= A'B' + AB' + AB \\
&= A'B' + AB' + AB' + AB \\
&= (A' + A)B' + A(B' + B) \\
&= B' + A
\end{aligned}
$$



$F = B' + A$

Analyse d’un circuit logique combinatoire

Étant donné un circuit combinatoire, donner la fonction logique et la table de vérité de ses sorties.



Étapes d’analyse

1. Identifier les entrées et les sorties.
2. Identifier les signaux intermédiaires.
3. Écrire les équations booléennes des signaux intermédiaires et des sorties.
4. Dresser et remplir la table de vérité.

X	Y	Cin	T1	T2	T3	S	Cout
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Conception d’un circuit logique combinatoire

Étant donné la spécification d’un système combinatoire, donner un circuit logique correspondant.

Étapes de conception

1. Identifier les entrées et les sorties
2. Composer la table de vérité
3. Écrire les équations booléennes des sorties
4. (Réduire les équations booléennes)
5. Donner le circuit correspondant

Exemple

Une lampe doit s’allumer quand la clé est dans le contact et que la ceinture de sécurité n’est pas attachée.

1. Entrées: clé, ceinture. Sortie: Lampe.
2.

clé	ceinture	lampe
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

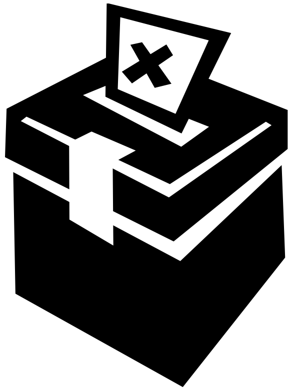
3. Lampe = clé ET ceinture’

Exemple de conception: le problème du vote

Un comité composé de quatre personnes a besoin d’un mécanisme de vote secret pour les amendements sur la constitution du comité.

Un amendement est approuvé si au moins 3 personnes votent pour.

Concevoir un circuit logique qui accepte 4 entrées représentant les votes. La sortie du circuit doit indiquer si l’amendement est accepté.



Étapes de design

1. Identifier les entrées et les sorties
2. Composer la table de vérité
3. Écrire les équations booléennes des sorties
4. (Réduire les équations booléennes)
5. Donner le circuit correspondant

Exemple de conception : le problème du vote

Un comité composé de quatre personnes a besoin d’un mécanisme de vote secret pour les amendements sur la constitution du comité.

Un amendement est approuvé si au moins 3 personnes votent pour.

Concevoir un circuit logique qui accepte 4 entrées représentant les votes. La sortie du circuit doit indiquer si l’amendement est accepté.

Étapes de design

1. Identifier les entrées et les sorties

Choisissons
A, B, C, D pour les entrées
F pour la sortie

Exemple de conception : le problème du vote

Un comité composé de quatre personnes a besoin d'un mécanisme de vote secret pour les amendements sur la constitution du comité.

Un amendement est approuvé si au moins 3 personnes votent pour.

Concevoir un circuit logique qui accepte 4 entrées représentant les votes. La sortie du circuit doit indiquer si l'amendement est accepté.

Étapes de design

2. Composer la table de vérité

A	B	C	D	F
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

Exemple de conception : le problème du vote

Un comité composé de quatre personnes a besoin d’un mécanisme de vote secret pour les amendements sur la constitution du comité.

Un amendement est approuvé si au moins 3 personnes votent pour.

Concevoir un circuit logique qui accepte 4 entrées représentant les votes. La sortie du circuit doit indiquer si l’amendement est accepté.

Étapes de design

3. Écrire les équations booléennes des sorties

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Exemple de conception : le problème du vote

Un comité composé de quatre personnes a besoin d'un mécanisme de vote secret pour les amendements sur la constitution du comité.

Un amendement est approuvé si au moins 3 personnes votent pour.

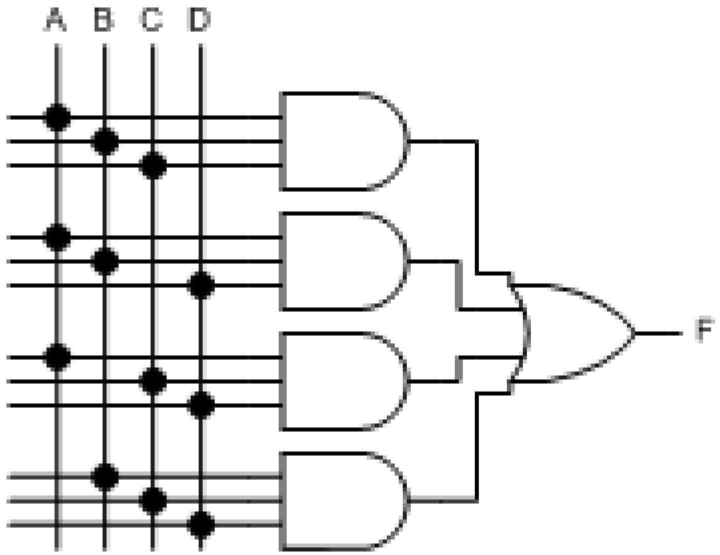
Concevoir un circuit logique qui accepte 4 entrées représentant les votes. La sortie du circuit doit indiquer si l'amendement est accepté.

Étapes de design

4. Réduire les équations booléennes

5. Donner le circuit correspondant

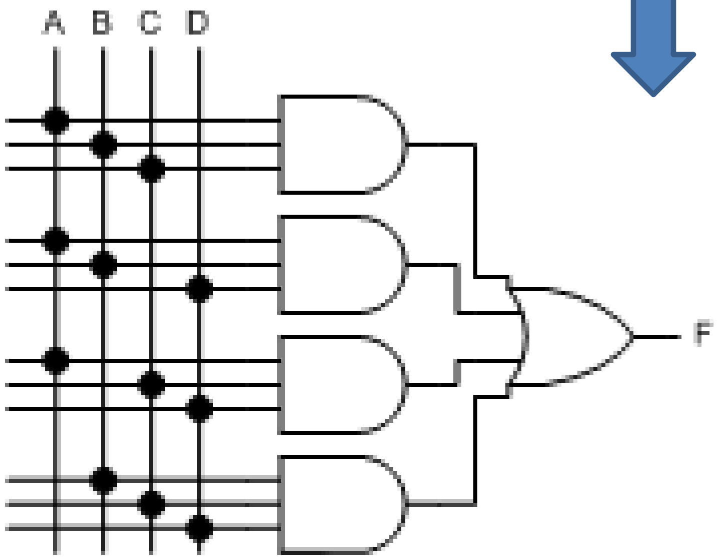
$$
\begin{aligned}
F &= A'BCD + AB'CD + ABC'D + ABCD' + ABCD \\
&= A'BCD + ABCD + AB'CD + ABCD + ABC'D + ABCD + ABCD' + ABCD \\
&= BCD(A'+A) + ACD(B'+B) + ABD(C'+C) + ABC(D'+D) \\
&= BCD(1) + ACD(1) + ABD(1) + ABC(1) \\
&= BCD + ACD + ABD + ABC
\end{aligned}
$$



Équivalence entre la table de vérité, l'équation booléenne et le circuit logique

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$
\begin{aligned}
F &= A'BCD + AB'CD + ABC'D + ABCD' + ABCD \\
&= A'BCD + ABCD + AB'CD + ABCD + ABC'D + ABCD + ABCD' + ABCD \\
&= BCD(A'+A) + ACD(B'+B) + ABD(C'+C) + ABC(D'+D) \\
&= BCD(1) + ACD(1) + ABD(1) + ABC(1) \\
&= BCD + ACD + ABD + ABC
\end{aligned}
$$



Rappel - analyse et synthèse de fonctions combinatoires

- Variables booléennes et valeurs logiques
- Fonctions booléennes
- Portes logiques
- Tables de vérité
- Analyse d’un circuit combinatoire
- Conception d’un circuit combinatoire

Exercices d'analyse d'un circuit logique combinatoire

Donner la table de vérité et l'équation booléenne correspondant aux circuits suivants.