MEC6212-Génération de maillages

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

RICARDO CAMARERO
École Polytechnique de Montréal
Montréal, Canada

Janvier 2010

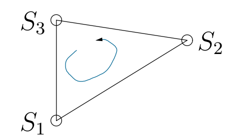
ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Contenu

1

Aire d'un triangle

Soit $S_1 = (x_1, y_1)^T$, $S_2 = (x_2, y_2)^T$ et $S_3 = (x_3, y_3)^T$, les trois sommets d'un triangle K.



Soit $\overline{S_1S_2} = (x_2 - x_1,\, y_2 - y_1)^T$, le vecteur de S_1 vers S_2 et $\overline{S_1S_3} = (x_3 - x_1,\, y_3 - y_1)^T$, le vecteur de S_1 vers S_3.

Aire d'un triangle

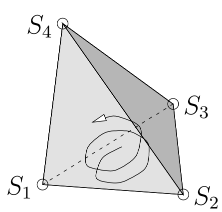
L'aire du triangle est donnée par la moitié de la norme du produit vectoriel de $\overline{S_1S_2}$ par $\overline{S_1S_3}$:

$$\begin{aligned}
\text{aire}(K) &= \frac{1}{2}\left|\overline{S_1S_2}\times\overline{S_1S_3}\right| = \frac{1}{2}\left\|\overline{S_1S_2}\right\|\,\left\|\overline{S_1S_3}\right\|\sin\theta, \\
&= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}, \\
&= \frac{1}{2}\left((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)\right).
\end{aligned}$$

si l'aire est positive, alors le triangle est orienté dans le sens trigonométrique. Si l'aire est négative, alors le triangle est orienté dans le sens horaire.

Volume d'un tétraèdre

Soit $S_1=(x_1,y_1,z_1)^T$, $S_2=(x_2,y_2,z_2)^T$, $S_3=(x_3,y_3,z_3)^T$ et $S_4=(x_4,y_4,z_4)^T$ les quatre sommets d'un tétraèdre K.



Soit $\overline{S_1S_2}=(x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1)^T$, le vecteur de S_1 vers S_2, $\overline{S_1S_3}=(x_3-x_1,\, y_3-y_1,\, z_3-z_1)^T$, le vecteur de S_1 vers S_3 et $\overline{S_1S_4}=(x_4-x_1,\, y_4-y_1,\, z_4-z_1)^T$, le vecteur de S_1 vers S_4.

Localisation d'un point dans un maillage

Volume d'un tétraèdre

Le volume du tétraèdre est donné par :

$$\text{vol}(K) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}.$$

Si le volume est positif, alors le tétraèdre est orienté suivant la règle de la main droite, sinon, alors le tétraèdre est orienté suivant la règle de la main gauche.

4

Coordonnées barycentriques

Les coordonnées barycentriques

$$\Lambda_K(P) = (\lambda_1(P), \lambda_2(P), \lambda_3(P))^T$$

d'un point P dans un triangle $K=\triangle S_1S_2S_3$, sont les valeurs des fonctions de Lagrange linéaires du triangle K évaluées au point P.

$$(\lambda_1(P), \lambda_2(P), \lambda_3(P))^T = (L_1(P), L_2(P), L_3(P))^T.$$

Par définition, la fonction de Lagrange linéaire $L_1(x)$ sur le segment x_1-x_0 est

$$L_1(x) = \frac{x_1-x}{x_1-x_0}$$

5

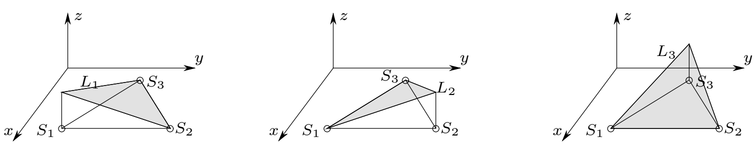
©Ricardo Camarero 2010

Fonctions de Lagrange sur le triangle K

Sur un triangle $K = \triangle S_1 S_2 S_3$ la fonction de Lagrange linéaire $L_1(P)$ vaut 1 en S_1 et 0 sur la droite passant par S_2 et S_3.
La fonction de Lagrange linéaire $L_2(P)$ est celle qui vaut 1 en S_2 et 0 sur la droite passant par S_1 et S_3.
La fonction de Lagrange linéaire $L_3(P)$ est celle qui vaut 1 en S_3 et 0 sur la droite passant par S_1 et S_2.

Les coordonnées barycentriques satisfont aussi la propriété suivante :

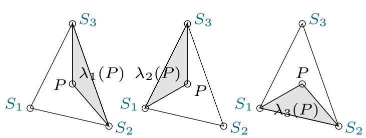
$$L_1(P) + L_2(P) + L_3(P) = 1 \quad \forall P \in^2 .$$



Évaluation des coordonnées barycentriques

Soit $K = \triangle S_1 S_2 S_3$, un triangle d'aire non nulle. Soit P, un point de ^{2}. Les coordonnées barycentriques du point P par rapport au triangle K sont données par

$$\begin{aligned}
\lambda_1(P) &= \mathrm{Aire}(\triangle P S_2 S_3)/\mathrm{Aire}(\triangle S_1 S_2 S_3),\\
\lambda_2(P) &= \mathrm{Aire}(\triangle S_1 P S_3)/\mathrm{Aire}(\triangle S_1 S_2 S_3),\\
\lambda_3(P) &= \mathrm{Aire}(\triangle S_1 S_2 P)/\mathrm{Aire}(\triangle S_1 S_2 S_3),
\end{aligned}$$



$$\lambda_1(P) + \lambda_2(P) + \lambda_3(P) = 1.$$

Localisation d'un point dans un maillage

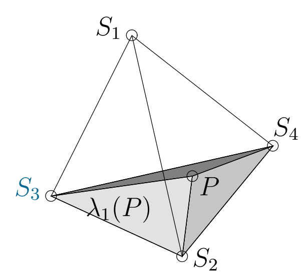
8

Coordonnées barycentriques sur un tétraèdre

Les coordonnées barycentriques en 3D sont une généralisation directe du 2D. Soit $K = \triangle S_1 S_2 S_3 S_4$, un tétraèdre de volume non nul. Soit P, un point de ^{3}. Les coordonnées barycentriques du point P par rapport au tétraèdre K sont données par

$$\begin{aligned}
\lambda_1(P) &= \mathrm{Volume}(\triangle P S_2 S_3 S_4)/\mathrm{Volume}(\triangle S_1 S_2 S_3 S_4),\\
\lambda_2(P) &= \mathrm{Volume}(\triangle S_1 P S_3 S_4)/\mathrm{Volume}(\triangle S_1 S_2 S_3 S_4),\\
\lambda_3(P) &= \mathrm{Volume}(\triangle S_1 S_2 P S_4)/\mathrm{Volume}(\triangle S_1 S_2 S_3 S_4),\\
\lambda_4(P) &= \mathrm{Volume}(\triangle S_1 S_2 S_3 P)/\mathrm{Volume}(\triangle S_1 S_2 S_3 S_4),
\end{aligned}$$

9



$$\lambda_1(P) + \lambda_2(P) + \lambda_3(P) + \lambda_4(P) = 1.$$

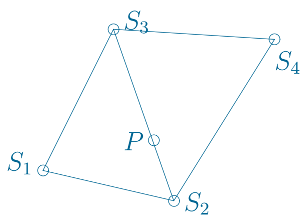
©Ricardo Camarero 2010

Appartenance d'un point à un triangle

Soit $K = \triangle S_1 S_2 S_3$, un triangle d'aire non nulle, P, un point de ^{2} et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$, les coordonnées barycentriques du point P.

$$P \in K \iff \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$
$$P \notin K \iff \exists i \mid \lambda_i < 0.$$

Numériquement, il faut mettre une tolérance car ces calculs sont en virgule flottante.



Calcul des angles internes d'un triangle

Soit $K = \triangle S_1 S_2 S_3$ un triangle, $\overline{S_1 S_2}$, $\overline{S_2 S_3}$, $\overline{S_3 S_1}$, les trois arêtes du triangle et l_{12}, l_{23} et l_{31} leurs longueurs respectives.

Les vecteurs $\vec{v}_{ij} = (\vec{S}_j - \vec{S}_i)/l_{ij}$ sont parallèles aux arêtes du triangles et sont de longueur unitaire. Alors, les trois angles internes du triangle K en S_1, S_2 et S_3 sont donnés par

$$\cos\theta_1 = -\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{31},$$
$$\cos\theta_2 = -\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{23},$$
$$\cos\theta_3 = -\vec{v}_{23} \cdot \vec{v}_{31}.$$

Pour obtenir le minimum, on n'est pas obligé de calculer explicitement l'angle par l'opération $\cos^{-1}$. L'angle minimum correspond au membre de droite maximum car le $\cos$ est une fonction décroissante entre 0 et π.

Algorithme de localisation d'un point P

Soit P, un point de ^{2} et $\mathcal{T}$, une triangulation composée de n simplexes (triangles ou tétraèdres). Trouver dans quel simplexe K de $\mathcal{T}$ est localisé P :

$\boxed{\text{trouve } P.}$

1. `i=1`
2. `trouvé=false`
3. Tant que `i<=n` et `trouvé=false`, faire :
   3.1. Récupérer le ième simplexe K.
   3.2. Calculer les coordonnées barycentriques du point P par rapport au simplexe K.
   3.3. Si le point P appartient au simplexe K :
   - Alors `trouvé=true` et retourne K et $\Lambda_K(P)$.
   - Sinon `i=i+1`

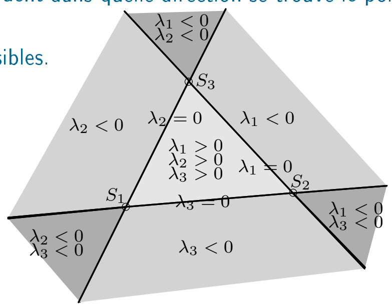
Coût de la localisation

(Si on a pas trouvé, on peut en profiter pour retourner le simplexe le plus proche du point et la distance de ce simplexe à ce point.)

C'est un algorithme d'ordre $\mathcal{O}(n^1)$, c-à-d proportionnel aux nombre de triangles visités. Si on utilise cet algorithme pour localiser un nombre de points proportionnel à la taille du maillage, le coût de la localisation est d'ordre $\mathcal{O}(n^2)$.

Localisation par proximité

La localisation par proximité est une méthode pour ne pas parcourir bêtement tous les simplexes. Si le point P n'est pas dans le triangle K, les coordonnées barycentriques indiquent dans quelle direction se trouve le point P par rapport au triangle K.
Il y a 7 régions possibles.



Pour un tétraèdre, il y a 21 régions possibles...

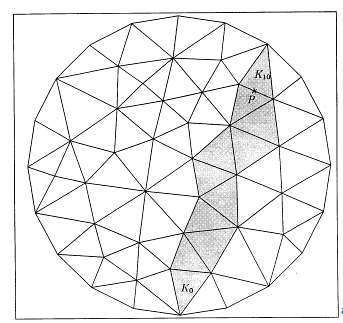
Algorithme

Soit P, un point de ^{2}, $\mathcal{T}$, une triangulation composée de n simplexes et $K_{initial}$, un simplexe initial. Dans quel simplexe K de $\mathcal{T}$ se trouve P.

1. `i=1`, `trouvé=false`, $K = K_{initial}$
2. Tant que `trouvé=false` et `i<=n`, faire :
   2.1. Récupérer le simplexe K.
   2.2. Calculer les coordonnées barycentriques du point P par rapport au simplexe K.
   2.3. Si le point P appartient au simplexe K
   - Alors `trouvé=true` et retourne K et $\Lambda_K(P)$.
     Sinon
   - `i=i+1`
   - Si il y a seulement une coordonnée barycentrique négative :
   - Poser K = le simplexe voisin par le côté négatif.
     Sinon,

- Poser K = le simplexe voisin par le côté le plus négatif ou un des côtés négatifs choisi aléatoirement.

Exemple



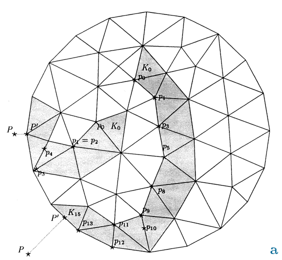
[a]

[a] De "Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs", Thèse de doctorat, M.-G. Vallet, p. 54

Remarques

- Toutes les $N+1$ coordonnées barycentriques ne peuvent pas être négatives puisque la somme des $N+1$ coordonnées barycentriques est égale à un.
- S'il y a plusieurs coordonnées barycentriques négatives, le chemin le plus court est donné en choisissant le simplexe voisin par le côté de la coordonnée barycentrique la plus négative.
- Il y a des cas pathologiques où l'algorithme de localisation par proximité tourne en rond. Alors, on choisit aléatoirement un des côtés correspondant aux coordonnées barycentriques négatives.
- C'est un algorithme d'ordre $\mathcal{O}(\sqrt[N]{n})$ dans le meilleur des cas (le nombre de voisins augmente beaucoup avec N). Si on utilise cet algorithme pour localiser un nombre de points proportionnel à la taille du maillage, le coût de la localisation est d'ordre $\mathcal{O}(\sqrt[N]{n^{N+1}})$.

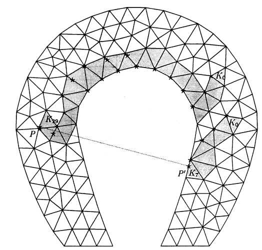
Point extérieur


[a]

Dans le cas d'un domaine convexe, la localisation d'un point extérieur à la triangulation retourne le triangle le plus près. On interpole en ce point, on extrapole jamais.

[a] De "Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs", Thèse de doctorat, M.-G. Vallet, p. 52

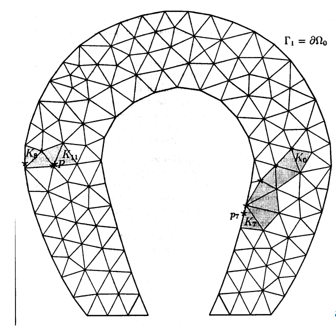
Domaine non convexe


[a]

Dans le cas d'un domaine *non* convexe, si on ne fait pas le tour de la frontière, on peut croire qu'un point intérieur serait à l'extérieur.

[a] De "Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs", Thèse de doctorat, M.-G. Vallet, p. 58

Domaine non convexe


[a]

Si on fait le tour de la frontière, on localise toujours un sommet intérieur.

[a] De "Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs", Ph.D., M.-G. Vallet, p. 61

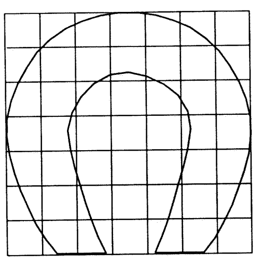
Problématique

L'algorithme de localisation est optimisé si le simplexe de départ $K_{initial}$ est proche du point à localiser. Dans ce cas, c'est un algorithme d'ordre $\mathcal{O}(n^0)$ pour un sommet et d'ordre $\mathcal{O}(n^1)$ si on localise un nombre de points proportionnel à la taille du maillage.

De plus, si on se sait près du point à localiser, on peut supposer que le domaine est localement convexe et on évite ainsi à faire le tour des frontières quand le point à localiser est extérieur.

Étant donné un point P à localiser, il faut pouvoir lui associer rapidement un autre point pour lequel on a stocké un simplexe de départ $K_{initial}$.

Grille régulière

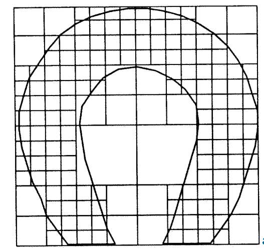

[a]

On peut rapidement calculer le sommet de la grille régulière qui se trouve le plus proche d'un point $P(x, y)$. Ce sommet pointe sur un simplexe de départ $K_{initial}$.

[a] De "Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs", Thèse de doctorat, M.-G. Vallet, p. 63

Initialisation de la localisation

Arbre binaire

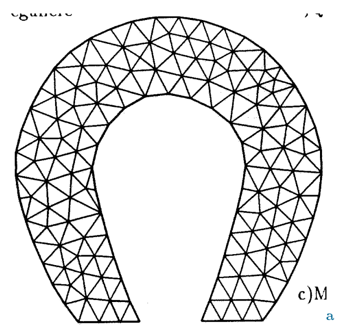

[a]

On parcourt l'arbre binaire pour trouver la cellule qui contient le point $P(x, y)$. Ce sommet pointe sur un simplexe de départ $K_{initial}$.

[a] De "Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs", Ph.D., M.-G. Vallet, p. 63

Initialisation de la localisation

Maillage triangulaire

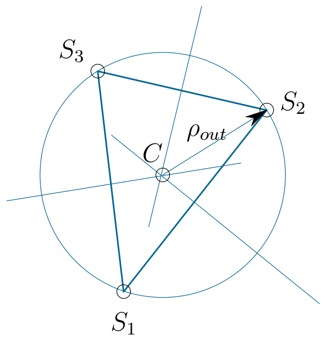


[a]

[a] De "Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs", Ph.D., M.-G. Vallet, p. 63

Boule circonscrite à un triangle

La boule circonscrite à un triangle $K = \triangle S_1 S_2 S_3$ est définie par son centre $C = (x_C, y_C)^T$ et son rayon ρ_{out}. Le centre est l'intersection des médiatrices des trois arêtes du triangle et à distance ρ_{out} des sommets S_1, S_2 et S_3.



Calcul de la boule circonscrite à un triangle

Pour $1 \le i < j \le 3$, ie, pour $(i,j) = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$, l'équation de la médiatrice de $\overline{S_i S_j}$

$$(x_C - x_i)^2 + (y_C - y_i)^2 = (x_C - x_j)^2 + (y_C - y_j)^2\,,$$

qui se réécrit comme

$$x_C(x_j - x_i) + y_C(y_j - y_i) = \frac{1}{2}\left(x_j^2 + y_j^2 - x_i^2 - y_i^2\right).$$

On obtient ainsi trois équations pour deux inconnues :

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 \\ x_3^2 + y_3^2 - x_1^2 - y_1^2 \\ x_3^2 + y_3^2 - x_2^2 - y_2^2 \end{pmatrix}$$

28

Calcul de la boule circonscrite à un triangle

On résout le système avec deux équations. Le rayon ρ_{out} est obtenu par calcul de la distance entre le centre et un sommet du triangle.
Si on a pas besoin du centre de la boule, il existe une formule donnant le rayon de la boule circonscrite :

$$\rho_{out} = l_1 l_2 l_3 / (4 A_K),$$

où l_i est la longueur de la $i$ième arête de K et A_K est l'aire de K.

29

Calcul de la boule circonscrite à un tétraèdre

Pour $1 \le i < j \le 4$, c'est-à-dire pour $(i,j) = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$, l'équation de la médiatrice de $\overline{S_i S_j}$

$$\begin{aligned}(x_C - x_i)^2 + (y_C - y_i)^2 + (z_C - z_i)^2 \\ = (x_C - x_j)^2 + (y_C - y_j)^2 + (z_C - z_j)^2\,,\end{aligned}$$

qui se réécrit comme

$$\begin{aligned}x_C(x_j - x_i) + y_C(y_j - y_i) + z_C(z_j - z_i) \\ = \frac{1}{2}\left(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2\right).\end{aligned}$$