Rappel: Parité d'une fonction et propriétés

MTH1102

Polytechnique Montréal

Table des matières

Rappel: Fonctions impaires

Définition

Une fonction est dite **impaire** en une variable x si elle respecte la condition suivante:

$$f(-x) = -f(x) \; \forall x \in D$$

où D est le domaine sur lequel la fonction est définie.

Exemple de fonctions impaires

1. $f(x) = x^{2n+1},\ n \in \mathbb{N}$ comme x^1, x^3, x^5, etc...
2. $f(x) = \sin(x)$

Rappel: Fonctions paires

Définition

Une fonction est dite **paire** en une variable x si elle respecte la condition suivante:

$$f(-x) = f(x)\ \forall x \in D$$

où D est le domaine sur lequel la fonction est définie.

Exemple de fonctions paires

1. $f(x) = a$ où a est une constante
2. $f(x) = x^{2n},\ n \in \mathbb{N}$
3. $f(x) = \cos(x)$

Paire ou impaire?

Voici quelques propriétés permettant de déterminer si une fonction est paire ou si une fonction est impaire.

- Seule la fonction nulle est à la fois impaire et paire: $f(x) = 0$
- Addition: $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$ est impaire si g_1 et g_2 sont impaires et paire si g_1 et g_2 sont paires.
- Multiplication: $f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$ est paire si g_1 et g_2 sont paires ou si g_1 et g_2 sont impaires. Si g_1 est impaire et g_2 est paire, alors f est impaire. Bref, c'est le même comportement que pour les signes.

Paire ou impaire? (suite)

- Une fonction peut être ni impaire, ni paire. Par exemple: $f(x) = x^2 + x^3$. Mais, il est souvent possible de facilement la séparer en termes paires et impaires.
- La composée $f(x) = g_1(g_2(x))$ de deux fonctions impaires g_1 et g_2 est impaire. Par exemple $g_1(x) = x^5$ et $g_2(x) = x^3$ donne $f(x) = (x^3)^5 = x^{15}$.
- La composée $f(x) = g_1(g_2(x))$ d'une fonction paire g_1 et d'une fonction impaire g_2 est paire. Par exemple $g_1(x) = x^2$ et $g_2(x) = x^3$ donne $f(x) = (x^3)^2 = x^6$.
- La composée $f(x) = g_1(g_2(x))$ d'une fonction quelconque g_1 et d'une fonction paire g_2 est paire. Par exemple $g_1(x) = x^2$ et $g_2(x) = x^3$ donne $f(x) = (x^3)^2 = x^6$.

Amusez-vous à prouver quelques-unes de ces propriétés!

Intégrales et parité d'une fonction

Propriétés pour le calcul d'intégrales

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

si f est impaire

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

si f est paire

où a est une constante quelconque.

Application aux intégrales doubles

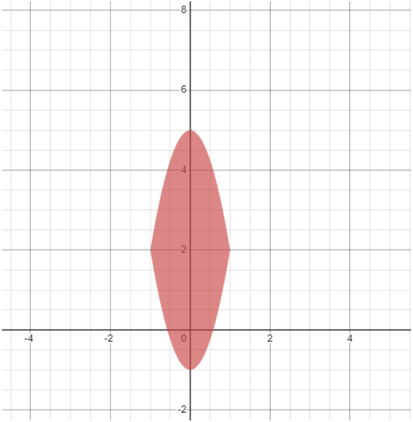
Voici un exemple d'utilisation de la parité d'une fonction dans le calcul d'une intégrale double. Calculez l'intégrale suivante:

$$\mathtt{I} = \iint_D x^3 y^2 \sin(x^2 + y^2)\, dA$$

où D est la région borné par les courbes $y = 3x^2 - 1$ et $y = -3x^2 + 5$

Application aux intégrales doubles (suite)

Le domaine D est donc le suivant:



Application aux intégrales doubles (suite)

Quel est la parité de cette fonction?

$x^2 + y^2$ est paire en x et en y. Donc $\sin(x^2 + y^2)$ est paire en x et en y puisque nous avons la composée d'une fonction impaire avec une fonction paire. Puisque x^3 est impaire en x et $\sin(x^2 + y^2)$ est paire en x, la multiplication de ces deux fonctions donne une fonction impaire en x. Puisque y^2 est paire en y et $\sin(x^2 + y^2)$ est paire en y. Notre fonction est paire en y.

Application aux intégrales doubles (suite)

Les intersections des deux courbes sont $(1, 2)$ et $(-1, 2)$

$$3x^2 - 1 = -3x^2 + 5 \implies x^* = \pm 1$$
$$\implies y^* = 3(x^*)^2 - 1 = 3(1) - 1 = 2$$

Application aux intégrales doubles (suite)

Il serait donc possible d'écrire cette intégrale double de la manière suivante:

$$\int_{-1}^{1}\int_{3x^2-1}^{-3x^2+5} x^3y^2\sin(x^2+y^2)dydx$$

Or, de cette manière, il n'est pas évident de voir la symétrie du domaine par rapport à l'axe des y.

Application aux intégrales doubles (suite)

En changeant l'ordre d'intégration, obtient l'expression suivante pour l'intégrale $\mathtt{I}$:

$$\int_2^5 \int_{-\sqrt{\frac{5-y}{3}}}^{\sqrt{\frac{5-y}{3}}} x^3y^2 \sin(x^2+y^2)dxdy + \int_{-1}^2 \int_{-\sqrt{\frac{y+1}{3}}}^{\sqrt{\frac{y+1}{3}}} x^3y^2 \sin(x^2+y^2)dxdy$$

Puisque la fonction est impaire en x et que les bornes inférieures et supérieures en x sont les mêmes à un signe près pour les deux termes. On a $\mathtt{I} = 0$.

Application aux intégrales doubles (conclusion)

En conclusion, si une fonction à intégrer est impaire pour une variable donnée et qu'il est possible d'écrire votre domaine de manière à ce que les bornes pour cette même variable soient les mêmes à un signe près, la valeur de l'intégrale sera 0. Dans notre exemple, nous avons séparé notre domaine en deux domaines disjoints sur lesquels les bornes de nos intégrales en x étaient symétriques. C'est-à-dire que notre domaine était symétrique par rapport à l'axe y.

Exemple de justification des calculs en 2D

Pour justifier la valeur de l'intégrale précédente il faudrait écrire.

Puisque le **domaine d'intégration est symétrique par rapport à l'axe y** et la **fonction est impaire en x**, alors l'intégrale $\mathtt{I}$ est nulle.

Exemple de justification des calculs en 3D

Pour l'intégrale triple suivante:

$$\mathrm{I} = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{-h(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\ dzdydx$$

Si $f(x,y,z)$ est impaire en z, $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$, alors il faudrait justifier la réponse de la manière suivante.

$\mathrm{I} = 0$ puisque le **domaine est symétrique par rapport au plan xy** et la **fonction est impaire en z**.