MTH 8302 - Modèles de Régression et d'Analyse de Variance

Leçon 4 : Modèles Linéaires Généralisés et Méthodes Classiques d'Apprentissage Supervisé

Polytechnique Montréal - Hiver 2025

Chiheb Trabelsi

April 9, 2025

Table des Matières

1 Modèles Linéaires Généralisés

2 Regression Logistique

3 Analyse Linéaire Discriminante

4 Annexe

Modèles Linéaires Généralisés

Modèles Linéaires Généralisés : Introduction

Modèles Linéaires Généralisés : Introduction

- Dans le cadre de la régression linéaire, l'objectif est de modéliser une relation entre :
  - une variable réponse continue $Y \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$
  - à partir de variables explicatives $X_1, \ldots, X_p \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times (p+1)}$.
- Cette relation est exprimée à l'aide d'un modèle de linéaire :

$$Y = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{où } \boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n),$$

  - où $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{(p+1)}$ est le vecteur des paramètres à estimer.
- L'estimation des paramètres se fait typiquement par moindres carrés ou maximum de vraisemblance, ce qui revient à trouver l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, tel que:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\beta}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2$$

- Cette approche est efficace **si les hypothèses sont vérifiées :**
  - Simple à mettre en oeuvre.
  - Interprétable puisque chaque β_j mesure l'effet linéaire de X_j.

Modèles Linéaires Généralisés : Introduction

- Cependant, les hypothèses considérées dans cette approche sont fortes :
  - $Y \in \mathbb{R}$ est nécessairement continue.
  - Les erreurs ϵ sont gaussiennes, centrées et homoscédastiques.
  - La relation entre Y et les X_j est linéaire.
- **Que se passe-t-il si Y n'est pas continue ?**
- **Exemples réalistes :**
  - $Y \in \{0, 1\}$ (binaire) : Prédire si un patient est malade (oui/non), si un client remboursera son prêt, etc.
  - $Y \in \mathbb{N}$: Nombre d'appels reçus dans un call center, nombre d'accidents dans une intersection, etc.
- **Problèmes de la régression linéaire dans ces cas :**
  - **Incohérence** : Prédictions négatives ou > 1.
  - **Statistiquement sous-optimale** : Ne tient pas compte de la distribution naturelle de Y.
  - **Peu performante** : Mauvaise généralisation.

Modèles Linéaires Généralisés : Introduction

- L'objectif est de généraliser les modèles linéaires classiques pour les rendre compatibles avec des situations où :
  - La variable cible Y n'est pas continue.
  - On veut modéliser des probabilités, des décomptes, voire même des proportions.
  - On souhaite garder une structure linéaire dans l'espace des variables explicatives X_j, tout en respectant la distribution naturelle de Y.
- **Solution :** Introduire les **Modèles Linéaires Généralisés** (GLM : *Generalized Linear Models*), qui permettent de :
  - Étendre la régression linéaire à **d'autres types de variables cibles.**
  - Garder une structure linéaire dans l'espace des prédicteurs X_j. Cela repose sur une idée simple mais efficace : Relier $\mathbb{E}[Y \mid X_1, \ldots, X_p]$, l'espérance de Y à une combinaison linéaire des variables explicatives X_j **via une fonction de lien adaptée notée g.**
  - **Tenir compte de la distribution de Y.** Cela permet d'intégrer des modèles comme :
    - La régression logistique (Y binaire $\Rightarrow Y \sim$ Bernoulli(p)).
    - La régression de Poisson (décompte $\Rightarrow Y \sim$ Poisson(λ)).
    - Etc.

La Famille Exponenielle des Distributions et Composantes des Modèles Linéaires Généralisés

La Famille Exponenielle et Composantes des GLM

- Notation adoptée :
  - $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}$: variables aléatoires.
  - $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}$: Réalisations (valeurs observées) respectives des variables aléatoire $\mathbf{Y}$ et Y

  Dans une fonction de densité, on écrit :

$$f_Y(y; \theta, \phi)$$

  - $f_Y(\cdot)$ désigne la densité de la variable aléatoire Y,
  - y est la valeur sur laquelle la densité est évaluée.

- L'expression de la densité de la famille exponentielle est donnée par :

$$f_Y(y; \theta, \phi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)\right).$$

  - Y est bien la variable aléatoire (indiquée dans l'indice de f_Y),
  - y est la variable d'intégration ou d'évaluation (la réalisation de Y).

La Famille Exponenielle et Composantes des GLM

- L'expression de la densité de la famille exponentielle est donnée par :

$$f_Y(y;\theta,\phi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right).$$

Signification des différentes composantes :

- y : réalisation de la variable aléatoire Y
- θ : paramètre naturel (ou canonique) de la distribution
- ϕ : paramètre de dispersion (ou fixé à 1 selon le contexte)
- $a(\phi)$: fonction de pondération de la dispersion (souvent $a(\phi) = \phi$)
- $b(\theta)$: fonction log-partition (fonction de normalisation logarithmique) qui garantit l'intégrabilité à 1. Elle détermine la moyenne et la variance de Y.
- $c(y,\phi)$: fonction indépendante de θ, absorbant les termes restants pour assurer la normalisation.

- **Propriétés des Moments de la distribution (Preuve Ici):**
  - $\mathbb{E}[Y] = \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta} = b'(\theta)$
  - $\text{Var}(Y) = a(\phi)\frac{\partial b(\theta)}{\partial^2 \theta} = a(\phi) \cdot b''(\theta)$
- **Remarque :** Cette forme permet d'exprimer une large famille de distributions usuelles dans un même cadre probabiliste.

La Famille Exponenielle et Composantes des GLM

Un GLM est défini par 3 composantes fondamentales :

1. **La distribution de la variable cible** Y
   - Y suit une distribution **appartenant à la famille exponentielle :**
     - **loi normale** (régression linéaire)
     - **loi de Bernoulli** (régression logistique)
     - **loi de Poisson** (décomptes)
     - autres : binomiale, gamma, inverse-gaussienne, etc.
   - Forme générale :

$$f_Y(y;\theta) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right)$$

2. **La fonction de lien** g
   - Relie $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}]$ au prédicteur linéaire $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$
   - $g(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, (avec g appliqué élément par élément).
   - Le choix du lien dépend de la distribution de Y :
     - **Logit** pour Bernoulli
     - **Log** pour Poisson
     - **Identité** pour normale
3. **Le prédicteur linéaire** η
   - $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$.
   - Permet une estimation par maximum de vraisemblance.

La Famille Exponenielle et Composantes des GLM

2. La fonction de lien g

- Pour une $i$ème observation individuelle $\mathbf{x}_i$, la fonction de lien relie l'espérance conditionnelle $\mu_i = \mathbb{E}[Y_i \mid \mathbf{X}_i = \mathbf{x}_i]$ au prédicteur linéaire $\eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$:

$$g(\mu_i) = \eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$$

- Pour l'ensemble des n observations, on définit les vecteurs :

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}], \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

- La fonction de lien s'applique alors élément par élément :

$$g(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\eta}$$

3. Le prédicteur linéaire $\boldsymbol{\eta}$

- Pour une observation : $\eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$
- Pour l'échantillon : $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$
- Il constitue le coeur du modèle linéaire généralisé et permet de relier l'espace des variables explicatives à $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}]$.
- Il permet l'estimation de $\boldsymbol{\beta}$ par maximum de vraisemblance.

Étapes pour Vérifier qu'une loi appartient à la famille exp

- **Objectif :** Vérifier si la densité $f_Y(y)$ appartient à la famille exponentielle des distributions et pourrait donc s'écrire comme:

$$f_Y(y;\theta,\phi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right)$$

- **Étapes à suivre :**
  1. **Écrire la densité dans sa forme classique.**
     Exemple : loi normale, Bernoulli, Poisson...
  2. **Mettre la densité sous forme exponentielle.**
     Identifier les termes permettant d'aboutir à la forme canonique.
  3. **Identifier les composantes du modèle exponentiel :**
     - θ : paramètre naturel
     - ϕ : paramètre de dispersion
     - $a(\phi)$: fonction de pondération
     - $b(\theta)$: fonction log-partition
     - $c(y,\phi)$: fonction de normalisation

Étapes pour Vérifier qu'une loi appartient à la famille exp

4. **Calculer les moments :**

$$\mathbb{E}[Y] = b'(\theta), \quad \text{Var}(Y) = a(\phi) \cdot b''(\theta)$$

5. **Déterminer la fonction de lien canonique :**

$$g(\mu) = \theta \quad \Rightarrow \quad \mu = b'(\theta)$$

6. **Exprimer le prédicteur linéaire du GLM :**

$$\eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \quad \text{avec } g(\mu_i) = \eta_i$$

7. **Conclure :**
   - La loi appartient à la famille exponentielle.
   - Elle peut être modélisée via un GLM avec :
     - Fonction de lien : $g(\cdot)$

Exercice : Montrons que la loi normale de $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ appartient à la famille exponentielle des densités.

Exercice : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

Q1. Quelle est la densité d'une variable $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$?

A. $\exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$

B. $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

C. $\frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

Exercice : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

Q1. Quelle est la densité d'une variable $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$?
Réponse correcte : B
La densité d'une loi normale est bien :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Exercice : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

Q2. Développer l'expression $(y - \mu)^2$

A. $y^2 + \mu^2$

B. $y^2 - 2y\mu + -\mu^2$

C. $y^2 + 2y\mu + \mu^2$

D. $y^2 - 2\mu y + \mu^2$

Exercice : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

Q2. Développer l'expression $(y-\mu)^2$

Réponse correcte : D

On a : $(y-\mu)^2 = y^2 - 2y\mu + \mu^2$

Exercice : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

Q3. Mise sous forme exponentielle : quelle est la bonne forme ?

A. $\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} + \frac{y\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \log(2\pi\sigma^2)\right)$

B. $\exp\left(\frac{y\mu - \mu^2/2}{\sigma^2} - \frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right)$

C. $\exp\left(\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

D. $\exp\left(\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$

Exercice : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

Q3. Mise sous forme exponentielle : quelle est la bonne forme ?

Réponse correcte : B

C'est la bonne mise sous la forme : $\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)$

Exercice : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

Q4. Quelles sont les expressions correctes ?

A. $\theta = \mu$, $a(\phi) = \phi = \sigma^2$, $b(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2$

B. $\theta = y$, $b(\theta) = \mu^2$, $a(\phi) = \sigma^2$

C. $\theta = \sigma^2$, $b(\theta) = \theta^2$, $a(\phi) = \mu$

D. $\theta = \mu$, $b(\theta) = \mu^2$, $a(\phi) = \phi^2$

Exercice : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

Q4. Quelles sont les expressions correctes ?

Réponse correcte : A

On identifie bien : $\theta = \mu$, $b(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2$, $a(\phi) = \phi = \sigma^2$

Exercice : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

Q5. Que valent les moments de Y ?

A. $\mathbb{E}[Y] = \theta$, $\text{Var}(Y) = \phi$

B. $\mathbb{E}[Y] = b''(\theta)$, $\text{Var}(Y) = \phi b'(\theta)$

C. $\mathbb{E}[Y] = b'(\theta) = \theta$, $\text{Var}(Y) = a(\phi)b''(\theta) = \phi$

D. $\mathbb{E}[Y] = \mu$, $\text{Var}(Y) = \mu^2$

Exercice : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

Q5. Que valent les moments de Y ?

Réponses correctes : A et C

$\mathbb{E}[Y] = b'(\theta) = \theta = \mu$, $\mathsf{Var}(Y) = a(\phi) \cdot b''(\theta) = \phi$

Exercice : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

Q6. La régression linéaire est-elle un GLM ?

A. GLM avec loi normale, lien log

B. GLM avec loi normale, lien identité

C. Ce n'est pas un GLM car Y est continu

D. GLM avec fonction de lien logit

Exercice : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

Q6. La régression linéaire est-elle un GLM ?
Réponse correcte : B
Régression linéaire = GLM avec loi normale et la fonction identité comme lien.

Solution de l'Exercice : Montrons que la loi normale de $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ appartient à la famille exponentielle des densités.

Solution : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

- Montrons que la loi normale de $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ **appartient à la famille exponentielle des densités:**

$$f_Y(y;\theta) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right)$$

- **Étape 1 : Écrire la densité de la loi normale**

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- **Étape 2 : Mise sous forme exponentielle**

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y^2 - 2y\mu + \mu^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} + \frac{y\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right) \\ &= \exp\left(\frac{y\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right) \end{aligned}$$

Solution : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

- **Étape 2 : Mise sous forme exponentielle**

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y^2 - 2y\mu + \mu^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} + \frac{y\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right) \\
&= \exp\left(\frac{y\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right) \\
&= \exp\left(\frac{y\mu - \mu^2/2}{\sigma^2} - \frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right)
\end{aligned}
$$

On reconnaît :

$$
f_Y(y) = \exp\left(\underbrace{\frac{y\mu - \mu^2/2}{\sigma^2}}_{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)}} + \underbrace{-\frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)}_{c(y,\phi)}\right)
$$

Solution : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

- **Étape 3 : Identification des termes** On reconnaît :

$$f_Y(y) = \exp\left(\underbrace{\frac{y\mu - \mu^2/2}{\sigma^2}}_{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)}} + \underbrace{-\frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)}_{c(y,\phi)} \right)$$

- **Identification :**
  - $\theta = \mu$: le paramètre canonique est l'espérance μ.
  - $a(\phi) = \phi = \sigma^2$, $b(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2$.
  - $c(y, \phi) = -\frac{y^2}{2\phi} - \frac{1}{2}\log(2\pi\phi)$.
  - Fonction de lien canonique : $g(\mu) = \theta = \mu \Rightarrow g(\mu) = \mu$.
- **Donc :**
  - Le lien est l'identité : $\mu = \eta$
  - Le prédicteur linéaire est $\eta = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \mu = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$

Conclusion : La régression linéaire est un GLM avec :

$$Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2), \quad \mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$$

Solution : La Loi Normale $\in$ Famille Exponentielle ?

Composante du GLM	**Régression linéaire**
Distribution de Y	$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Paramètre naturel θ	$\theta = \mu$
Paramètre de dispersion ϕ	$\phi = \sigma^2$
Fonction de lien $g(\mu)$	$g(\mu) = \mu$ (identité)
Prédicteur linéaire η	$\eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$
Lien entre μ_i et η_i	$\mu_i = \eta_i \Rightarrow \mu = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$
Méthode d'estimation	Maximum de vraisemblance (OLS)

Conclusion : La régression linéaire *est* un GLM avec loi normale, lien identité, estimation par moindres carrés.

Exercice : Montrons que la loi de Poisson $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ appartient à la famille exponentielle.

Exercice : La Loi de Poisson $\in$ Famille Exponentielle ?

Q1. Quelle est la fonction de masse de $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$?

A. $f_Y(y) = \lambda^y \exp(-\lambda)$

B. $f_Y(y) = \dfrac{\lambda^y}{y!} \exp(-\lambda)$

C. $f_Y(y) = \exp(-\lambda y)$

D. $f_Y(y) = \dfrac{1}{y!} \exp(\lambda^y - \lambda)$

Exercice : La Loi de Poisson $\in$ Famille Exponentielle ?

Q1. Quelle est la fonction de masse de $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$?
Réponse correcte : B
La fonction de masse est :

$$f_Y(y) = \frac{\lambda^y}{y!} \exp(-\lambda), \quad y \in \mathbb{N}$$

Exercice : La Loi de Poisson $\in$ Famille Exponentielle ?

Q2. Mise sous forme exponentielle : quelle est la bonne forme ?

A. $\exp\left(y \log \lambda - \lambda - \log y!\right)$

B. $\exp\left(\lambda y - \lambda^2 - \log y!\right)$

C. $\exp\left(y\lambda - \lambda - y^2\right)$

D. $\exp\left(y + \lambda - y \log y\right)$

Exercice : La Loi de Poisson $\in$ Famille Exponentielle ?

Q2. Mise sous forme exponentielle : quelle est la bonne forme ?
Réponse correcte : A
On reconnaît la forme exponentielle :

$$f_Y(y) = \exp\left(y \log \lambda - \lambda - \log y!\right)$$

Exercice : La Loi de Poisson $\in$ Famille Exponentielle ?

Q3. Quels sont les bons choix pour les composantes du modèle exponentiel ?

A. $\theta = \log \lambda$, $b(\theta) = e^{\theta}$, $a(\phi) = 1$

B. $\theta = \lambda$, $b(\theta) = \log \theta$, $a(\phi) = \phi = \lambda$

C. $\theta = \lambda$, $b(\theta) = \theta$, $a(\phi) = 1$

D. $\theta = \log \lambda$, $b(\theta) = \theta^2$, $a(\phi) = \lambda$

Exercice : La Loi de Poisson $\in$ Famille Exponentielle ?

Q3. Quels sont les bons choix pour les composantes du modèle exponentiel ?

Réponse correcte : A

En effet, on a :

$$\boxed{\theta = \log \lambda, \quad b(\theta) = e^{\theta} = \lambda, \quad a(\phi) = 1}$$

Exercice : La Loi de Poisson $\in$ Famille Exponentielle ?

Q4. Que valent les moments de $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$?

A. $\mathbb{E}[Y] = \theta$, $\text{Var}(Y) = \theta$

B. $\mathbb{E}[Y] = b'(\theta) = e^{\theta}$, $\text{Var}(Y) = b''(\theta) = e^{\theta}$

C. $\mathbb{E}[Y] = b''(\theta)$, $\text{Var}(Y) = a(\phi)b'(\theta)$

D. $\mathbb{E}[Y] = \log(\lambda)$, $\text{Var}(Y) = \lambda^2$

Exercice : La Loi de Poisson $\in$ Famille Exponentielle ?

Q4. Que valent les moments de $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$?
Réponse correcte : B
On a :

$$\mathbb{E}[Y] = b'(\theta) = e^{\theta} = \lambda, \quad \text{Var}(Y) = b''(\theta) = e^{\theta} = \lambda$$

Exercice : La Loi de Poisson $\in$ Famille Exponentielle ?

Q5. La régression de Poisson est-elle un GLM ?

A. GLM avec loi de Poisson, lien identité

B. GLM avec loi de Poisson, lien carré

C. GLM avec loi de Poisson, lien log

D. Ce n'est pas un GLM car Y est discrète

Exercice : La Loi de Poisson $\in$ Famille Exponentielle ?

Q5. La régression de Poisson est-elle un GLM ?
Réponse correcte : C
Lien canonique de la loi de Poisson : $g(\mu) = \log \mu$ (car $\theta = \log \lambda = \log \mu$)

Solution de l'Exercice : Montrons que la loi de Poisson $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ appartient à la famille exponentielle.

Solution : La Loi de Poisson $\in$ Famille Exponentielle ?

- **Étape 1 : Écrire la densité de la loi de Poisson $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$:**

$$f_Y(y) = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}, \quad y \in \mathbb{N}$$

- **Étape 2 : Mettre l'expression sous forme exponentielle :**

$$f_Y(y) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)\right)$$

- On écrit alors:

$$f_Y(y) = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} = \exp\left(y \log \lambda - \lambda - \log y!\right)$$

- **Étape 3 : Identification des termes**
  Cela ressemble à :

$$f_Y(y) = \exp\left(y\theta - b(\theta) + c(y)\right),$$

  avec :

$$\theta = \log \lambda, \quad b(\theta) = e^\theta = \lambda, \quad c(y) = -\log y!$$

Solution : Moments

- On vient d'exprimer $f_Y(y)$ sous forme exponentielle où l'on a:

$$f_Y(y) = \exp\left(y\theta - b(\theta) + c(y)\right)$$

avec :

$$\theta = \log\lambda, \quad b(\theta) = e^\theta = \lambda, \quad c(y) = -\log y!$$

- Dans la forme canonique exponentielle, on a :

$$\mathbb{E}[Y] = b'(\theta), \quad \text{Var}(Y) = a(\phi)\cdot b''(\theta)$$

- Or :

$$b(\theta) = e^\theta \Rightarrow b'(\theta) = e^\theta = \lambda, \quad b''(\theta) = e^\theta = \lambda$$

- Donc :

$$\mathbb{E}[Y] = \lambda, \quad \text{Var}(Y) = 1\cdot\lambda = \lambda$$

Solution : La Loi de Poisson $\in$ Famille Exponentielle ?

- **Étape 3 : Identification des termes**
  On reconnaît :

$$f_Y(y) = \exp\left(\underbrace{y\log\lambda - \lambda}_{y\theta - b(\theta)} + \underbrace{-\log y!}_{c(y)}\right)$$

- **Identification :**
  - $\theta = \log\lambda$: le paramètre canonique est le logarithme de l'espérance.
  - $b(\theta) = e^\theta = \lambda$
  - $a(\phi) = 1$, car il n'y a pas de paramètre de dispersion dans le modèle de Poisson.
  - $c(y, \phi) = -\log y!$
  - $\mathbb{E}[Y] = \lambda = \mu$.
  - Fonction de lien canonique :
    $g(\mu) = \theta = \log\lambda = \log\mu \Rightarrow g(\mu) = \log\mu$
- **Donc :**
  - Le lien est logarithmique : $\log\mu = \eta$
  - Le prédicteur linéaire est : $\eta = \mathbf{x}_i^\top\boldsymbol{\beta} \Rightarrow \mu = \exp(\mathbf{x}_i^\top\boldsymbol{\beta})$.

Récapitulatif : Poisson = GLM

Composante du GLM	**Régression de Poisson**
Distribution de Y	$Y \sim \mathcal{P}(\mu)$
Paramètre naturel θ	$\theta = \log \mu$
Paramètre de dispersion ϕ	$\phi = 1$
Fonction de lien $g(\mu)$	$g(\mu) = \log \mu$
Prédicteur linéaire η	$\eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$
Lien entre μ_i et η_i	$\mu_i = \exp(\eta_i) \Rightarrow \mu_i = \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$
Méthode d'estimation	Maximum de vraisemblance

Conclusion : La régression de Poisson est un GLM avec lien log et distribution de Poisson :

$$Y_i \sim \mathcal{P}(\mu_i), \quad \mu_i = \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}).$$

Exercice : Estimation par Maximum de Vraisemblance pour la Régression de Poisson

QCM 1 : MV pour la Régression de Poisson

Question : Quelle est l'expression correcte de la fonction de masse de probabilité pour une variable aléatoire $Y_i \sim \mathcal{P}(\mu_i)$?

A. $\mathbb{P}(Y_i = y_i) = \mu_i^{y_i} \exp(-\mu_i)$

B. $\mathbb{P}(Y_i = y_i) = \frac{\mu_i^{y_i} \exp(-\mu_i)}{y_i!}$

C. $\mathbb{P}(Y_i = y_i) = \frac{y_i^{\mu_i} \exp(-y_i)}{\mu_i!}$

D. $\mathbb{P}(Y_i = y_i) = \mu_i \cdot \exp(-y_i)$

QCM 1 : MV pour la Régression de Poisson

Question : Quelle est l'expression correcte de la fonction de masse de probabilité pour une variable aléatoire $Y_i \sim \mathcal{P}(\mu_i)$?
Bonne réponse : B

Justification : C'est la définition exacte de la loi de Poisson :

$$\mathbb{P}(Y_i = y_i) = \frac{\mu_i^{y_i} \exp(-\mu_i)}{y_i!}$$

QCM 2 : MV pour la Régression de Poisson

Question : Dans le modèle de régression de Poisson, quel lien exprime correctement l'espérance μ_i en fonction des variables explicatives $\mathbf{x}_i$?

A. $\mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$

B. $\mu_i = \log(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$

C. $\log(\mu_i) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$

D. $\mu_i = \sqrt{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}$

QCM 2 : MV pour la Régression de Poisson

Question : Dans le modèle de régression de Poisson, quel lien exprime correctement l'espérance μ_i en fonction des variables explicatives $\mathbf{x}_i$?
Bonne réponse : C

Justification : C'est la fonction de lien canonique utilisée pour les modèles de régression de Poisson.

QCM 3 : MV pour la Régression de Poisson

Question : Quelle est la forme correcte de la log-vraisemblance dans le modèle de régression de Poisson (à un facteur constant près) ?

A. $\sum_{i=1}^{n} [y_i \eta_i - \exp(\eta_i)]$
B. $\sum_{i=1}^{n} [y_i \cdot \log(\eta_i) - \eta_i]$
C. $\sum_{i=1}^{n} [y_i \cdot \exp(\eta_i) - \eta_i]$
D. $\sum_{i=1}^{n} [y_i^2 - \eta_i]$

QCM 3 : MV pour la Régression de Poisson

Question : Quelle est la forme correcte de la log-vraisemblance dans le modèle de régression de Poisson (à un facteur constant près) ?
Bonne réponse : A

Justification : La log-vraisemblance est donnée (à un terme constant près) par :

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} [y_i \eta_i - \exp(\eta_i)]$$

QCM 4a : MV pour la Régression de Poisson

Question : Trouvez $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$.

A. $\boldsymbol{\beta}$

B. $\mathbf{x}_i$

C. $\mathbf{x}_i^\top$

D. 1

QCM 4a : MV pour la Régression de Poisson

Question : Trouvez $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$.
Bonne réponse : B

Justification : La dérivée de $\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$ par rapport à $\boldsymbol{\beta}$ est le vecteur $\mathbf{x}_i$, car c'est une fonction linéaire.

QCM 4b : MV pour la Régression de Poisson

Question : Trouvez $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$.

A. $\mathbf{x}_i$

B. $\exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$

C. $\exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{x}_i$

D. $\mathbf{x}_i^\top \cdot \exp(\boldsymbol{\beta})$

QCM 4b : MV pour la Régression de Poisson

Question : Trouvez $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$.
Bonne réponse : C

Justification : C'est une application de la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}) = \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{x}_i$$

QCM 4c : MV pour la Régression de Poisson

Question : Quelle est l'expression correcte du gradient de la log-vraisemblance par rapport à $\boldsymbol{\beta}$, $\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}$?

A. $\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mathbf{x}_i$
B. $\sum_{i=1}^{n} \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{x}_i$
C. $\sum_{i=1}^{n} (y_i - \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})) \cdot \mathbf{x}_i$
D. $\sum_{i=1}^{n} (y_i + \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})) \cdot \mathbf{x}_i$

QCM 4c : MV pour la Régression de Poisson

Question : Quelle est l'expression correcte du gradient de la log-vraisemblance par rapport à $\boldsymbol{\beta}$, $\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}$?
Bonne réponse : C

Justification : En combinant les dérivées des deux termes :

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}) \right] \mathbf{x}_i$$

QCM 5 : MV pour la Régression de Poisson

Question : Pourquoi ne peut-on pas obtenir de solution fermée pour $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dans le modèle de régression de Poisson ?

A. Car la log-vraisemblance dépend de $\log(y_i!)$

B. Car les dérivées impliquent des fonctions exponentielles

C. Car les variables $\mathbf{x}_i$ sont corrélées

D. Car y_i peut prendre des valeurs nulles

QCM 5 : MV pour la Régression de Poisson

Question : Pourquoi ne peut-on pas obtenir de solution fermée pour $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dans le modèle de régression de Poisson ?
Bonne réponse : B

Justification : Les termes exponentiels dans le gradient empêchent de résoudre explicitement le système $\nabla \ell(\boldsymbol{\beta}) = 0$.

Solution : Estimation par Maximum de Vraisemblance pour la Régression de Poisson

Solution : MV pour la Régression de Poisson

- **Loi de Poisson (définition)** : Soit une variable aléatoire $Y_i \sim \mathcal{P}(\mu_i)$, la fonction de masse de probabilité est :

$$\mathbb{P}(Y_i = y_i \mid \mu_i) = \frac{\mu_i^{y_i} \exp(-\mu_i)}{y_i!}, \quad y_i \in \mathbb{N}$$

- **Lien avec les variables explicatives : Régression de Poisson** Dans un modèle de régression de Poisson (GLM), on relie l'espérance μ_i aux variables explicatives via une fonction de lien canonique :

$$\log(\mu_i) = \eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} \quad \Rightarrow \quad \mu_i = \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$$

- **Substitution dans la densité :** On remplace alors μ_i dans la loi de Poisson par $\exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$, ce qui donne :

$$\mathbb{P}(Y_i = y_i \mid \mathbf{x}_i) = \frac{\left[\exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})\right]^{y_i} \exp\left(-\exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})\right)}{y_i!}$$

- **Utilité** : Cette expression est la base de la construction de la fonction de vraisemblance pour le modèle.

Solution : MV pour la Régression de Poisson

- On a donc :

$$\mathbb{P}(Y_i = y_i \mid \mathbf{x}_i) = \frac{[\exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})]^{y_i} \exp(-\exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}))}{y_i!}$$

- Hypothèse : observations indépendantes $\Rightarrow$ vraisemblance :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{[\exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})]^{y_i} \exp(-\exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}))}{y_i!}$$

- On prend la fonction log-vraisemblance :

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \log \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} - \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}) - \log(y_i!) \right]$$

- La fonction objectif à maximiser est alors donnée par :

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i \eta_i - \exp(\eta_i) - \log(y_i!) \right], \quad \text{où } \eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$$

- Le terme $\log(y_i!)$ ne dépend pas de $\boldsymbol{\beta}$, on peut l'ignorer pour l'optimisation.

Solution : MV pour la Régression de Poisson

- On fonction log-vraisemblance pour des observations indépendantes est donnée par :

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i \cdot \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} - \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}) - \log(y_i!) \right].$$

- **Calcul du gradient :** dérivons chaque terme par rapport à $\boldsymbol{\beta}$:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left(y_i \cdot \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} \right) = y_i \cdot \mathbf{x}_i.$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left(\exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}) \right) = \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{x}_i.$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left(\log(y_i!) \right) = 0 \quad \text{(constante)}.$$

- **Donc, le gradient de la log-vraisemblance est :**

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}) \right] \mathbf{x}_i.$$

Solution : MV pour la Régression de Poisson

- Contrairement à la régression linéaire (OLS), il n'y a pas de solution analytique pour :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\beta}} \ell(\boldsymbol{\beta}).$$

- Ceci est dû au fait qu'on ne peut pas résoudre :

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}.$$

de manière explicite car les dérivées incluent des exponentielles :

$$\frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \mu_i] \mathbf{x}_i, \quad \text{avec } \mu_i = \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}).$$

- $\Rightarrow$ **Il faut utiliser une méthode numérique d'optimisation.**
- On peut utiliser la **descente de gradient** pour trouver $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

Solution : MV pour la Régression de Poisson

- On maximise $\ell(\boldsymbol{\beta})$ en ajustant $\boldsymbol{\beta}$ dans la direction du **gradient** (vecteur score) :

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t)} + \alpha \cdot \nabla \ell(\boldsymbol{\beta}^{(t)}).$$

- Le gradient de la log-vraisemblance est donné par:

$$\nabla \ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})\right) \mathbf{x}_i = \mathbf{X}^\top (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}).$$

- Où $\boldsymbol{\mu} = \exp(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ est le vecteur des espérances.
- On met à jour $\boldsymbol{\beta}$ jusqu'à convergence.

Solution : MV pour la Régression de Poisson

- **Pourquoi recourir à la descente de gradient?**
- **Pas de solution analytique :** les équations ne se simplifient pas comme pour OLS.
- **Fonction objectif concave :** (la log-vraisemblance est concave pour la régression de Poisson) $\Rightarrow$ toute méthode de gradient converge vers le maximum global.
- **Méthode simple et générale :** fonctionne pour d'autres GLMs (logistique, gamma, etc).
- D'autres alternatives peuvent être efficaces :
  - Méthode de Newton-Raphson
  - Fisher scoring
  - IRLS (Iteratively Reweighted Least Squares)

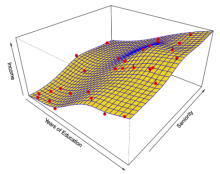
Exercice : Implémentation de la Régression de Poisson en Python sur le Jeu de Donnée *Carseats*

Exercice : Implémentation de la Régression de Poisson

- Dans cet exercice, vous implémenterez manuellement les composantes essentielles d'un modèle de régression de Poisson pour prédire les ventes de sièges pour enfants à partir de variables socio-économiques et commerciales.
- Le jeu de données `Carseats`, issu du manuel *An Introduction to Statistical Learning* (ISLP), contient les caractéristiques de 400 magasins vendant des sièges pour enfants. Chaque ligne correspond à un magasin.
- Le jeu de données vous est fourni sur Moodle. Vous pouvez aussi le télécharger en utilisant la librairie ISLP (`!pip install ISLP`).

Exercice : Implémentation de la Régression de Poisson

- Les variables incluent :
  - `Sales` : Ventes de sièges auto pour enfants (en **milliers d'unités**).
  - `CompPrice`, `Price` : Prix chez le concurrent et prix du magasin.
  - `Income`, `Population` : Revenu moyen, population locale.
  - `Advertising`, `Education`, `Age` : Informations socio-démographiques.
  - `ShelveLoc` : Emplacement du produit (`Good`, `Medium`, `Bad`).
  - `Urban`, `US` : Zone urbaine ? Localisé aux États-Unis ?



Install instructions

Datasets used in ISLP

- Auto Data
- Bike sharing data
- Boston Data
- Brain Cancer Data
- Caravan
- Sales of Child Car Seats
- U.S. News and World Report's College Data
- Credit Card Balance Data
- Credit Card Default Data
- Fund Manager Data
- Baseball Data
- Khan Gene Data
- NCI 60 Data
- New York Stock Exchange Data
- Orange Juice Data

Sales of Child Car Seats

A simulated data set containing sales of child car seats at 400 different stores.

- `Sales` : Unit sales (in thousands) at each location
- `CompPrice` : Price charged by competitor at each location
- `Income` : Community income level (in thousands of dollars)
- `Advertising` : Local advertising budget for company at each location (in thousands of dollars)
- `Population` : Population size in region (in thousands)
- `Price` : Price company charges for car seats at each site
- `ShelveLoc` : A factor with levels Bad, Good and Medium indicating the quality of the shelving location for the car seats at each site
- `Age` : Average age of the local population
- `Education` : Education level at each location
- `Urban` : A factor with levels No and Yes to indicate whether the store is in an urban or rural location
- `US` : A factor with levels No and Yes to indicate whether the store is in the US or not

```
from ISLP import load_data
Carseats = load_data('Carseats')
Carseats.columns
```

```
Index(['Sales', 'CompPrice', 'Income', 'Advertising', 'Population', 'Price',
       'ShelveLoc', 'Age', 'Education', 'Urban', 'US'],
      dtype='object')
```

```
Carseats.shape
```

Exercice : Implémentation de la Régression de Poisson

- Vous devez compléter du code Python dans lequel :
  - Vous implémenterez la log-vraisemblance pour la régression de Poisson.
  - Vous implémenterez le gradient de cette log-vraisemblance.
  - Vous implémenterez la fonction d'entraînement `poisson_regression` qui met à jour les coefficients $\boldsymbol{\beta}$ par descente de gradient.
- La variable cible `Sales` a été arrondie à l'entier le plus proche.
- Les variables catégorielles ont été encodées avec des indicatrices.
- Les données sont divisées en train (80%) et validation (20%).
- La standardisation est faite après le split en utilisant uniquement le train.
- Vous utiliserez la descente de gradient pour maximiser la log-vraisemblance.
- Le clipping est appliqué à $\eta = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ pour éviter les overflows numériques.
- Un graphique montrera l'évolution de la log-vraisemblance pour les ensembles d'entraînement et de validation.

Exercice : Implémentation de la Régression de Poisson

```python
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.preprocessing import StandardScaler

# --- Charger les données Carseats ---
df = pd.read_csv("Carseats_raw.csv")

# --- Transformation de la variable cible ---
df['Sales'] = df['Sales'].round().astype(int)

# --- Encodage des variables catégorielles ---
df_encoded = pd.get_dummies(df, drop_first=False)

# --- Variables explicatives et cible ---
X_vars = [col for col in df_encoded.columns if col != 'Sales']
X_raw = df_encoded[X_vars].values
y = df_encoded['Sales'].values

# --- Division train / validation AVANT standardisation ---
X_raw_train, X_raw_val, y_train, y_val = train_test_split(X_raw, y, test_size=0.2, random_state=8302)

# --- Standardisation basée uniquement sur le train ---
scaler = StandardScaler()
X_train_std = scaler.fit_transform(X_raw_train)
X_val_std = scaler.transform(X_raw_val)

# --- Ajout de l'intercept ---
X_train = np.column_stack((np.ones(X_train_std.shape[0]), X_train_std))
X_val = np.column_stack((np.ones(X_val_std.shape[0]), X_val_std))
variables = ['Intercept'] + X_vars
```

Exercice : Implémentation de la Régression de Poisson

```python
# --- Fonctions log-vraisemblance et gradient ---
def log_likelihood(beta, X, y):
    eta = _______
    eta = np.clip(eta, a_max=30, a_min=None)
    mu = _______
    return _______

def gradient(beta, X, y):
    eta = _______
    eta = np.clip(eta, a_max=30, a_min=None)
    mu = _______
    return _______

# --- Descente de gradient ---
def poisson_regression(X, y, lr=1e-5, max_iter=1000, tol=1e-6, X_val=None, y_val=None):
    beta = np.zeros(X.shape[1])
    ll_history_train = []
    ll_history_val = []

    for iteration in range(max_iter):
        grad = gradient(_______)
        beta = _______

        ll_train = log_likelihood(beta, X, y)
        ll_history_train.append(ll_train)

        if X_val is not None and y_val is not None:
            ll_val = log_likelihood(beta, _______, _______)
            ll_history_val.append(ll_val)

        if iteration > 0 and abs(ll_history_train[-1] - ll_history_train[-2]) < tol:
            print(f"Convergence atteinte en {iteration} itérations.")
            break

    return beta, ll_history_train, ll_history_val
```

Exercice : Implémentation de la Régression de Poisson

```python
# --- Entraînement ---
beta_hat, history_train, history_val = poisson_regression(X_train, y_train, X_val=_______, y_val=_______, lr=1e-5)

# --- Affichage des coefficients estimés ---
print("Coefficients estimés :")
for var, coef in zip(variables, beta_hat):
    print(f"  {var} : {coef:.4f}")

# --- Visualisation 1 : Log-vraisemblance normalisée ---
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(np.array(history_train)/len(y_train), label="Train", color="green")
plt.plot(np.array(history_val)/len(y_val), label="Validation", color="orange")
plt.xlabel("Itérations")
plt.ylabel("Log-vraisemblance normalisée")
plt.title("Évolution de la log-vraisemblance")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

# --- Visualisation 2 : Prédictions vs Observations ---
mu_pred = np.exp(np.clip(X_val @ beta_hat, a_max=30, a_min=None))

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.scatter(mu_pred, y_val, alpha=0.6, color='royalblue')
plt.plot([min(mu_pred), max(mu_pred)], [min(mu_pred), max(mu_pred)], 'r--')
plt.xlabel("Valeurs prédites (mu)")
plt.ylabel("Valeurs observées (Sales)")
plt.title("Régression de Poisson | Prédictions vs Observations")
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Solution: Implémentation de la Régression de Poisson en Python sur le Jeu de Donnée *Carseats*

Solution : Implémentation de la Régression de Poisson

```python
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.preprocessing import StandardScaler

# --- Charger les données Carseats ---
df = pd.read_csv("Carseats_raw.csv")

# --- Transformation de la variable cible ---
df['Sales'] = df['Sales'].round().astype(int)

# --- Encodage des variables catégorielles ---
df_encoded = pd.get_dummies(df, drop_first=False)

# --- Variables explicatives et cible ---
X_vars = [col for col in df_encoded.columns if col != 'Sales']
X_raw = df_encoded[X_vars].values
y = df_encoded['Sales'].values

# --- Division train / validation AVANT standardisation ---
X_raw_train, X_raw_val, y_train, y_val = train_test_split(X_raw, y, test_size=0.2, random_state=8302)

# --- Standardisation basée uniquement sur le train ---
scaler = StandardScaler()
X_train_std = scaler.fit_transform(X_raw_train)
X_val_std = scaler.transform(X_raw_val)

# --- Ajout de l'intercept ---
X_train = np.column_stack((np.ones(X_train_std.shape[0]), X_train_std))
X_val = np.column_stack((np.ones(X_val_std.shape[0]), X_val_std))
variables = ['Intercept'] + X_vars
```

Solution : Implémentation de la Régression de Poisson

```python
# --- Fonctions log-vraisemblance et gradient ---
def log_likelihood(beta, X, y):
    eta = X @ beta
    eta = np.clip(eta, a_max=30, a_min=None)
    mu = np.exp(eta)
    return np.sum(y * eta - mu)

def gradient(beta, X, y):
    eta = X @ beta
    eta = np.clip(eta, a_max=30, a_min=None)
    mu = np.exp(eta)
    return X.T @ (y - mu)

# --- Descente de gradient ---
def poisson_regression(X, y, lr=1e-5, max_iter=1000, tol=1e-6, X_val=None, y_val=None):
    beta = np.zeros(X.shape[1])
    ll_history_train = []
    ll_history_val = []

    for iteration in range(max_iter):
        grad = gradient(beta, X, y)
        beta = beta + lr * grad

        ll_train = log_likelihood(beta, X, y)
        ll_history_train.append(ll_train)

        if X_val is not None and y_val is not None:
            ll_val = log_likelihood(beta, X_val, y_val)
            ll_history_val.append(ll_val)

        if iteration > 0 and abs(ll_history_train[-1] - ll_history_train[-2]) < tol:
            print(f"Convergence atteinte en {iteration} itérations.")
            break

    return beta, ll_history_train, ll_history_val
```

Solution : Implémentation de la Régression de Poisson

```
# --- Entraînement ---
beta_hat, history_train, history_val = poisson_regression(X_train, y_train, X_val=X_val, y_val=y_val, lr=1e-5)

# --- Affichage des coefficients estimés ---
print("Coefficients estimés :")
for var, coef in zip(variables, beta_hat):
    print(f"  {var} : {coef:.4f}")

# --- Visualisation 1 : Log-vraisemblance normalisée ---
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(np.array(history_train)/len(y_train), label="Train", color="green")
plt.plot(np.array(history_val)/len(y_val), label="Validation", color="orange")
plt.xlabel("Itérations")
plt.ylabel("Log-vraisemblance normalisée")
plt.title("Évolution de la log-vraisemblance")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

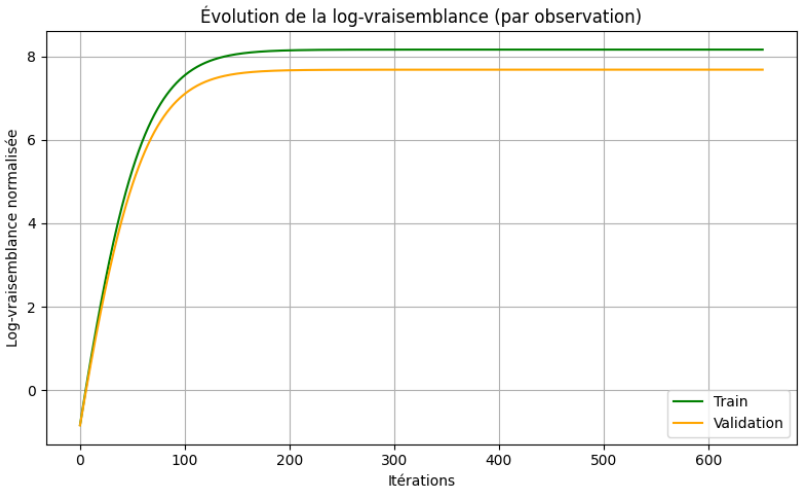
Solution : Implémentation de la Régression de Poisson

```
# --- Visualisation 2 : Prédictions vs Observations ---
mu_pred = np.exp(np.clip(X_val @ beta_hat, a_max=30, a_min=None))
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.scatter(mu_pred, y_val, alpha=0.6, color='royalblue')
plt.plot([min(mu_pred), max(mu_pred)], [min(mu_pred), max(mu_pred)], 'r--')
plt.xlabel("Valeurs prédites (mu)")
plt.ylabel("Valeurs observées (Sales)")
plt.title("Régression de Poisson | Prédictions vs Observations")
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

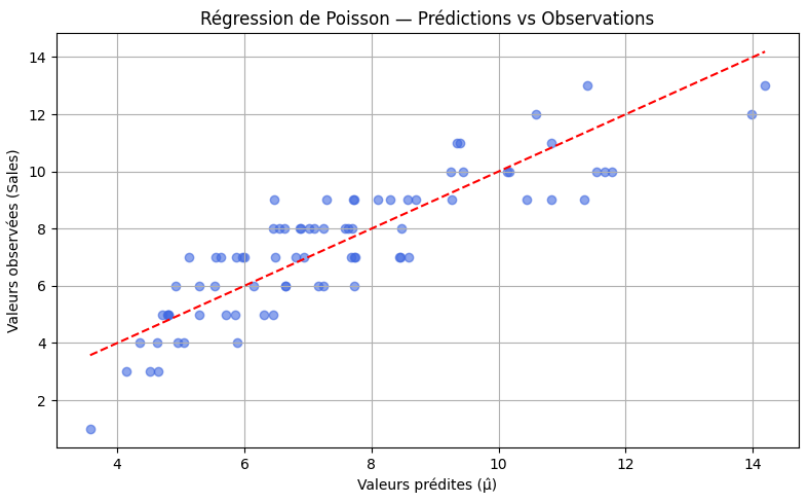
```
Résultat Affiché :
Convergence atteinte en 652 itérations.
Coefficients estimés :
  Intercept : 1.9555
  CompPrice : 0.1939
  Income : 0.0604
  Advertising : 0.0989
  Population : 0.0143
  Price : -0.2953
  Age : -0.1102
  Education : -0.0060
  ShelveLoc_Bad : -0.1294
  ShelveLoc_Good : 0.1335
  ShelveLoc_Medium : 0.0021
  Urban_No : -0.0053
  Urban_Yes : 0.0053
  US_No : 0.0034
  US_Yes : -0.0034
```

Solution : Implémentation de la Régression de Poisson

- La descente de gradient a convergé en 652 itérations, indiquant un bon choix du taux d'apprentissage.
- Les courbes de log-vraisemblance montrent une convergence rapide et l'absence de surapprentissage.
- Les prédictions sur l'ensemble de validation suivent globalement les observations, indiquant une bonne capacité de généralisation.



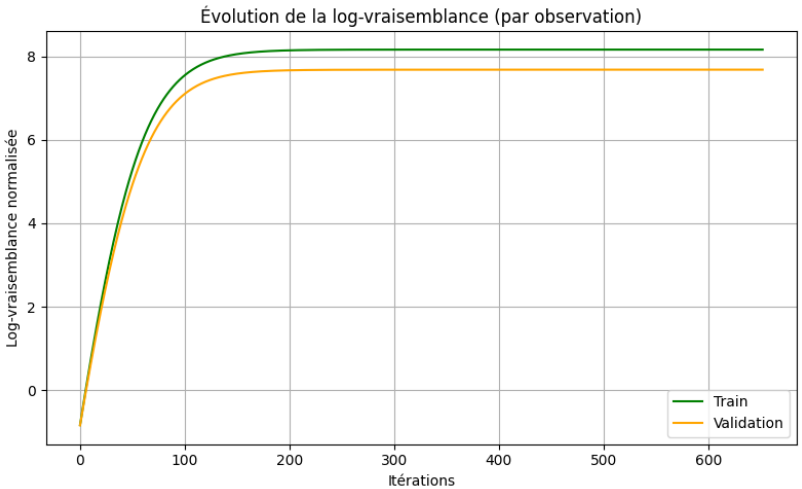
Évolution de la log-vraisemblance



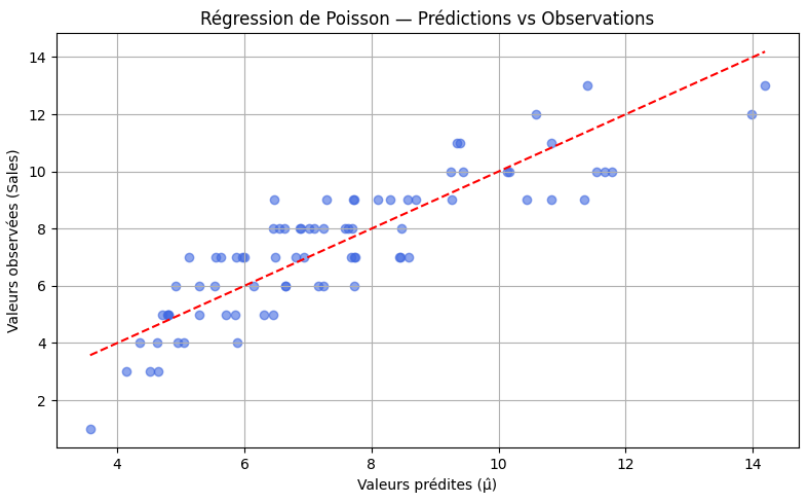
Prédictions vs Observations

Solution : Implémentation de la Régression de Poisson

- Les variables `Price`, `Advertising`, et `ShelveLoc` ont un effet marqué sur les ventes.
- Le coefficient négatif de `Price` est attendu : un prix plus élevé entraîne une baisse des ventes.
- La variable `ShelveLoc_Good` a un effet positif important, illustrant l'impact du placement en rayon.



Évolution de la log-vraisemblance



Prédictions vs Observations

Table des Matières

1 Modèles Linéaires Généralisés

2 Regression Logistique

3 Analyse Linéaire Discriminante

4 Annexe

Regression Logistique

Régression Logistique

Une autre instance des Modèles Linéaires Généralisés (GLMs)

Pourquoi la Régression Logistique ?

- Jusqu'ici, nous avons considéré des variables de sortie $Y \in \mathbb{N}$ (Poisson) ou $Y \in \mathbb{R}$ (Normale).
- **Et si la variable cible est binaire ?**
  Exemple : prédire si un individu est malade ou non, si une transaction est frauduleuse ou non.

$$Y \in \{0, 1\}$$

- **Problème :** La régression linéaire n'est pas adaptée.
  Elle peut produire des prédictions $\hat{y} \notin [0, 1]$, ce qui est incohérent pour une probabilité.
- **Solution :** Utiliser une fonction de lien adaptée :

$$\mu_i = \mathbb{E}[Y_i] = \text{probabilité de succès} \Rightarrow \mu_i \in [0, 1]$$

- C'est ici qu'intervient la **Régression Logistique**, avec fonction de lien logit :

$$g(\mu_i) = \log\left(\frac{\mu_i}{1 - \mu_i}\right) = \eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$$

Exercice : Montrons que la loi de Bernoulli $Y \sim \mathcal{B}(p)$ appartient à la famille exponentielle.

Exercice : La Loi de Bernoulli $\in$ Famille Exponentielle ?

Q1. Quelle est la fonction de masse de $Y \sim \mathcal{B}(p)$?

A. $f_Y(y) = \exp(p^y(1-p)^{1-y})$

B. $f_Y(y) = p^y(1-p)^{1-y}$

C. $f_Y(y) = \frac{1}{p^y(1-p)^{1-y}}$

D. $f_Y(y) = y(1-p) + (1-y)p$

Exercice : La Loi de Bernoulli $\in$ Famille Exponentielle ?

Q1. Quelle est la fonction de masse de $Y \sim \mathcal{B}(p)$?
Réponse correcte : B
La fonction de masse de probabilité d'une variable de Bernoulli est bien :

$$f_Y(y) = p^y(1-p)^{1-y}, \quad y \in \{0, 1\}$$

Exercice : La Loi de Bernoulli $\in$ Famille Exponentielle ?

Q2. Mise sous forme exponentielle : lesquelles sont correctes ?

A. $\exp\left(y\log(p) + (1-y)\log(1-p)\right)$

B. $\exp\left(y\log\left(\frac{p}{1-p}\right) + \log(1-p)\right)$

C. $\exp\left(y\log(p) - y\log(1-p)\right)$

D. $\exp\left(y - p\right)$

Exercice : La Loi de Bernoulli $\in$ Famille Exponentielle ?

Q2. Mise sous forme exponentielle : lesquelles sont correctes ?
Réponses correctes : A et B

$$f_Y(y) = \exp\left(y \log\left(\frac{p}{1-p}\right) + \log(1-p)\right)$$

On reconnaît bien la forme exponentielle.

Exercice : La Loi de Bernoulli $\in$ Famille Exponentielle ?

Q3. Identifier les composantes de la forme exponentielle

A. $\theta = \log\left(\frac{p}{1-p}\right), \quad b(\theta) = \log(1+e^{\theta}), \quad a(\phi) = 1$

B. $\theta = p, \quad b(\theta) = p, \quad a(\phi) = 1$

C. $\theta = \frac{1}{p}, \quad b(\theta) = \theta^2, \quad a(\phi) = \theta$

D. $\theta = \log(p), \quad b(\theta) = \log(1+e^{p}), \quad a(\phi) = 1$

Exercice : La Loi de Bernoulli $\in$ Famille Exponentielle ?

Q3. Identifier les composantes de la forme exponentielle
Réponse correcte : A

- Paramètre canonique : $\theta = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$
- Fonction log-partition : $b(\theta) = \log(1 + e^{\theta})$
- Dispersion : $a(\phi) = 1$ (car Bernoulli à variance fixée)

Exercice : La Loi de Bernoulli $\in$ Famille Exponentielle ?

Q4. Quels sont les moments de $Y \sim \mathcal{B}(p)$?

A. $\mathbb{E}[Y] = b'(\theta), \quad \text{Var}(Y) = b''(\theta)$

B. $\mathbb{E}[Y] = p, \quad \text{Var}(Y) = p(1-p)$

C. $\mathbb{E}[Y] = \frac{e^\theta}{1+e^\theta}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{e^\theta}{(1+e^\theta)^2}$

D. Toutes les réponses ci-dessus

Exercice : La Loi de Bernoulli $\in$ Famille Exponentielle ?

Q4. Quels sont les moments de $Y \sim \mathcal{B}(p)$?
Réponse correcte : D
Toutes les réponses sont cohérentes selon l'expression $b(\theta) = \log(1 + e^{\theta})$.

$$b'(\theta) = \frac{e^{\theta}}{1 + e^{\theta}}, \quad b''(\theta) = \frac{e^{\theta}}{(1 + e^{\theta})^2}$$

Solution de l'Exercice : Montrons que la loi de Bernoulli $Y \sim \mathcal{B}(\mu)$ appartient à la famille exponentielle.

Rappel : Étapes pour Déterminer $g(\mu)$ et η

- **Étapes à suivre :**
  1. **Écrire la densité dans sa forme classique.**
     Exemple : loi normale, Bernoulli, Poisson...
  2. **Mettre la densité sous forme exponentielle.**
     Identifier les termes permettant d'aboutir à la forme canonique.
  3. **Identifier les composantes du modèle exponentiel :**
     - θ : paramètre naturel
     - ϕ : paramètre de dispersion
     - $a(\phi)$: fonction de pondération
     - $b(\theta)$: fonction log-partition
     - $c(y, \phi)$: fonction de normalisation
  4. **Calculer les moments en fonction de θ :**

$$\mathbb{E}[Y] = b'(\theta), \quad \text{Var}(Y) = a(\phi) \cdot b''(\theta).$$

  5. **Déterminer la fonction de lien canonique $g(\mu)$ en fonction de θ:**

$$\mu = b'(\theta) \Rightarrow g(\mu) = \theta.$$

  6. **Exprimer le prédicteur linéaire du GLM en remplaçant θ par η_i:**

$$\eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \quad \text{avec } g(\mu_i) = \eta_i$$

Solution : La Loi de Bernoulli $\in$ Famille Exponentielle ?

- Montrons que la loi de Bernoulli $Y \sim \mathcal{B}(\mu)$ **appartient à la famille exponentielle :**

$$f_Y(y;\theta) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right)$$

- **Étape 1 : Écrire la densité de la loi de Bernoulli**

$$f_Y(y) = p^y(1-p)^{1-y}, \quad y \in \{0,1\},\ p \in (0,1)$$

- **Étape 2 : Mise sous forme exponentielle**

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \exp\left(\log(p^y(1-p)^{1-y})\right) \\ &= \exp\left(y\log(p) + (1-y)\log(1-p)\right) \\ &= \exp\left(y\log(p) + \log(1-p) - y\log(1-p)\right) \\ &= \exp\left(y\log\left(\frac{p}{1-p}\right) + \log(1-p)\right) \end{aligned}$$

Solution : La Loi de Bernoulli $\in$ Famille Exponentielle ?

- **Étape 3 : Identification des termes**
  On reconnaît :

$$f_Y(y) = \exp\left(\underbrace{y \log\left(\frac{p}{1-p}\right)}_{y\theta} + \underbrace{\log(1-p)}_{-b(\theta)}\right) = \exp\left(y\theta - b(\theta) + c(y)\right)$$

- **Identification :**
  - $\theta = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$ (paramètre naturel) $\Rightarrow e^\theta = \frac{p}{1-p} \Rightarrow p = \frac{e^\theta}{1+e^\theta}$
  - $b(\theta) = -\log(1-p) = -\log(1 - \frac{e^\theta}{1+e^\theta}) = -\log(\frac{1}{1+e^\theta}) = \log(1+e^\theta)$
  - $a(\phi) = 1$ (pas de paramètre de dispersion)
  - $c(y) = 0$
- **Moments :**

$$\mu = \mathbb{E}[Y] = b'(\theta) = \frac{e^\theta}{1+e^\theta} = p,$$

$$\text{Var}(Y) = a(\phi) \cdot b''(\theta) = \frac{e^\theta}{(1+e^\theta)^2} = p(1-p).$$

Solution : La Loi de Bernoulli $\in$ Famille Exponentielle ?

- On sait que :

$$\mu = \mathbb{E}[Y] = b'(\theta) = \frac{e^\theta}{1+e^\theta} = p$$

- On inverse cette relation pour obtenir θ en fonction de μ :

$$= \frac{e^\theta}{1+e^\theta} \Rightarrow \mu(1+e^\theta) = e^\theta$$
$$\Rightarrow \mu = e^\theta(1-\mu)$$
$$\Rightarrow e^\theta = \frac{\mu}{1-\mu} \Rightarrow \theta = \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$$

- **Conclusion :**

$$\boxed{g(\mu) = \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)}$$ (fonction de lien canonique : logit)

- Donc le prédicteur linéaire s'écrit :

$$\eta = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \quad \mu = p_i = \frac{e^\eta}{1+e^\eta} = \frac{1}{1+e^{-\eta}} = \text{Sigmoïde}(\eta).$$

Solution : La Loi de Bernoulli $\in$ Famille Exponentielle ?

Composante du GLM	**Régression Logistique**
Distribution de Y	$Y \sim \mathcal{B}(\mu)$
Paramètre naturel θ	$\theta = \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$
Paramètre de dispersion ϕ	$\phi = 1$
Fonction de lien $g(\mu)$	$g(\mu) = \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$
Prédicteur linéaire η	$\eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$
Lien entre μ_i et η_i	$\mu_i = \frac{1}{1+e^{-\eta_i}} = \text{Sigmoïde}(\eta_i)$
Méthode d'estimation	Maximum de vraisemblance

Conclusion : La régression logistique est un GLM avec une distribution de Bernoulli pour la variable cible et une fonction de lien logit :

$$Y \sim \mathcal{B}(\mu), \quad g(\mu) = \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right).$$

Exercice : Estimation par Maximum de Vraisemblance pour la Régression Logistique

QCM 1 — Mise sous forme factorisée

Q1. En utilisant $p_i = \frac{1}{1+e^{-\eta_i}}$, laquelle des expressions suivantes correspond à la probabilité :

$$\mathbb{P}(Y_i = y_i \mid \mathbf{x}_i) = p_i^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i} \quad \text{mise sous forme factorisée?}$$

A. $\dfrac{e^{y_i \eta_i}}{1+e^{\eta_i}}$

B. $\dfrac{1}{1+e^{-\eta_i}}$

C. $\dfrac{e^{-\eta_i(1+y_i)}}{(1+e^{-\eta_i})}$

D. $\dfrac{1}{e^{-\eta_i}}$

QCM 1 — Mise sous forme factorisée

Bonne réponse : A

Justification :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_i = y_i \mid \mathbf{x}_i) &= \left(\frac{1}{1+e^{-\eta_i}}\right)^{y_i} \left(\frac{e^{-\eta_i}}{1+e^{-\eta_i}}\right)^{1-y_i} \\ &= \frac{e^{-\eta_i(1-y_i)}}{1+e^{-\eta_i}} \\ &= \frac{e^{y_i\eta_i}}{1+e^{\eta_i}}\end{aligned}$$

QCM 2 — Mise sous forme exponentielle finale

Q2. En partant ddu résultat précédent obtenu pour $\mathbb{P}(Y_i = y_i \mid \mathbf{x}_i)$, laquelle des expressions suivantes correspond à sa mise sous forme exponentielle canonique ?

A. $\exp\left(y_i \cdot \eta_i - \log(1 + e^{\eta_i})\right)$

B. $\exp\left(-y_i \cdot \eta_i + \log(1 + e^{\eta_i})\right)$

C. $\exp\left(y_i \cdot \eta_i + \log(1 + e^{-\eta_i})\right)$

D. $\exp\left(-\eta_i + y_i \cdot \eta_i\right)$

QCM 2 — Mise sous forme exponentielle finale

Bonne réponse : A

Justification :

$$\frac{e^{y_i \eta_i}}{1 + e^{\eta_i}} = \exp\left(y_i \cdot \eta_i - \log(1 + e^{\eta_i})\right)$$

QCM 3 — Fonction log-vraisemblance

Q2. En supposant n observations indépendantes, quelle sont les bonnes expressions de la log-vraisemblance $\ell(\boldsymbol{\beta})$ en fonction de η_i ?

A. $\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{e^{y_i \eta_i}}{1 + e^{\eta_i}}\right)$

B. $\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} [y_i \cdot \eta_i - \log(1 + e^{\eta_i})]$

C. $\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} [y_i \cdot p_i + (1 - y_i) \log(1 - p_i)]$

D. $\ell(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{y_i \eta_i}}{1 + e^{\eta_i}}$

QCM 3 — Fonction log-vraisemblance

Bonne réponse : A et B

Justification :

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{e^{y_i \eta_i}}{1 + e^{\eta_i}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [y_i \eta_i - \log(1 + e^{\eta_i})]$$

QCM 4 — Gradient de la log-vraisemblance

Q4. En dérivant la fonction log-vraisemblance, quelle est l'expression correcte du gradient $\nabla \ell(\boldsymbol{\beta})$?

A. $\nabla \ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mathbf{x}_i$

B. $\nabla \ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \eta_i) \cdot \mathbf{x}_i$

C. $\nabla \ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - p_i) \cdot \mathbf{x}_i$

D. $\nabla \ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \mathbf{x}_i$

QCM 4 — Gradient de la log-vraisemblance

Bonne réponse : C

Justification :

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} [y_i \cdot \eta_i - \log(1 + e^{\eta_i})]$$

$$\Rightarrow \nabla \ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - p_i) \cdot \mathbf{x}_i$$

$$\text{avec } p_i = \frac{1}{1 + e^{-\eta_i}} = \text{Sigmoïde}(\eta_i)$$

Solution : Estimation par Maximum de Vraisemblance pour la Régression Logistique

Solution : MV pour la Régression Logistique

- **Loi de Bernoulli (définition)** : Soit $Y_i \sim \mathcal{B}(p_i)$, avec $p_i = \mathbb{P}(Y_i = 1 \mid \mathbf{x}_i) = p_i$. La fonction de densité de probabilité est :

$$\mathbb{P}(Y_i = y_i \mid \mathbf{x}_i) = p_i^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i}, \quad y_i \in \{0,1\}$$

- **Lien avec les variables explicatives : Régression logistique** L'espérance $\mu_i = \mathbb{E}[Y_i \mid \mathbf{X}_i = \mathbf{x_i}] = p_i$ est reliée aux variables explicatives via une fonction de lien logit :

$$g(\mu_i) = \log\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right) = \eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu_i = \mathbb{E}[Y_i \mid \mathbf{X}_i = \mathbf{x_i}] = \mathbb{P}(Y_i = y_i \mid \mathbf{x}_i) &= \frac{1}{1+e^{-\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}} \\ &= \text{Sigmoïde}(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}) \\ &= \text{Sigmoïde}(\eta_i). \end{aligned}$$

- On remplace p_i dans la densité :

$$\mathbb{P}(Y_i = y_i \mid \mathbf{x}_i) = \left(\frac{1}{1+e^{-\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}}\right)^{y_i} \left(1 - \frac{1}{1+e^{-\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}}\right)^{1-y_i}$$

Solution : MV pour la Régression Logistique

- En remplaçant $\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$ par η on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_i = y_i \mid \mathbf{x}_i) &= \left(\frac{1}{1+e^{-\eta_i}}\right)^{y_i} \left(\frac{e^{-\eta_i}}{1+e^{-\eta_i}}\right)^{1-y_i} \\
&= \frac{e^{-\eta_i(1-y_i)}}{(1+e^{-\eta_i})^{1-y_i+y_i}} \\
&= \frac{e^{-\eta_i+y_i\eta_i}}{1+e^{-\eta_i}} \\
&= \frac{\cancel{e^{-\eta_i}}(e^{y_i\eta_i})}{\cancel{e^{-\eta_i}}(e^{\eta_i}+1)} = \frac{e^{y_i\eta_i}}{1+e^{\eta_i}}, \quad \text{où } \eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}.
\end{aligned}$$

- Vraisemblance pour n observations indépendantes :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{y_i\eta_i}}{1+e^{\eta_i}}, \quad \text{où } \eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}.$$

Solution : MV pour la Régression Logistique

- Vraisemblance pour n observations indépendantes :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{y_i \eta_i}}{1 + e^{\eta_i}}, \quad \text{où } \eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}.$$

- Fonction log-vraisemblance :

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i \cdot \eta_i - \log(1 + e^{\eta_i}) \right], \quad \text{où } \eta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}.$$

- C'est la fonction qu'on va maximiser en fonction de $\boldsymbol{\beta}$:

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i \cdot \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} - \log(1 + e^{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}) \right].$$

Solution : MV pour la Régression Logistique

- **Gradient de la log-vraisemblance :**
  - On dérive chaque terme :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left(y_i \cdot \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} \right) = y_i \cdot \mathbf{x}_i$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left(\log(1 + e^{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}) \right) &= \frac{e^{\eta_i}}{1 + e^{\eta_i}} \cdot \mathbf{x}_i \\ &= \text{Sigmoïde}(\eta_i) \cdot \mathbf{x}_i \\ &= p_i \cdot \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

  - Le gradient total est donc :

$$\nabla \ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - p_i)\mathbf{x}_i = \mathbf{X}^\top (\mathbf{y} - \boldsymbol{p}), \quad \text{où} \quad \begin{aligned} p_i &= \frac{1}{1 + e^{-\eta_i}} \\ &= \text{Sigmoïde}(\eta_i). \end{aligned}$$

Solution : MV pour la Régression Logistique

- **Pas de solution analytique :**

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \quad \text{n'a pas de solution explicite.}$$

- Les équations sont non linéaires car :

$$p_i = \frac{1}{1 + e^{-\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}} \Rightarrow \text{l'équation est exprimée en fonction de Sigmoïde .}$$

- **Il faut une méthode numérique d'optimisation** : descente de gradient, Newton-Raphson, IRLS...

Solution : MV pour la Régression Logistique

- On met à jour les paramètres avec la descente de gradient :

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t)} + \alpha \cdot \nabla \ell(\boldsymbol{\beta}^{(t)})$$

- Rappel : le gradient est :

$$\nabla \ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - p_i)\mathbf{x}_i = \mathbf{X}^\top (\mathbf{y} - \boldsymbol{p})$$

- Où $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{p} = \left[\frac{1}{1+e^{-\mathbf{x}_1^\top \boldsymbol{\beta}}}, \ldots, \frac{1}{1+e^{-\mathbf{x}_n^\top \boldsymbol{\beta}}}\right]^\top = \text{Sigmoïde}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ est le vecteur des espérances.
- On met à jour $\boldsymbol{\beta}$ jusqu'à convergence.

Pourquoi utiliser la descente de gradient ?

- **Pas de solution analytique** : les dérivées incluent des exponentielles (fonction Sigmoïde).
- **La fonction est concave** : la log-vraisemblance est concave en β, donc toute méthode de gradient converge vers le maximum global.
- **Méthode simple et efficace** : fonctionne pour tous les GLMs.
- Alternatives plus rapides :
  - Méthode de Newton-Raphson
  - Méthode d'IRLS (Iteratively Reweighted Least Squares)
  - Scoring de Fisher

Métriques d'évaluation pour la Régression Logistique

- Une fois le modèle entraîné, il est crucial d'évaluer ses performances.
- Pour un problème de classification binaire (classes 0 et 1), plusieurs métriques sont utilisées.
- On suppose un seuil de décision à 0.5 sauf indication contraire.

Exercice : Implémentation de la Régression Logistique en Python sur le Jeu de Données *Breast Cancer*

Exercice : Implémentation de la Régression Logistique

- Dans cet exercice, vous implémenterez manuellement les composantes essentielles d'un modèle de régression logistique pour prédire si une tumeur mammaire est maligne ou bénigne à partir de mesures cellulaires.
- Le jeu de données `Breast Cancer Wisconsin` est accessible via `sklearn.datasets.load_breast_cancer()`.
- Il contient 569 observations (patients) et 30 variables explicatives continues extraites de l'image d'une cellule.

Exercice : Implémentation de la Régression Logistique

- Les variables incluent notamment :
  - `mean radius`, `mean texture`, `mean perimeter`, `mean area` : mesures moyennes de forme.
  - `mean smoothness`, `mean compactness`, `mean concavity` : régularité des contours.
  - `radius error`, `texture error`, `area error` : erreur-type des mesures.
  - `worst area`, `worst symmetry`, etc. : pires valeurs mesurées sur la tumeur.
- La variable cible est binaire :
  - $y = 1$: Tumeur maligne
  - $y = 0$: Tumeur bénigne

Exercice : Implémentation de la Régression Logistique

- Vous devez compléter un code Python dans lequel :
  - Vous implémenterez la log-vraisemblance pour la régression logistique.
  - Vous implémenterez le gradient de cette log-vraisemblance.
  - Vous implémenterez la fonction `logistic_regression` qui met à jour les coefficients $\boldsymbol{\beta}$ par descente de gradient.
- Les données sont divisées en train (80%) et validation (20%).
- La standardisation est faite après le split, à partir du train seulement.
- Vous utiliserez la descente de gradient pour maximiser la log-vraisemblance.
- Le clipping est appliqué à $\eta = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ pour éviter les overflows numériques.
- Un graphique montrera l'évolution de la log-vraisemblance pour les ensembles d'entraînement et de validation.

Exercice : Implémentation de la Régression Logistique

```python
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.datasets import load_breast_cancer
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.preprocessing import StandardScaler

import seaborn as sns
sns.set_theme()

# --- Charger les données ---
data = load_breast_cancer()
X_raw = data.data
y = data.target
feature_names = data.feature_names

# --- Division train / validation AVANT standardisation ---
X_raw_train, X_raw_val, y_train, y_val = train_test_split(
    X_raw, y, test_size=0.2, random_state=8302
)

# --- Standardisation ---
scaler = StandardScaler()
X_train_std = scaler.fit_transform(X_raw_train)
X_val_std = scaler.transform(X_raw_val)

# --- Ajout de l'intercept ---
X_train = np.column_stack((np.ones(X_train_std.shape[0]), X_train_std))
X_val = np.column_stack((np.ones(X_val_std.shape[0]), X_val_std))
variables = ['Intercept'] + list(feature_names)
```

Exercice : Implémentation de la Régression Logistique

```python
# --- Fonctions log-vraisemblance et gradient ---

def sigmoid(z):
    _______

def log_likelihood_logistic(beta, X, y):
    eta = _______
    eta = np.clip(eta, -30, 30)
    p = _______
    return _______

def gradient_logistic(beta, X, y):
    eta = _______
    eta = np.clip(eta, -30, 30)
    p = _______
    return _______

# --- Descente de gradient ---
def logistic_regression(X, y, lr=1e-4, max_iter=10000, tol=1e-6, X_val=None, y_val=None):
    beta = _______ # initialisation de beta
    ll_history_train = _______ # initialisation de la liste des ll pour train
    ll_history_val = _______ # initialisation de la liste des ll pour val
    for iteration in range(max_iter):
        grad = _______
        beta = _______
        ll_train = _______
        ll_history_train.append(_______)
        if X_val is not None and y_val is not None:
            ll_val = log_likelihood_logistic(beta, _______, _______)
            ll_history_val.append(_______)
        if iteration > 0 and abs(ll_history_train[-1] - ll_history_train[-2]) < tol:
            print(f"Convergence atteinte en {iteration} itérations.")
            break
    return beta, ll_history_train, ll_history_val
```

Exercice : Implémentation de la Régression Logistique

```python
# --- Entraînement ---
beta_hat, history_train, history_val = logistic_regression(
    _______, _______, X_val=_______, y_val=_______
)

# --- Affichage des coefficients estimés ---
print("Coefficients estimés :")
for var, coef in zip(variables, beta_hat):
    print(f"  {var} : {coef:.4f}")

# --- Visualisation : Log-vraisemblance ---
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(np.array(history_train)/len(y_train), label="Train", color="green")
plt.plot(np.array(history_val)/len(y_val), label="Validation", color="orange")
plt.xlabel("Itérations")
plt.ylabel("Log-vraisemblance normalisée")
plt.title("Évolution de la log-vraisemblance")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

# --- Visualisation : Prédictions vs Observations ---
p_pred = _______

y_pred_class = (p_pred >= _______).astype(int) # Seuil de décision est p = 0.5.
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.scatter(p_pred, y_val, alpha=0.6, color='royalblue')
plt.axvline(x=0.5, color='red', linestyle='--', linewidth=1.5, label='Seuil de décision (0.5)')
plt.xlabel("Probabilité prédite")
plt.ylabel("Classe observée")
plt.title("Régression Logistique | Prédictions vs Observations")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Solution: Implémentation de la Régression de Logistique en Python sur le Jeu de Donnée *Breast Cancer*

Solution : Implémentation de la Régression Logistique

```python
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.datasets import load_breast_cancer
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.preprocessing import StandardScaler

import seaborn as sns
sns.set_theme()

# --- Charger les données ---
data = load_breast_cancer()
X_raw = data.data
y = data.target
feature_names = data.feature_names

# --- Division train / validation AVANT standardisation ---
X_raw_train, X_raw_val, y_train, y_val = train_test_split(
    X_raw, y, test_size=0.2, random_state=8302
)

# --- Standardisation ---
scaler = StandardScaler()
X_train_std = scaler.fit_transform(X_raw_train)
X_val_std = scaler.transform(X_raw_val)

# --- Ajout de l'intercept ---
X_train = np.column_stack((np.ones(X_train_std.shape[0]), X_train_std))
X_val = np.column_stack((np.ones(X_val_std.shape[0]), X_val_std))
variables = ['Intercept'] + list(feature_names)
```

Solution : Implémentation de la Régression Logistique

```python
# --- Fonctions log-vraisemblance et gradient ---

def sigmoid(z):
    return 1 / (1 + np.exp(-z))

def log_likelihood_logistic(beta, X, y):
    eta = X @ beta
    eta = np.clip(eta, -30, 30)
    p = sigmoid(eta)
    return np.sum(y * np.log(p + 1e-12) + (1 - y) * np.log(1 - p + 1e-12))

def gradient_logistic(beta, X, y):
    eta = X @ beta
    eta = np.clip(eta, -30, 30)
    p = sigmoid(eta)
    return X.T @ (y - p)

# --- Descente de gradient ---
def logistic_regression(X, y, lr=1e-4, max_iter=10000, tol=1e-6, X_val=None, y_val=None):
    beta = np.zeros(X.shape[1])
    ll_history_train = []
    ll_history_val = []
    for iteration in range(max_iter):
        grad = gradient_logistic(beta, X, y)
        beta = beta + lr * grad
        ll_train = log_likelihood_logistic(beta, X, y)
        ll_history_train.append(ll_train)
        if X_val is not None and y_val is not None:
            ll_val = log_likelihood_logistic(beta, X_val, y_val)
            ll_history_val.append(ll_val)
        if iteration > 0 and abs(ll_history_train[-1] - ll_history_train[-2]) < tol:
            print(f"Convergence atteinte en {iteration} itérations.")
            break
    return beta, ll_history_train, ll_history_val
```

Solution : Implémentation de la Régression Logistique

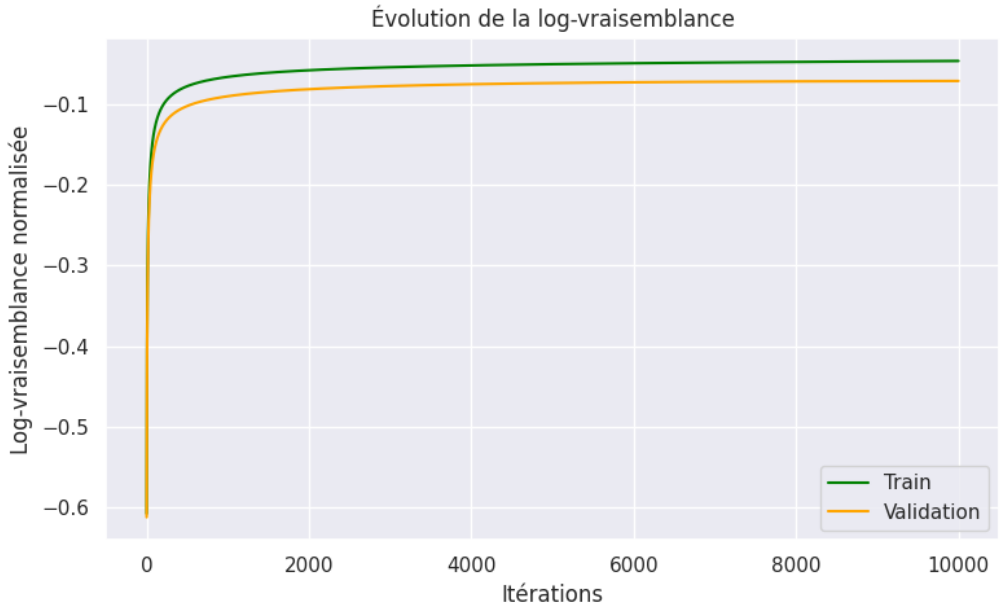
```python
# --- Entraînement ---
beta_hat, history_train, history_val = logistic_regression(
    X_train, y_train, X_val=X_val, y_val=y_val
)

# --- Affichage des coefficients estimés ---
print("Coefficients estimés :")
for var, coef in zip(variables, beta_hat):
    print(f"  {var} : {coef:.4f}")

# --- Visualisation : Log-vraisemblance ---
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(np.array(history_train)/len(y_train), label="Train", color="green")
plt.plot(np.array(history_val)/len(y_val), label="Validation", color="orange")
plt.xlabel("Itérations")
plt.ylabel("Log-vraisemblance normalisée")
plt.title("Évolution de la log-vraisemblance")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

# --- Visualisation : Prédictions vs Observations ---
p_pred = sigmoid(X_val @ beta_hat)

y_pred_class = (p_pred >= 0.5).astype(int) # Seuil de décision est p = 0.5.
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.scatter(p_pred, y_val, alpha=0.6, color='royalblue')
plt.axvline(x=0.5, color='red', linestyle='--', linewidth=1.5, label='Seuil de décision (0.5)')
plt.xlabel("Probabilité prédite")
plt.ylabel("Classe observée")
plt.title("Régression Logistique | Prédictions vs Observations")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Résultats — Régression Logistique

```
Coefficients estimés :
  Intercept : 0.1159
  mean radius : -0.6371
  mean texture : -0.4722
  mean perimeter : -0.5736
  mean area : -0.7119
  mean smoothness : -0.4782
  mean compactness : 0.7346
  mean concavity : -0.7749
  mean concave points : -1.0520
  mean symmetry : 0.2526
  mean fractal dimension : 0.4211
  radius error : -1.5648
  texture error : -0.0687
  perimeter error : -1.0656
  area error : -1.1429
  smoothness error : -0.2516
  compactness error : 0.9291
  concavity error : -0.0327
  concave points error : -0.4268
  symmetry error : 0.3495
  fractal dimension error : 0.9970
  worst radius : -1.2277
  worst texture : -1.2949
  worst perimeter : -1.0594
  worst area : -1.1812
  worst smoothness : -1.0218
  worst compactness : 0.1065
  worst concavity : -1.0446
  worst concave points : -0.9288
  worst symmetry : -1.2456
  worst fractal dimension : -0.5442
```

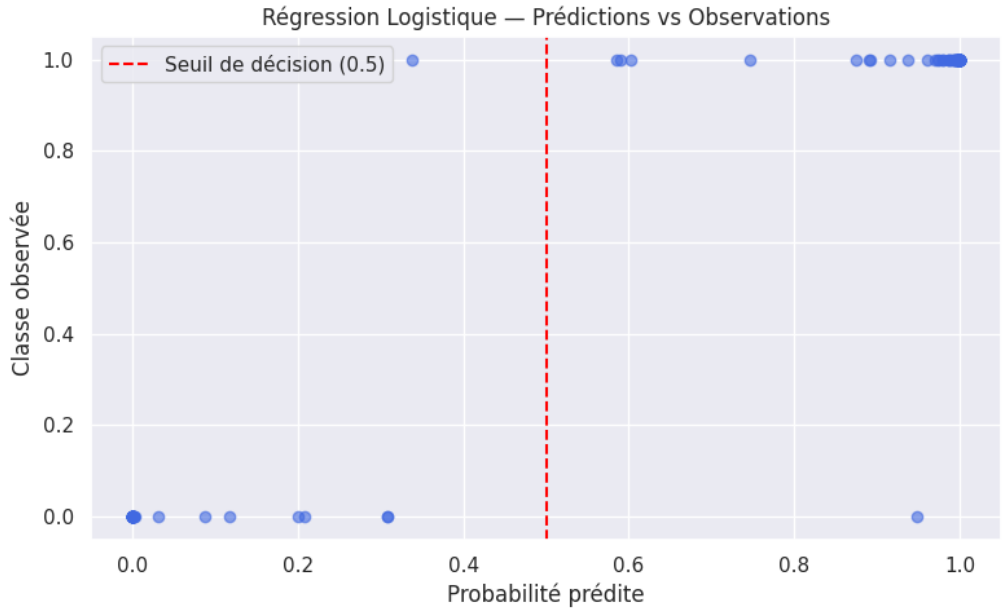
Interprétation des Résultats

- **Interprétation de la log-vraisemblance :**
  - Le graphe montre une **convergence stable** des log-vraisemblances en train et validation.
  - **Pas de sur-apprentissage visible** : la courbe de validation reste proche de celle du train.
  - Le modèle semble bien entraîné, atteignant un **plateau sans oscillation ni divergence**.
  - Le modèle **généralise bien** aux données de validation (pas d'overfitting détecté).



Interprétation des Résultats

- **Interprétation du graphique Prédictions vs Observations :**
  - Pour $y = 1$ (positif) : des probabilités proches de 1 $\Rightarrow$ **bon pouvoir discriminant**.
  - Pour $y = 0$: des probabilités proches de 0 $\Rightarrow$ le modèle **distingue bien les classes**.
  - Quelques points intermédiaires (proches de 0.5) suggèrent de **légères zones d'incertitude**.
  - Globalement, la séparation est **nette** et le **pouvoir prédictif** du modèle est bon.



Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation

- Une fois notre modèle de régression logistique entraîné, il faudra l'évaluer.
- Voici quelques métriques et outils de visualisation couramment utilisées pour évaluer un modèle de classification binaire :
  - **Accuracy (exactitude) :** Proportion de prédictions correctes (positifs + négatifs).
  - **Précision :** Parmi les observations prédites comme positives, combien sont réellement positives ?
  - **Rappel (recall) :** Parmi les vraies positives, combien ont été correctement détectées ?
  - **F1-score :** Moyenne harmonique entre précision et rappel — utile en cas de déséquilibre.
  - **Courbe ROC et AUC :** Évalue le comportement du classifieur à tous les seuils de décision.
  - **Matrice de confusion :** Résume les performances du modèle pour chaque classe prédite vs. réelle.
  - **Frontière de décision :** Représente visuellement la séparation entre les classes selon le modèle.

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : Exactitude (Accuracy)

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : Acc

- **Exactitude (Accuracy) Définition :**

$$\text{Accuracy} = \frac{\text{Nombre de prédictions correctes}}{\text{Nombre total d'observations}}$$
$$= \frac{\text{VP (Vrais Pos)} + \text{VN (Vrais Nég)}}{\text{VP (Vrais Pos)} + \text{FN (Vrais Nég)} + \text{FP (Faux Pos)} + \text{FN (Faux Nég)}}.$$

- **Significations de VP, VN, FP et FN:**
  - VP (Vrai Positif) : Le modèle a prédit 1, et c'était bien 1.
  - VN (Vrai Négatif) : Le modèle a prédit 0, et c'était bien 0.
  - FP (Faux Positif) : Le modèle a prédit 1, mais c'était 0.
  - FN (Faux Négatif) : Le modèle a prédit 0, mais c'était 1.
- **Intuition :**
  - C'est la proportion d'observations pour lesquelles le modèle a prédit correctement la classe.
  - **Exemple :** Si on a 90 bonnes prédictions sur 100 observations, l'accuracy est de 90%.
- **Utilité :**
  - Simple à comprendre et à calculer.
  - Donne une vue d'ensemble de la performance du modèle.

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : Acc

- **Exactitude (Accuracy) Définition :**

$$\text{Accuracy} = \frac{\text{Nombre de bonnes prédictions}}{\text{Nombre total d'observations}}$$
$$= \frac{\text{VP (Vrais Pos)} + \text{VN (Vrais Nég)}}{\text{VP (Vrais Pos)} + \text{FN (Vrais Nég)} + \text{FP (Faux Pos)} + \text{FN (Faux Nég)}}.$$

- **Intuition :**
  - C'est la proportion d'observations pour lesquelles le modèle a prédit correctement la classe.
  - **Exemple :** Si on a 90 bonnes prédictions sur 100 observations, l'accuracy est de 90%.
- **Utilité :**
  - Simple à comprendre et à calculer.
  - Donne une vue d'ensemble de la performance du modèle.
- **Limites :**
  - L'accuracy peut être trompeuse si les classes sont déséquilibrées.
  - Exemple : Si 95% des exemples sont de classe 0, un modèle qui prédit toujours 0 aura 95% d'accuracy, mais ne détecte jamais la classe 1!

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : Précision

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : Prec

- **Définition de la Précision:**

$$\text{Précision} = \frac{\text{VP (Vrais Positifs)}}{\text{VP (Vrais Positifs)} + \text{FP (Faux Positifs)}}$$

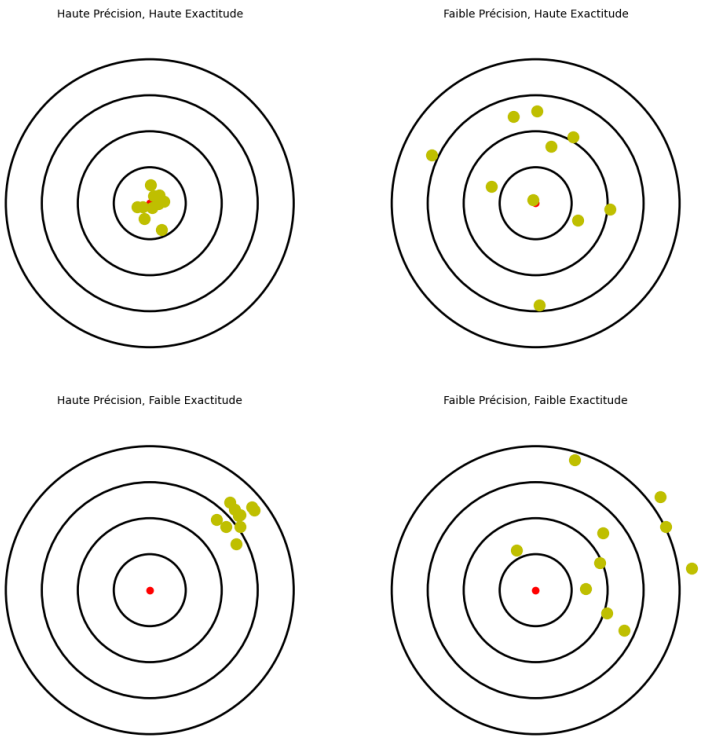
- **Intuition :**
  - La précision mesure la qualité des prédictions positives du modèle.
  - Autrement dit : **Quand le modèle prédit "positif", a-t-il raison?**
  - **Exemple :** Le modèle prédit que 100 personnes sont malades, mais seulement 80 le sont vraiment $\Rightarrow$ précision $= 80\%$.
- **Utilité :**
  - La précision est importante quand **faire une fausse alerte peut être un problème.**
  - **Exemple :** Dans un filtre anti-spam, on ne veut pas que des emails importants soient envoyés à la corbeille par erreur (faux positifs).
- **Limites :**
  - Un modèle peut avoir une très bonne précision simplement en ne prédisant "positif" que dans les cas très sûrs.
  - Il peut alors rater plein de vrais positifs $\Rightarrow$ il faut regarder aussi le **rappel**.

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation

- Cette figure illustre deux notions essentielles en évaluation de modèles :
  - **la précision :** Relative à la dispersion des prédictions et donc à la variance du modèle.
  - **l'exactitude ou encore la justesse :** Relative à proximité par rapport à la vraie cible (vérité) et donc au biais du modèle.

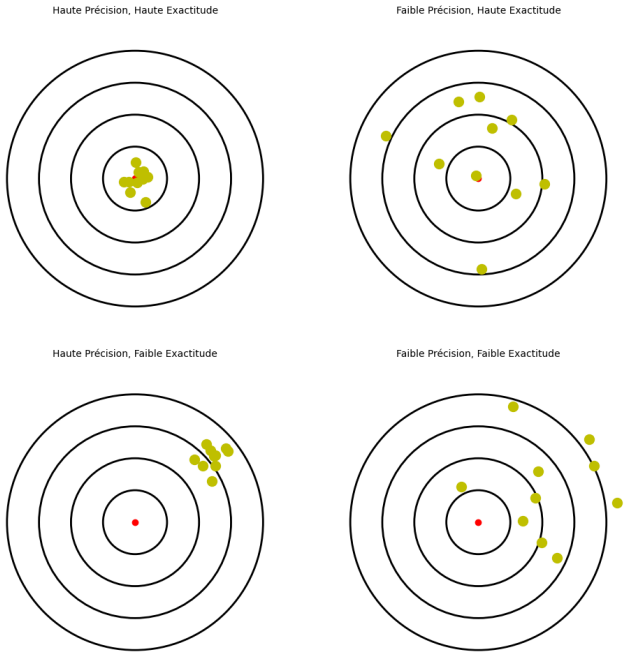
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation

- Cette figure illustre deux notions essentielles en évaluation de modèles :
  - **Précision** : les prédictions sont-elles proches les unes des autres ?
  - **Exactitude (ou Justesse)** : les prédictions sont-elles proches de la vérité ?
- Ces notions sont illustrées par des fléchettes tirées sur une cible.



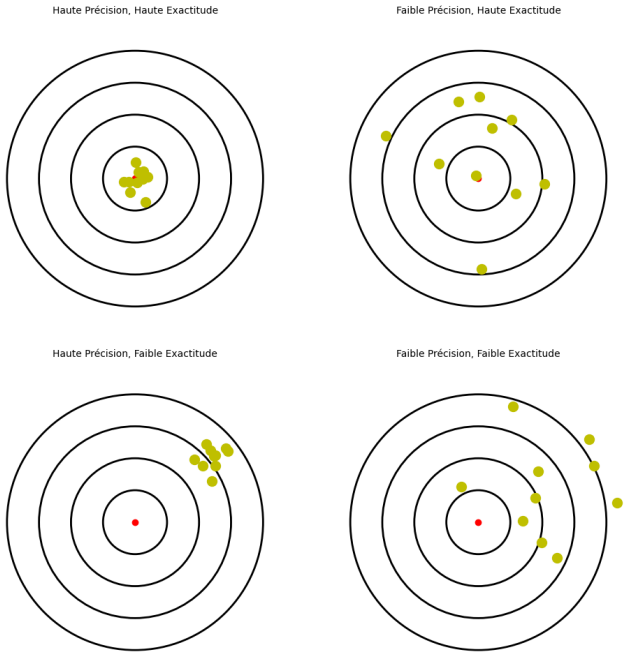
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation

- **Grande précision, haute exactitude :**
  - Les fléchettes sont toutes proches du centre (la vérité) et très regroupées.
  - Le modèle est à la fois **précis** (variance faible) et **juste** (biais faible) et donc, proche de la vérité.
  - C'est ce qu'on vise idéalement : un modèle cohérent (précis) et performant (exacte).



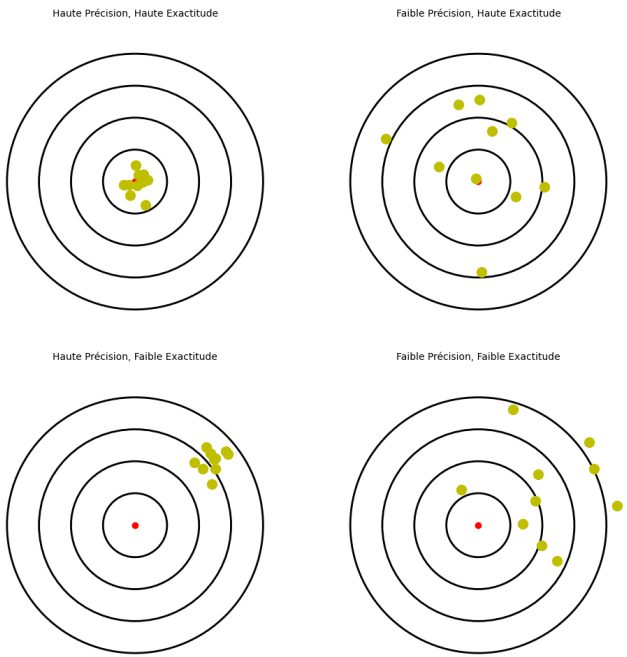
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation

- **Faible précision, haute exactitude :**
  - Les fléchettes sont dispersées (grande variance), mais en moyenne proches du centre (juste en moyenne).
  - Le modèle donne de bonnes prédictions globalement, mais manque de stabilité (biais faible mais grande variance du modèle).
  - On dit qu'il est **juste**, mais pas **précis**.



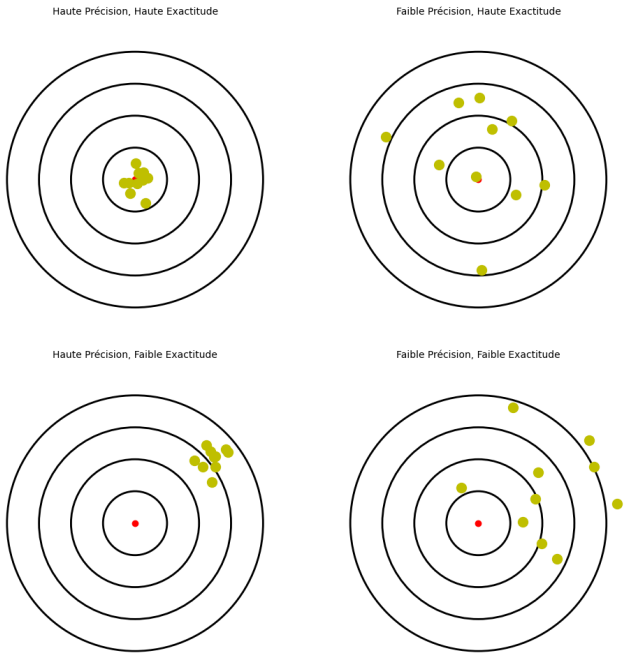
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation

- **Grande précision, Faible exactitude :**
  - Les fléchettes sont très regroupées, mais loin du centre.
  - Le modèle est **cohérent** (variance faible), mais se trompe systématiquement (biais fort).
  - C'est souvent le cas d'un **modèle biaisé**.



Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation

- Les fléchettes sont dispersées et loin du centre.
- Le modèle est à la fois **instable** et **peu fiable**.
- C'est un mauvais modèle : **il manque de précision et d'exactitude (variance forte et biais fort).**



Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : Acc

- **Exactitude (Accuracy) Définition :**

$$\text{Accuracy} = \frac{\text{Nombre de bonnes prédictions}}{\text{Nombre total d'observations}}$$
$$= \frac{\text{VP (Vrais Pos)} + \text{VN (Vrais Nég)}}{\text{VP (Vrais Pos)} + \text{FN (Vrais Nég)} + \text{FP (Faux Pos)} + \text{FN (Faux Nég)}}.$$

- **Intuition :**
  - C'est la proportion d'observations pour lesquelles le modèle a prédit correctement la classe.
  - **Exemple :** Si on a 90 bonnes prédictions sur 100 observations, l'accuracy est de 90%.
- **Utilité :**
  - Simple à comprendre et à calculer.
  - Donne une vue d'ensemble de la performance du modèle.
- **Limites :**
  - L'accuracy peut être trompeuse si les classes sont déséquilibrées.
  - Exemple : Si 95% des exemples sont de classe 0, un modèle qui prédit toujours 0 aura 95% d'accuracy, mais ne détecte jamais la classe 1!

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : Prec

- **Définition de la Précision:**

$$\text{Précision} = \frac{\text{VP (Vrais Positifs)}}{\text{VP (Vrais Positifs)} + \text{FP (Faux Positifs)}}$$

- **Intuition :**
  - La précision mesure la qualité des prédictions positives du modèle.
  - Autrement dit : **Quand le modèle prédit "positif", a-t-il raison?**
  - **Exemple :** Le modèle prédit que 100 personnes sont malades, mais seulement 80 le sont vraiment $\Rightarrow$ précision $= 80\%$.
- **Utilité :**
  - La précision est importante quand **faire une fausse alerte peut être un problème.**
  - **Exemple :** Dans un filtre anti-spam, on ne veut pas que des emails importants soient envoyés à la corbeille par erreur (faux positifs).
- **Limites :**
  - Un modèle peut avoir une très bonne précision simplement en ne prédisant "positif" que dans les cas très sûrs.
  - Il peut alors rater plein de vrais positifs $\Rightarrow$ il faut regarder aussi le **rappel**.

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : Le Rappel

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : Rapp

- **Définition du Rappel:**

$$\text{Rappel} = \frac{\text{VP (Vrais Positifs)}}{\text{VP (Vrais Positifs)} + \text{FN (Faux Négatifs)}}$$

- **Intuition :**
  - Le rappel est un ratio qui mesure la capacité du modèle à **retrouver tous les cas positifs**.
  - Exemple : s'il y a 100 vraies personnes malades et que le modèle en détecte 80, alors le rappel est de 80%.
- **Utilité :**
  - Le rappel est important quand il est **grave d'oublier un cas positif**.
  - **Exemple :** En médecine, il vaut mieux détecter tous les patients malades.
- **Limites :**
  - Un modèle peut avoir un bon rappel mais faire beaucoup d'erreurs (précision faible).
  - Il faut donc regarder aussi d'autres métriques pour évaluer la qualité globale du modèle comme le F1-score.

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : F1-score

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : F1

- **Définition du F1-score:**

$$\text{F1-score} = 2 \cdot \frac{\text{Précision} \cdot \text{Rappel}}{\text{Précision} + \text{Rappel}}$$

- **Intuition :**
  - Le F1-score combine la **précision** et le **rappel** en une seule mesure.
  - Il ne sera élevé que si les deux sont élevés.
  - Il donne un bon score uniquement quand le modèle est à la fois bon pour **trouver les vrais positifs** et pour **éviter les faux positifs.**
- **Utilité :**
  - Le F1-score est très utile quand on cherche un équilibre entre **ne pas rater de vrais cas** (rappel) et **ne pas se tromper sur les cas prédits positifs** (précision).
  - **Exemple :** En détection de maladies, on veut détecter un maximum de malades sans faussement alarmer les personnes saines.
- **À retenir :** Si le rappel ou la précision sont faibles, le F1-score sera faible aussi. **Il permet de mieux évaluer les modèles dans des situations où l'accuracy (exactitude) est trompeuse ou bien les classes sont déséquilibrées.**

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation

- **Seuil de Décision** (paramètre Bernoulli) :
  - Pour un modèle comme la régression logistique qui prédit une **probabilité** (ex. $p = 0.5$), pour prédire une classe (0 ou 1), on utilise un **seuil de décision** :

$$\hat{y} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geq \text{seuil} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  - Le seuil par défaut est 0.5, mais ce **n'est pas toujours optimal**.
- **Pourquoi ajuster le seuil est important?**
  - Baisser le seuil $\Rightarrow$ Favorise le **rappel** (augmente la confiance du modèle à considérer des positifs, et par conséquent, à **détecter plus de vrais positifs).**
  - Augmenter le seuil $\Rightarrow$ Favorise la **précision** (pousse le modèle à considérer des positifs que s'il est très confiant, et par conséquent, **favorise moins de faux positifs).**
- **Exemple concret en médecine :** On veut être sûr de ne pas rater un patient malade $\Rightarrow$ on baisse le seuil (ex. 0.3). On veut éviter d'inquiéter inutilement des personnes saines $\Rightarrow$ on monte le seuil (ex. 0.7).

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : Matrice de Confusion

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : MC

- **Définition de la Matrice de Confusion:**
  - La matrice de confusion est un tableau qui résume les résultats de classification d'un modèle binaire.
  - Elle compare les classes réelles aux classes prédites par le modèle.
  - Elle est à la base du calcul de nombreuses métriques comme la précision, le rappel et le F1-score.

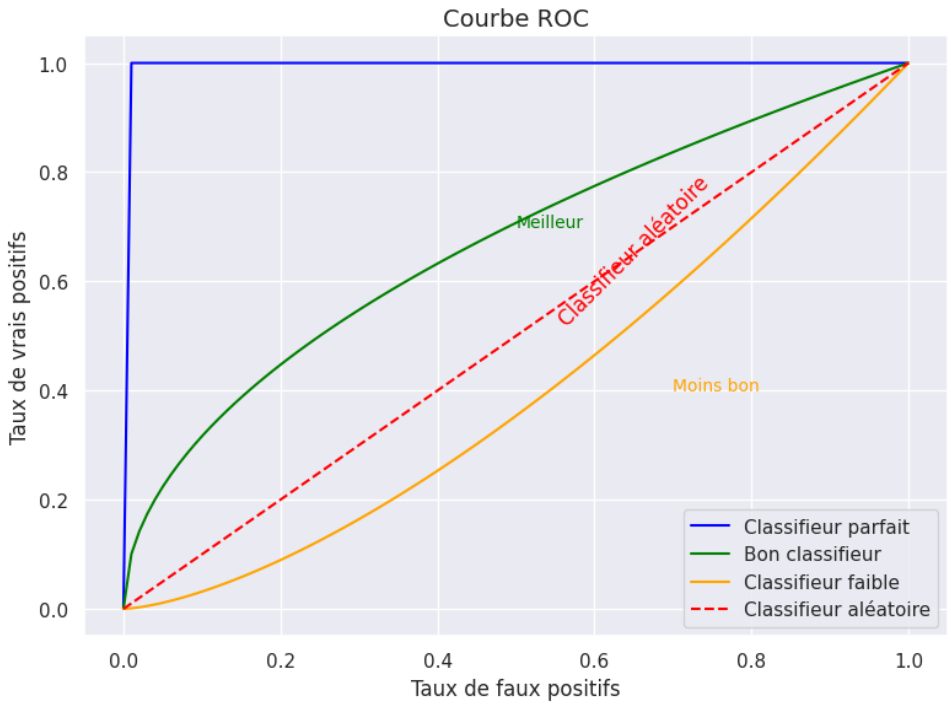
	Prédit : 0	**Prédit : 1**
Réel : 0	VN (True Negative)	FP (Faux Positif)
Réel : 1	FN (Faux Négatif)	VP (Vrai Positif)

- **Intuition :**
  - Elle permet de visualiser **où le modèle se trompe :** confond-il les classes? A-t-il tendance à surestimer ou sous-estimer les positifs?
- **Utilité :**
  - Elle offre une vue détaillée des erreurs du modèle.
  - Permet d'adapter son seuil ou sa stratégie selon les erreurs qu'on veut éviter (faux positifs ou faux négatifs).

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : Courbe ROC

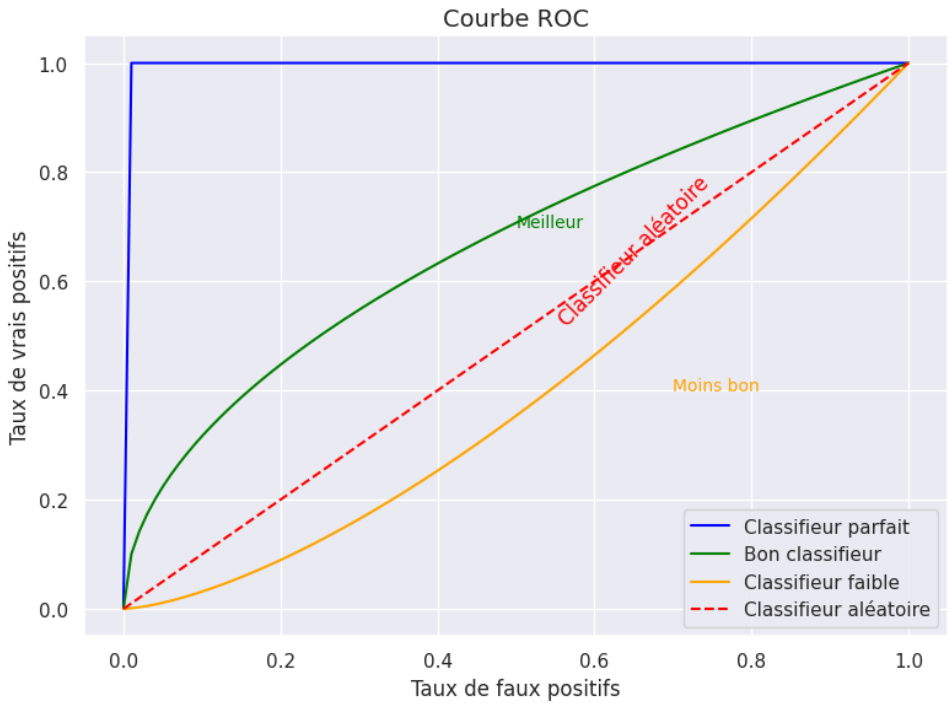
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : ROC

- **Courbe ROC (Receiver Operating Characteristic) :** La courbe ROC trace pour **tous les seuils possibles :**
  - Axe des y : Taux de vrais positifs (TPR = True Positive Rate, ou Rappel)
  - Axe des x : Taux de faux positifs (FPR = False Positive Rate)
  - Chaque point de la courbe correspond à un seuil de décision différent.



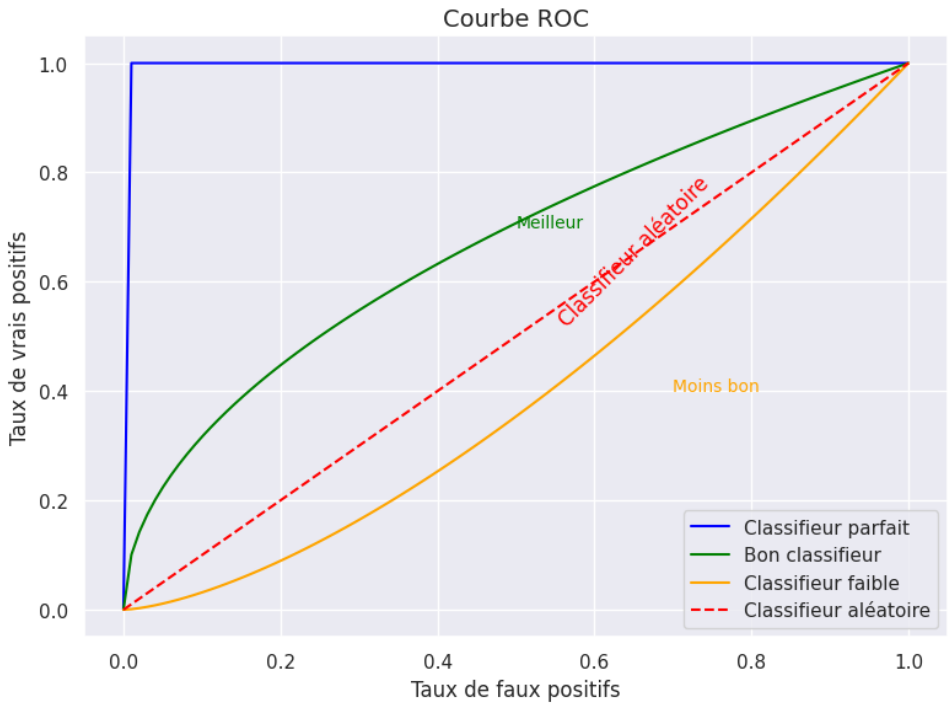
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : ROC

- **Intuition :**
  - On fait varier le seuil de 0 à 1, et on observe le **compromis entre détecter plus de vrais positifs (rappel ↑)** et **faire plus d'erreurs (faux positifs ↑).**
  - Un modèle parfait monte à 1 immédiatement (aucune erreur), puis reste plat.



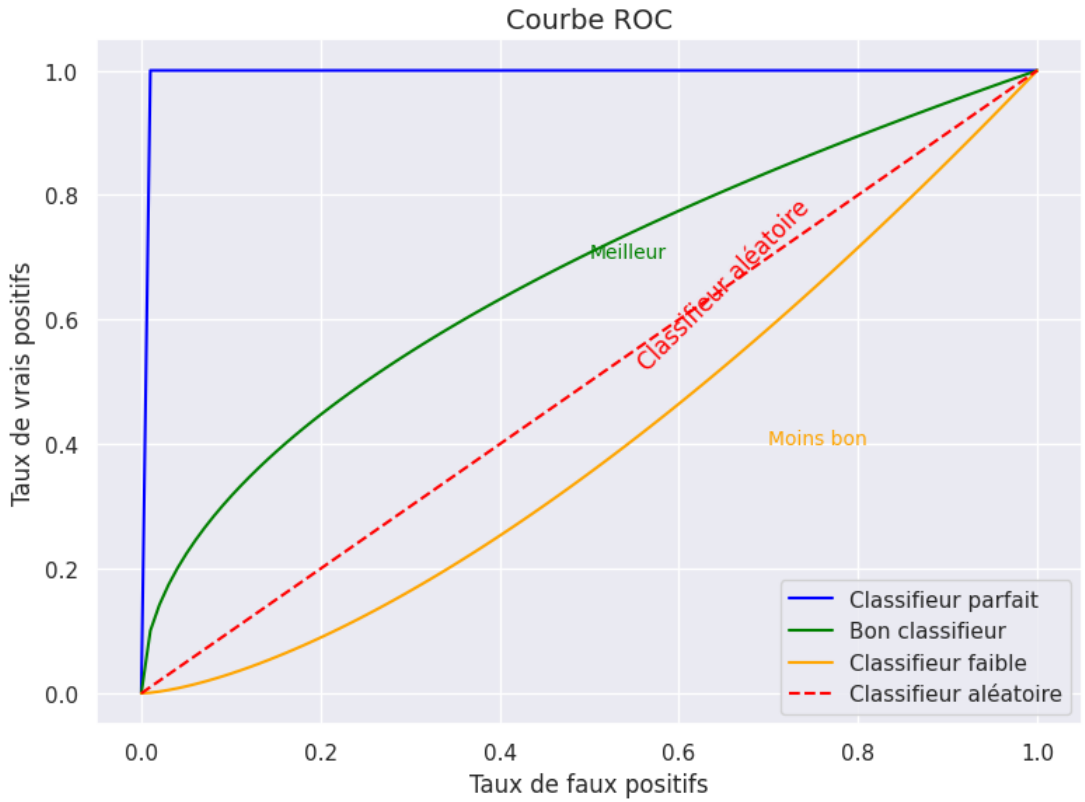
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : ROC

- **Utilité :**
  - Permet d'évaluer **la performance globale du modèle** indépendamment d'un seuil fixe.
  - Utile pour comparer plusieurs modèles entre eux.
  - Permet de choisir un **seuil optimal** selon les besoins (précision vs rappel).



Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : ROC

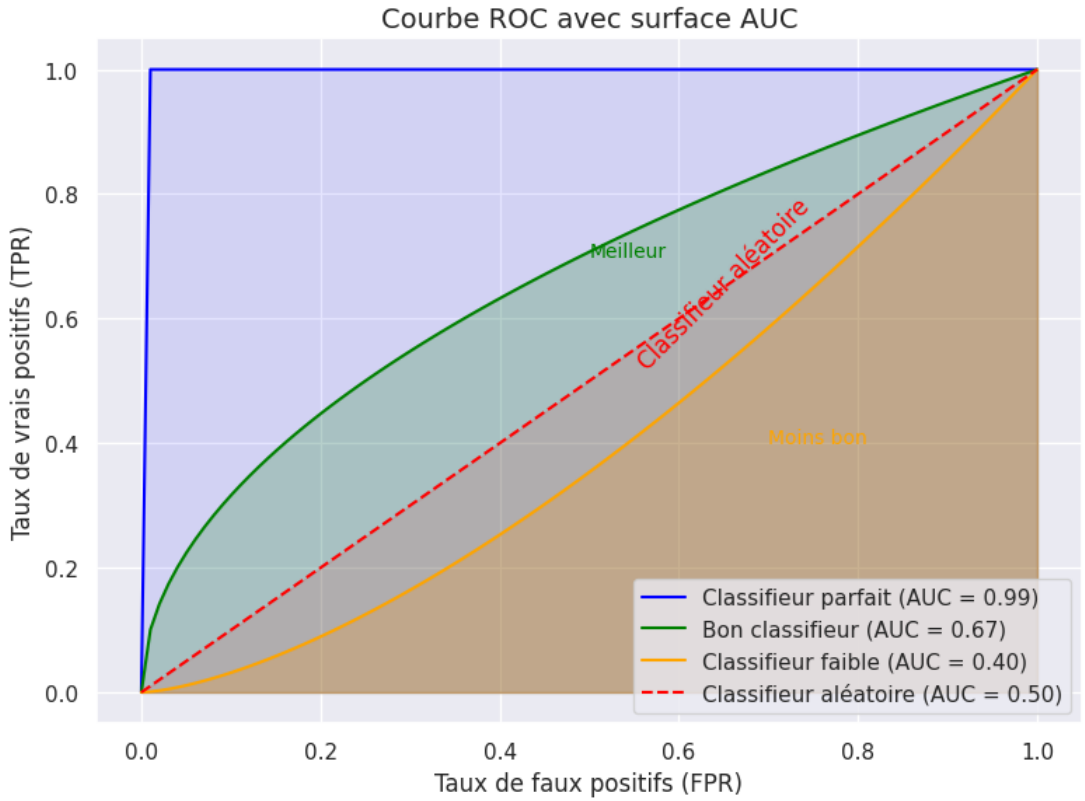
- **Interprétation des courbes :**
  - En bleu : un classifieur parfait (prédit correctement sans erreurs).
  - En vert : un classifieur efficace (bon compromis rappel/faux positifs).
  - En rouge pointillé : un classifieur aléatoire (tirage au sort).
  - En orange : un classifieur peu performant (souvent à peine meilleur que le hasard).



Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : AUC (Area Under the Curve)

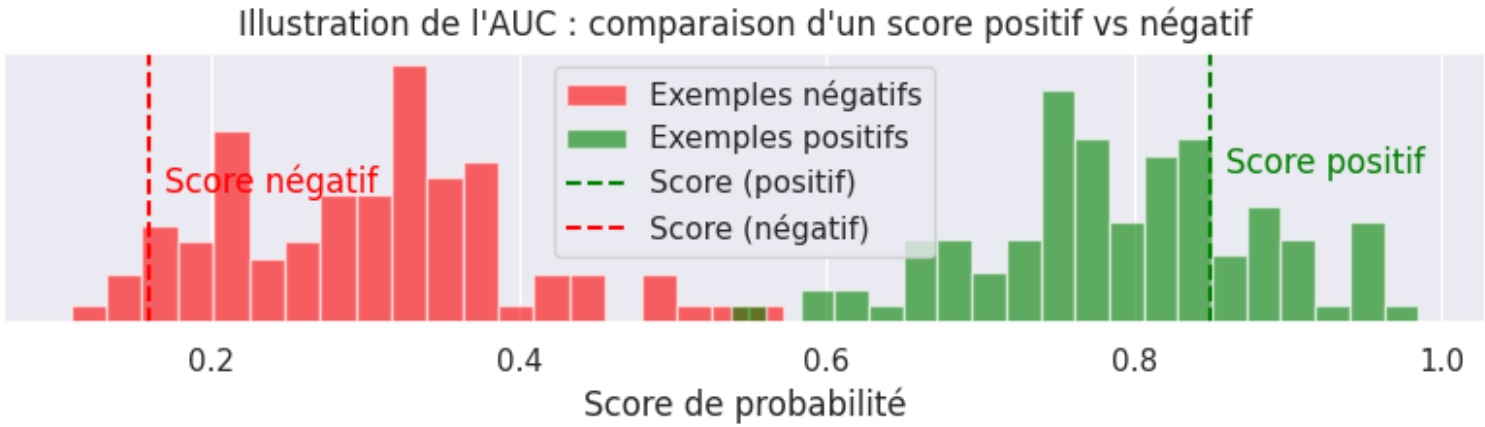
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : AUC

- **AUC (Area Under the Curve) :**
  - L'AUC correspond à l'**aire sous la courbe ROC**.
  - Sa valeur est comprise entre 0 et 1 :
    - AUC = 1 : modèle parfait.
    - AUC = 0.5 : modèle aléatoire (aucune capacité à distinguer les classes).



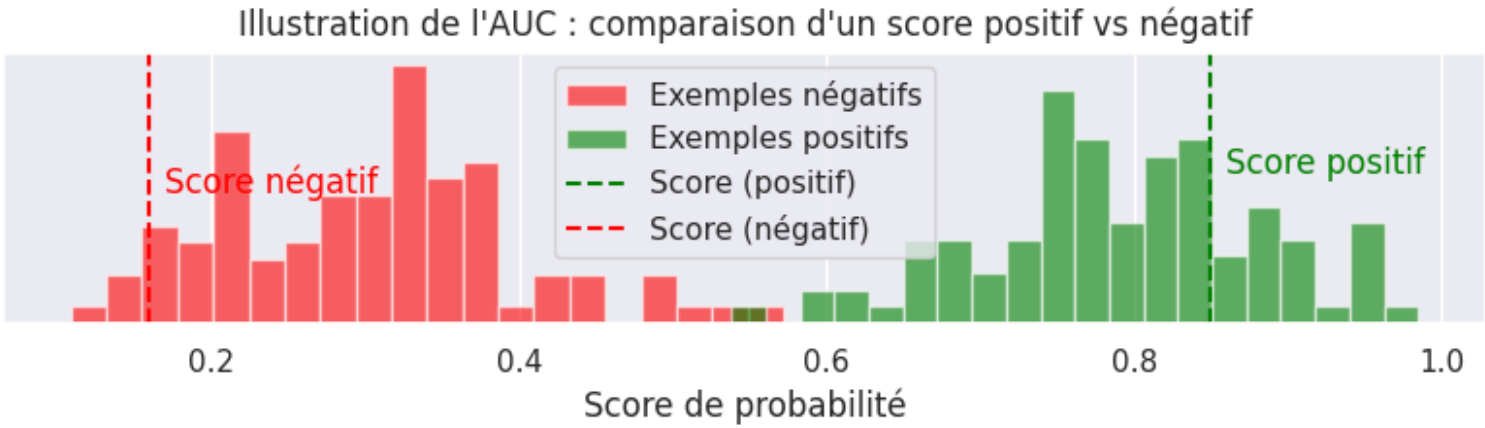
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : AUC

- Le modèle attribue des scores (probabilités) à chaque observation.
- L'AUC mesure **si, en moyenne**, les scores des positifs sont plus élevés que ceux des négatifs.
- Si le modèle donne toujours un score plus élevé aux vrais positifs qu'aux vrais négatifs, alors **l'AUC est proche de 1**.
- Si le modèle se trompe souvent dans cet ordre, alors **l'AUC est proche de 0.5** (comme un tirage au sort).
- C'est une manière de mesurer le **pouvoir de classement** du modèle, pas seulement sa capacité à prédire correctement à un seuil donné (comme 0.5).



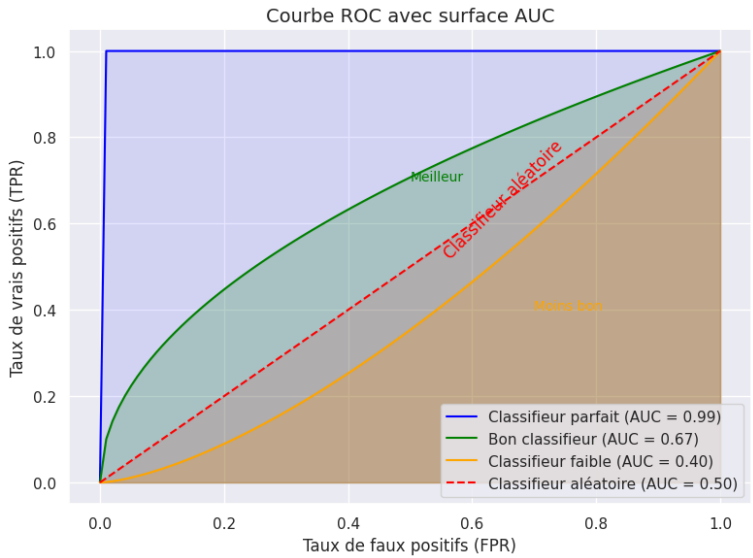
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : AUC

- On compare deux distributions de scores : une pour les exemples positifs, l'autre pour les exemples négatifs.
- Dans la figure ci-dessous, on a tiré un score au hasard dans chaque distribution.
- L'exemple **positif** a un score **plus élevé** que l'exemple négatif.
- L'AUC correspond à la probabilité qu'une telle situation se produise.
- C'est une mesure **indépendante du seuil** qui capture la **capacité de discrimination globale** du modèle.



Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : AUC

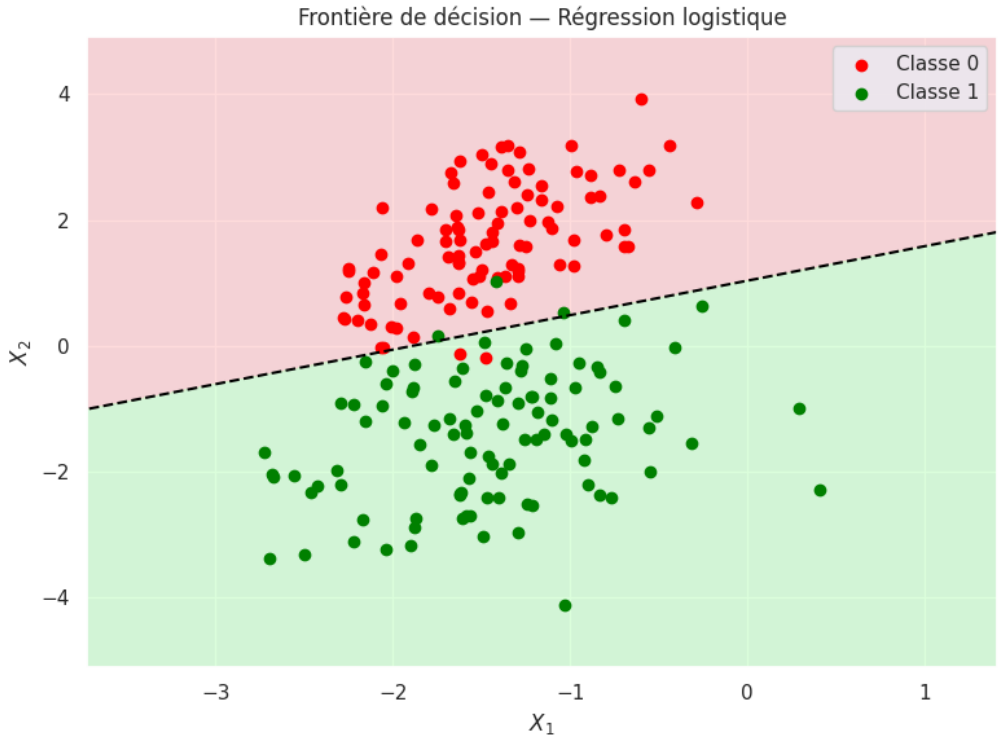
- **Utilité :**
  - **Indépendante du seuil** : on n'a pas à fixer un seuil pour obtenir l'AUC.
  - **Robuste**, même en cas de déséquilibre des classes.
  - Très utilisée pour comparer différents modèles.
- **Limites :**
  - L'AUC ne dit pas tout. Deux modèles peuvent avoir la même AUC mais se comporter différemment selon le seuil.
  - Ne remplace pas les autres métriques comme la précision ou le rappel.



Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : Frontière de Décision (avec PCA)

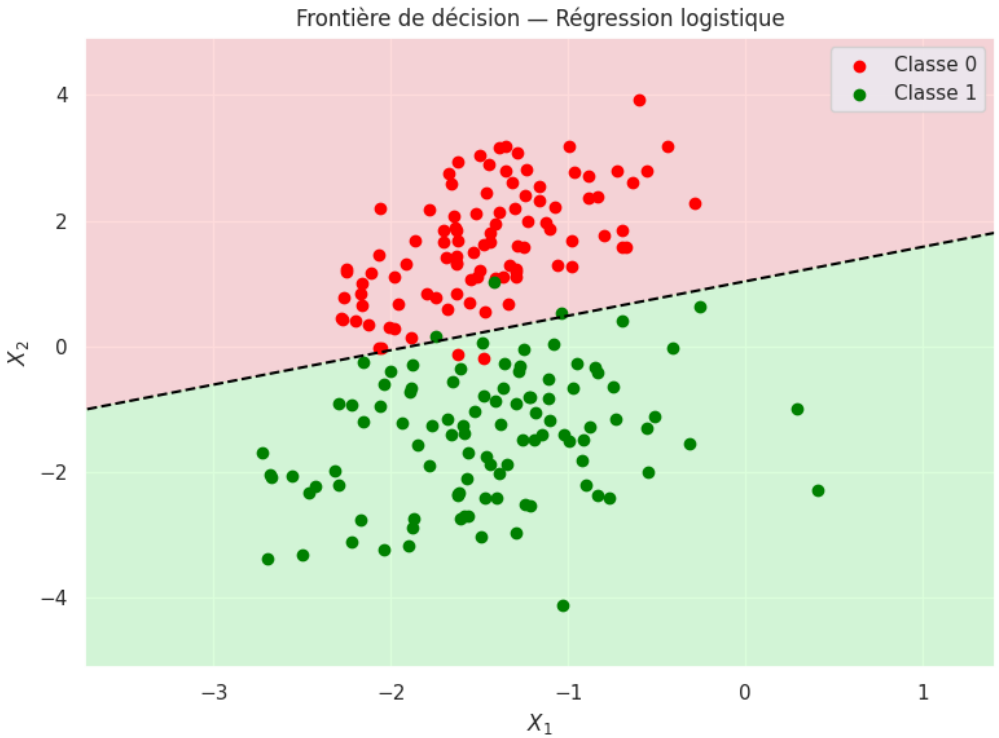
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : FD

- **Définition :**
  - La **frontière de décision** est la ligne (ou surface en dimension supérieure) qui **sépare les régions de l'espace des données** où le modèle prédit une classe plutôt qu'une autre.
  - Elle correspond aux points où la **probabilité prédite est égale au seuil**, souvent $p = 0.5$ pour la régression logistique.



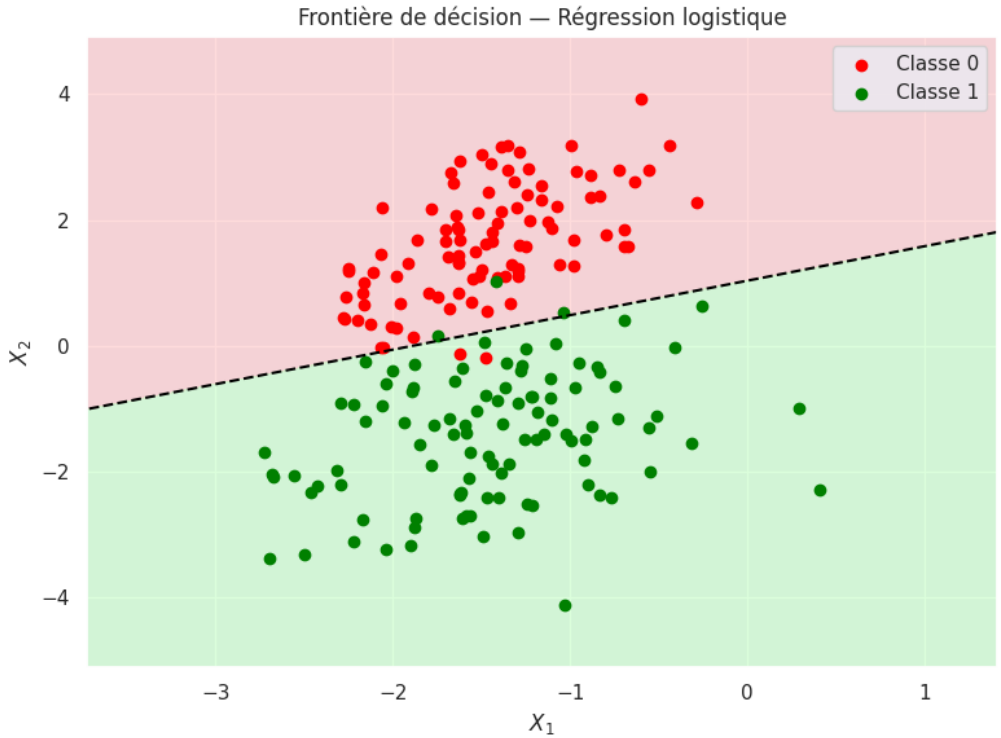
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : FD

- **Intuition :**
  - Elle nous aide à comprendre **comment le modèle généralise** à partir des données d'entraînement.
  - Elle montre **quelles zones du plan des caractéristiques** sont associées à chaque classe.



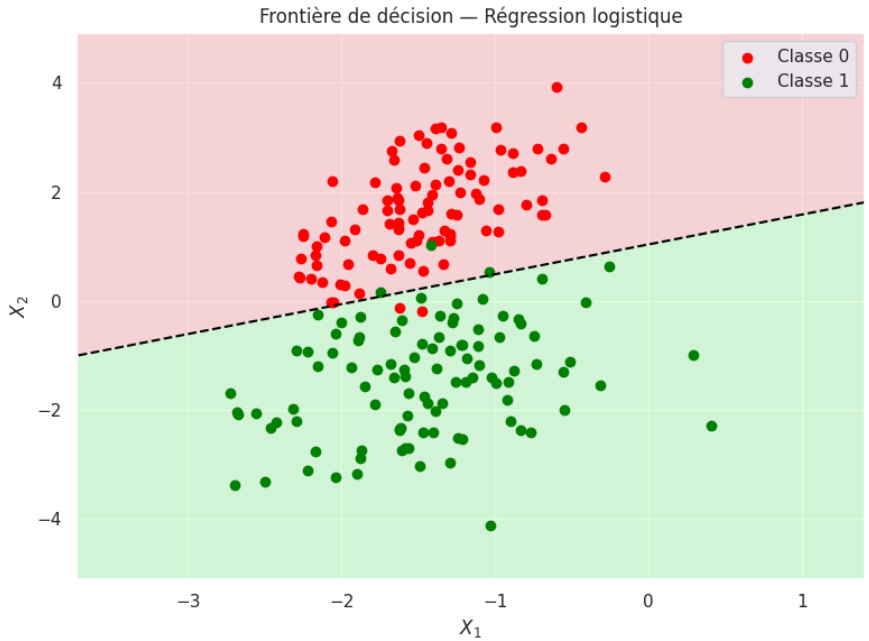
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : FD

- **Utilité :**
  - Très utile pour visualiser la décision d'un classifieur sur des jeux de données 2D.
  - Permet de diagnostiquer **le surapprentissage ou la sous-performance**.
  - Donne une idée claire de la **complexité du modèle**.



Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : PCA

- La visualisation de la frontière de décision est facile quand les données sont en 2D mais dans la plupart des cas on a plus de 2 variables explicatives.
- Dans la plupart des cas on a $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times (p+1)}$ avec $p \gg 2$:
- **Comment visualiser la décision du modèle dans un tel espace?**
- **Réponse :** on projette les données dans un sous-espace de dimension 2 à l'aide de **l'Analyse en Composantes Principales** (PCA : *Principal Component Analysis*).



Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : PCA

- **Analyse en Composantes Principales (PCA) :** Soit une matrice de données centrée $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, où :
  - n est le nombre d'observations.
  - p est le nombre de variables explicatives.
  - Ici, chaque ligne de $\mathbf{X}$ est un vecteur d'observation centré (moyenne nulle).
- **Objectif :** Trouver une base orthonormée $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p]$ telle que :
  - La projection des données maximise la variance projetée ;
  - Les axes soient orthogonaux entre eux (non corrélés) ;
  - Chaque nouvelle composante soit une combinaison linéaire des variables originales.

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : PCA

Objectif : Trouver la direction $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^p$ (de norme 1) qui maximise la variance des données projetées.

Formulation mathématique

$$\max_{\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^p,\, \|\mathbf{u}_1\|=1} \text{Var}(\mathbf{X}\mathbf{u}_1)$$

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : PCA

Objectif : Trouver la direction $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^p$ (de norme 1) qui maximise la variance des données projetées.

Formulation mathématique

$$\max_{\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^p,\, \|\mathbf{u}_1\|=1} \text{Var}(\mathbf{X}\mathbf{u}_1)$$

Où $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ est la matrice de données centrée, et Σ la matrice de covariance empirique tel que $\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{n}\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$.

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : PCA

Objectif : Trouver la direction $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^p$ (de norme 1) qui maximise la variance des données projetées.

Formulation mathématique

$$\max_{\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^p,\, \|\mathbf{u}_1\|=1} \text{Var}(\mathbf{X}\mathbf{u}_1)$$

Où $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ est la matrice de données centrée, et Σ la matrice de covariance empirique tel que $\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{n}\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$.

- La variance des données projetées sur $\mathbf{u}_1$ s'écrit :

$$\text{Var}(\mathbf{X}\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1^\top \mathbf{\Sigma} \mathbf{u}_1$$

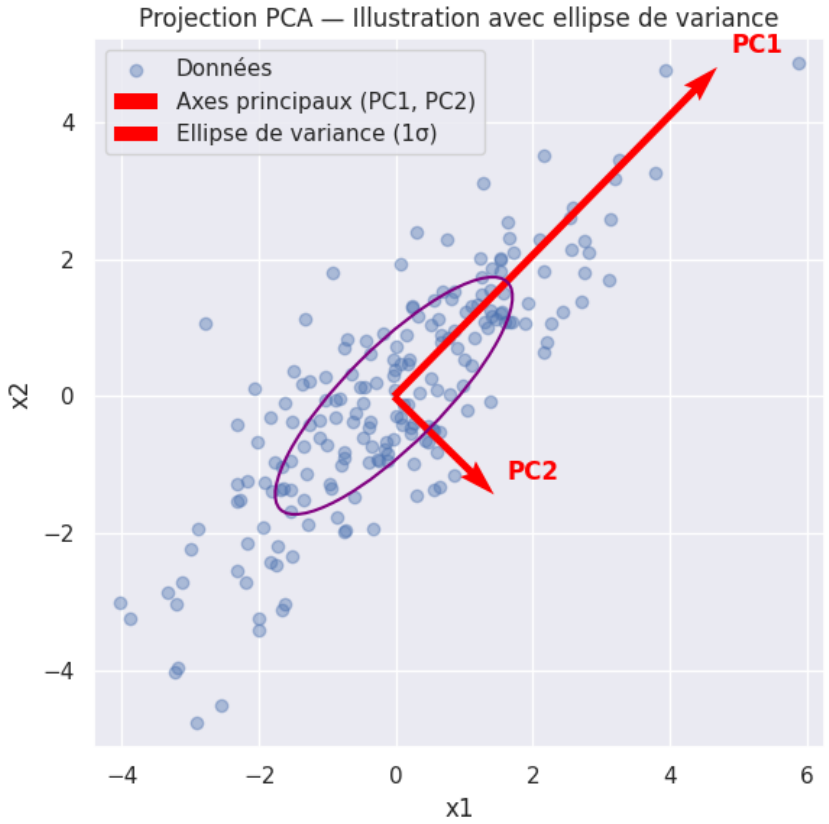
- C'est un problème classique d'optimisation quadratique sous contrainte :

$$\max_{\|\mathbf{u}_1\|=1} \mathbf{u}_1^\top \mathbf{\Sigma} \mathbf{u}_1$$

- **Solution :** $\mathbf{u}_1$ est le **vecteur propre principal de** Σ (associé à la plus grande valeur propre λ_1).

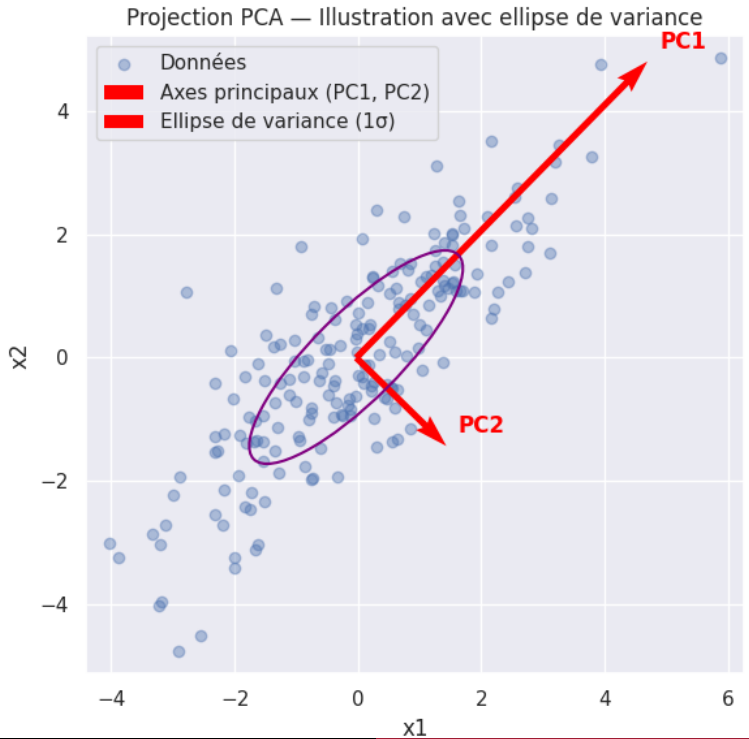
Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : PCA

- Les données sont projetées sur les directions $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ qui maximisent la dispersion.
- Cela correspond aux axes les plus étirés du nuage de points.
- PCA aligne alors les axes du nouveau repère avec les directions de variation maximale.



Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : PCA

- Si nous avons beaucoup de variables (par exemple 30 variables explicatives), cela empêche toute visualisation directe ;
- En projetant les données sur les deux premières composantes principales :
  - on capture l'essentiel de la structure du nuage ;
  - on peut visualiser facilement la séparation entre les classes ;
  - on peut dessiner une **frontière de décision** du modèle dans le plan.



Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : PCA

- **1. Centrer les données** :

$$\mathbf{X}_{\text{centrée}} = \mathbf{X} - \text{mean}(\mathbf{X})$$

- **2. Calculer la matrice de covariance** :

$$\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{n}\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$$

- **3. Décomposer la matrice de covariance** :

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top$$

où :

  - $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{p \times p}$: vecteurs propres (axes principaux) ;
  - $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$: valeurs propres (variances expliquées).

- **4. Projeter les données** :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{U}$$

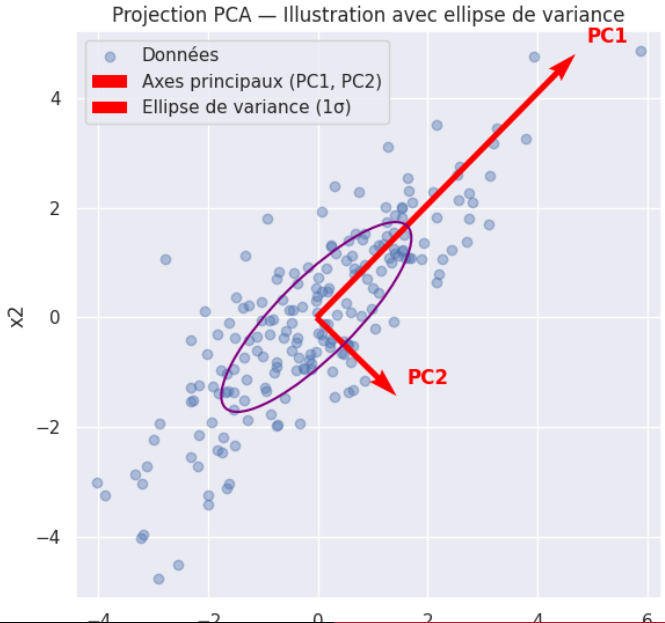
$\mathbf{Z}$ est la représentation des données dans la base des composantes principales.

Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : PCA

- **Variance expliquée par chaque composante** :

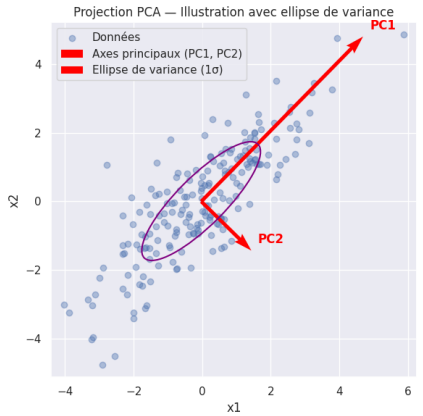
$$\text{Var. expliquée } (\text{PC}_i) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j}$$

- **Résumé** :
  - La PCA consiste à résoudre un problème de **maximisation de la variance projetée** sous contrainte d'orthogonalité.
  - Cela revient à effectuer une **décomposition en valeurs propres** de la matrice de covariance.



Métriques d'Évalutation et Outils de Visualisation : PCA

- **PC1 : Première composante principale** :
  - Direction qui maximise la variance totale.
  - Axe "majeur" de variation dans les données.
- **PC2 : Deuxième composante principale** :
  - Direction orthogonale à PC1.
  - Capture la plus grande variance restante.
  - Apporte une vue complémentaire et non redondante.
- **Utilité dans la visualisation** :
  - Ces deux axes permettent de projeter les données dans un **plan 2D informatif**.
  - Facilitent la visualisation des classes et de la frontière de décision.



Exercice: Implémentation des Métriques d'Évalutation et des Outils de Visualisation

Exercice : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

- **Objectif :** Implémenter manuellement les principales métriques d'évaluation pour la classification binaire ainsi que des fonctions de visualisation pour analyser la performance d'un modèle de régression logistique.
- **Instructions :**
  - Vous allez compléter les fonctions suivantes :
    - `compute_accuracy`, `compute_precision`, `compute_recall`, `compute_f1`, `compute_confusion_matrix`
    - `plot_log_likelihood`, `plot_predictions_vs_observations`, `plot_confusion_matrix`, `plot_roc_curve`
  - Ces fonctions seront appelées dans un pipeline d'entraînement de régression logistique.
  - Vous pouvez utiliser `numpy`, `matplotlib`, `seaborn`, ainsi que les fonctions déjà définies comme `sigmoid`.
  - Le but est de comprendre comment ces métriques et visualisations sont construites "à la main", sans appel aux fonctions de haut niveau de `scikit-learn`.

Exercice : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

```python
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns; sns.set_theme()
from sklearn.datasets import load_breast_cancer
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
from sklearn.metrics import roc_curve, roc_auc_score
# === FONCTIONS UTILITAIRES POUR LA RÉGRESSION LOGISTIQUE ===
def sigmoid(z): # Fonction sigmoïde (fonction d'activation)
    return 1 / (1 + np.exp(-z))
def log_likelihood_logistic(beta, X, y): # Fonction de log-vraisemblance pour la régression logistique
    eta = np.clip(X @ beta, -30, 30)  # stabilisation numérique
    p = sigmoid(eta)
    return np.sum(y * np.log(p + 1e-12) + (1 - y) * np.log(1 - p + 1e-12))
def gradient_logistic(beta, X, y): # Calcul du gradient de la log-vraisemblance
    eta = np.clip(X @ beta, -30, 30)
    p = sigmoid(eta)
    return X.T @ (y - p)
def logistic_regression(X, y, lr=1e-4, max_iter=10000, tol=1e-6, X_val=None, y_val=None): # Descente de gradient
    beta = np.zeros(X.shape[1])
    ll_history_train, ll_history_val = [], []
    for iteration in range(max_iter):
        grad = gradient_logistic(beta, X, y)
        beta += lr * grad
        # Suivi de la log-vraisemblance
        ll_train = log_likelihood_logistic(beta, X, y)
        ll_history_train.append(ll_train)
        if X_val is not None and y_val is not None:
            ll_val = log_likelihood_logistic(beta, X_val, y_val)
            ll_history_val.append(ll_val)
        # Critère d'arrêt : convergence si amélioration faible
        if iteration > 0 and abs(ll_history_train[-1] - ll_history_train[-2]) < tol:
            print(f"Convergence atteinte en {iteration} itérations.")
            break
    return beta, ll_history_train, ll_history_val
```

Exercice : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

```python
# === MÉTRIQUES D'ÉVALUATION | IMPLÉMENTATION MANUELLE ===
def compute_accuracy(y_true, y_pred):
    return np.mean(_______ == _______)

def compute_precision(y_true, y_pred):
    TP = np.sum((y_true == _______) & (y_pred == _______))
    FP = np.sum(_______)
    return _______ / _______

def compute_recall(y_true, y_pred):
    TP = _______
    FN = _______
    return _______

def compute_f1(precision, recall):
    return 2 * _______

def compute_confusion_matrix(y_true, y_pred):
    TP = _______
    TN = _______
    FP = _______
    FN = _______
    return np.array([[TN, FP], [FN, TP]])

# === VISUALISATIONS ===
def plot_log_likelihood(history_train, history_val, y_train, y_val): # Affiche l'évolution de la log-vraisemblance
    plt.figure(figsize=(8, 5))
    plt.plot(np.array(history_train)/len(y_train), label="Train", color="green")
    plt.plot(np.array(history_val)/len(y_val), label="Validation", color="orange")
    plt.xlabel("Itérations")
    plt.ylabel("Log-vraisemblance normalisée")
    plt.title("Évolution de la log-vraisemblance")
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

Exercice : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

```python
# Affiche la relation entre les probabilités prédites et les classes observées
def plot_predictions_vs_observations(p_pred, y_val):
    plt.figure(figsize=(8, 5))
    plt.scatter(p_pred, y_val, alpha=0.6, color='royalblue')
    plt.axvline(x=0.5, color='red', linestyle='--', linewidth=1.5, label='Seuil de décision (0.5)')
    plt.xlabel("Probabilité prédite")
    plt.ylabel("Classe observée")
    plt.title("Régression Logistique | Prédictions vs Observations")
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.show()
# Affiche une matrice de confusion
def plot_confusion_matrix(conf_mat):
    plt.figure(figsize=(5, 4))
    sns.heatmap(_______, annot=True, fmt="d", cmap="Blues",
                xticklabels=["Classe 0", "Classe 1"],
                yticklabels=["Classe 0", "Classe 1"])
    plt.xlabel("Prédit")
    plt.ylabel("Réel")
    plt.title("Matrice de confusion")
    plt.tight_layout()
    plt.show()
# Affiche la courbe ROC
def plot_roc_curve(fpr, tpr, auc):
    plt.figure(figsize=(6, 5))
    plt.plot(_______, _______, label=f"AUC = {auc:.3f}", color='darkorange')
    plt.plot([0, 1], [0, 1], 'k--')
    plt.xlabel("Faux positifs (FPR)")
    plt.ylabel("Vrais positifs (TPR)")
    plt.title("Courbe ROC")
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

Exercice : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

```python
def manual_pca(X, n_components=2):
    # Étape 1 : Centrage des données
    # On soustrait la moyenne de chaque variable (centrage colonne par colonne)
    X_centered = X - _______(_______, axis=0)

    # Étape 2 : Calcul de la matrice de covariance (p x p)
    # On choisit rowvar=False car chaque ligne est une observation
    cov_matrix = np.cov(_______, rowvar=False)

    # Étape 3 : Décomposition spectrale (valeurs propres et vecteurs propres)
    eigvals, eigvecs = np.linalg.eigh(_______)  # méthode stable pour matrices
    ↪  symétriques

    # Étape 4 : Tri des composantes principales par ordre décroissant de variance
    sorted_idx = np.argsort(_______)[::-1]
    eigvals = _______[sorted_idx]
    eigvecs = eigvecs[:, sorted_idx]

    # Étape 5 : Sélection des n premières composantes principales
    components = eigvecs[:, :_______]

    # Étape 6 : Projection des données centrées sur les composantes principales
    X_proj = _______ @ _______
    return X_proj, components
```

Exercice : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

```python
# Affiche la frontière de décision dans un plan PCA
def plot_decision_boundary_pca(X, y, beta, title="Frontière de décision (PCA manuelle)"):
    # Étape 1 : Réduction en 2D avec PCA manuelle
    X_proj, components = manual_pca(X, n_components=2)
    # Étape 2 : Définition d'une grille couvrant l'espace projeté
    x_min, x_max = X_proj[:, 0].min() - 1, X_proj[:, 0].max() + 1
    y_min, y_max = X_proj[:, 1].min() - 1, X_proj[:, 1].max() + 1
    xx, yy = np.meshgrid(np.linspace(x_min, x_max, 300),
                         np.linspace(y_min, y_max, 300))
    grid = np.c_[xx.ravel(), yy.ravel()]  # grille 2D dans l'espace PCA
    # Étape 3 : Inversion de la projection par transposition pour revenir à l'espace original
    # On passe du plan PCA 2D à l'espace des variables initiales
    X_grid_original = grid @ _______.T + np.mean(_______, axis=0)
    # Étape 4 : Ajout de l'intercept pour l'application du modèle linéaire
    X_grid_augmented = np.column_stack((np.ones(X_grid_original.shape[0]), X_grid_original))
    # Étape 5 : Calcul des probabilités prédites par la régression logistique
    def sigmoid(z): return 1 / (1 + np.exp(-z))
    probs = sigmoid(_______ @ _______).reshape(xx.shape)
    # Étape 6 : Tracé graphique de la frontière
    plt.figure(figsize=(7, 5))
    # a) Zones colorées de prédiction
    plt.contourf(xx, yy, probs, levels=[0, 0.5, 1], alpha=0.2, colors=["blue", "orange"])
    # b) Ligne de séparation (probabilité = 0.5)
    plt.contour(xx, yy, probs, levels=[0.5], colors='k', linewidths=1)
    # c) Affichage des données projetées (classes 0 et 1)
    plt.scatter(X_proj[y == 0, 0], X_proj[y == 0, 1], c='blue', label="Classe 0", alpha=0.6)
    plt.scatter(X_proj[y == 1, 0], X_proj[y == 1, 1], c='orange', label="Classe 1", alpha=0.6)
    # d) Mise en forme
    plt.xlabel("Composante principale 1")
    plt.ylabel("Composante principale 2")
    plt.title(title)
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

Exercice : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

```python
# === PIPELINE PRINCIPAL ===
def main():
    # 1. Chargement et préparation des données
    data = load_breast_cancer()
    X_raw, y = data.data, data.target
    feature_names = data.feature_names
    X_train_raw, X_val_raw, y_train, y_val = train_test_split(X_raw, y, test_size=0.2, random_state=8302)
    # 2. Standardisation
    scaler = StandardScaler()
    X_train_std = scaler.fit_transform(X_train_raw)
    X_val_std = scaler.transform(X_val_raw)
    # 3. Ajout de l'intercept
    X_train = np.column_stack((np.ones(X_train_std.shape[0]), X_train_std))
    X_val = np.column_stack((np.ones(X_val_std.shape[0]), X_val_std))
    # 4. Entraînement
    beta_hat, history_train, history_val = logistic_regression(X_train, y_train, X_val=X_val, y_val=y_val)
    # 5. Prédictions
    p_pred = sigmoid(X_val @ beta_hat)
    y_pred_class = (p_pred >= 0.5).astype(int)
    # 6. Affichage des coefficients
    print("Coefficients estimés :")
    for name, coef in zip(['Intercept'] + list(feature_names), beta_hat):
        print(f"  {name} : {coef:.4f}")
    # 7. Visualisation apprentissage et performance
    plot_log_likelihood(history_train, history_val, y_train, y_val)
    plot_predictions_vs_observations(p_pred, y_val)
    # 8. Évaluation manuelle
    accuracy = compute_accuracy(y_val, _______)
    precision = compute_precision(y_val, _______)
    recall = compute_recall(y_val, _______)
    f1 = compute_f1(precision, recall)
    conf_mat = compute_confusion_matrix(y_val, _______)
    fpr, tpr, _ = roc_curve(y_val, p_pred)
    auc = roc_auc_score(y_val, p_pred)
    print("\nMétriques d'évaluation :")
    print(f"  Accuracy  : {accuracy:.3f}")
```

Exercice : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

```
    print(f"  Précision : {precision:.3f}")
    print(f"  Rappel    : {recall:.3f}")
    print(f"  F1-score  : {f1:.3f}")
    print(f"  AUC       : {auc:.3f}")
    # 9. Visualisations finales
    plot_confusion_matrix(conf_mat)
    plot_roc_curve(fpr, tpr, auc)
    plot_decision_boundary_pca(X_val[:, 1:], y_val, beta_hat)

# Exécution
main()
```

Solution: Implémentation des Métriques d'Évalutation et des Outils de Visualisation

Solution : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

```python
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns; sns.set_theme()
from sklearn.datasets import load_breast_cancer
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
from sklearn.metrics import roc_curve, roc_auc_score
# === FONCTIONS UTILITAIRES POUR LA RÉGRESSION LOGISTIQUE ===
def sigmoid(z): # Fonction sigmoïde (fonction d'activation)
    return 1 / (1 + np.exp(-z))
def log_likelihood_logistic(beta, X, y): # Fonction de log-vraisemblance pour la régression logistique
    eta = np.clip(X @ beta, -30, 30)  # stabilisation numérique
    p = sigmoid(eta)
    return np.sum(y * np.log(p + 1e-12) + (1 - y) * np.log(1 - p + 1e-12))
def gradient_logistic(beta, X, y): # Calcul du gradient de la log-vraisemblance
    eta = np.clip(X @ beta, -30, 30)
    p = sigmoid(eta)
    return X.T @ (y - p)
def logistic_regression(X, y, lr=1e-4, max_iter=10000, tol=1e-6, X_val=None, y_val=None): # Descente de gradient
    beta = np.zeros(X.shape[1])
    ll_history_train, ll_history_val = [], []
    for iteration in range(max_iter):
        grad = gradient_logistic(beta, X, y)
        beta += lr * grad
        # Suivi de la log-vraisemblance
        ll_train = log_likelihood_logistic(beta, X, y)
        ll_history_train.append(ll_train)
        if X_val is not None and y_val is not None:
            ll_val = log_likelihood_logistic(beta, X_val, y_val)
            ll_history_val.append(ll_val)
        # Critère d'arrêt : convergence si amélioration faible
        if iteration > 0 and abs(ll_history_train[-1] - ll_history_train[-2]) < tol:
            print(f"Convergence atteinte en {iteration} itérations.")
            break
    return beta, ll_history_train, ll_history_val
```

Solution : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

```python
# === MÉTRIQUES D'ÉVALUATION | IMPLÉMENTATION MANUELLE ===
def compute_accuracy(y_true, y_pred):
    return np.mean(y_true == y_pred)

def compute_precision(y_true, y_pred):
    TP = np.sum((y_true == 1) & (y_pred == 1))
    FP = np.sum((y_true == 0) & (y_pred == 1))
    return TP / (TP + FP + 1e-12)

def compute_recall(y_true, y_pred):
    TP = np.sum((y_true == 1) & (y_pred == 1))
    FN = np.sum((y_true == 1) & (y_pred == 0))
    return TP / (TP + FN + 1e-12)

def compute_f1(precision, recall):
    return 2 * precision * recall / (precision + recall + 1e-12)

def compute_confusion_matrix(y_true, y_pred):
    TP = np.sum((y_true == 1) & (y_pred == 1))
    TN = np.sum((y_true == 0) & (y_pred == 0))
    FP = np.sum((y_true == 0) & (y_pred == 1))
    FN = np.sum((y_true == 1) & (y_pred == 0))
    return np.array([[TN, FP], [FN, TP]])

# === VISUALISATIONS ===
def plot_log_likelihood(history_train, history_val, y_train, y_val): # Affiche l'évolution de la log-vraisemblance
    plt.figure(figsize=(8, 5))
    plt.plot(np.array(history_train)/len(y_train), label="Train", color="green")
    plt.plot(np.array(history_val)/len(y_val), label="Validation", color="orange")
    plt.xlabel("Itérations")
    plt.ylabel("Log-vraisemblance normalisée")
    plt.title("Évolution de la log-vraisemblance")
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

Solution : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

```python
# Affiche la relation entre les probabilités prédites et les classes observées
def plot_predictions_vs_observations(p_pred, y_val):
    plt.figure(figsize=(8, 5))
    plt.scatter(p_pred, y_val, alpha=0.6, color='royalblue')
    plt.axvline(x=0.5, color='red', linestyle='--', linewidth=1.5, label='Seuil de décision (0.5)')
    plt.xlabel("Probabilité prédite")
    plt.ylabel("Classe observée")
    plt.title("Régression Logistique | Prédictions vs Observations")
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.show()
# Affiche une matrice de confusion
def plot_confusion_matrix(conf_mat):
    plt.figure(figsize=(5, 4))
    sns.heatmap(conf_mat, annot=True, fmt="d", cmap="Blues",
                xticklabels=["Classe 0", "Classe 1"],
                yticklabels=["Classe 0", "Classe 1"])
    plt.xlabel("Prédit")
    plt.ylabel("Réel")
    plt.title("Matrice de confusion")
    plt.tight_layout()
    plt.show()
# Affiche la courbe ROC
def plot_roc_curve(fpr, tpr, auc):
    plt.figure(figsize=(6, 5))
    plt.plot(fpr, tpr, label=f"AUC = {auc:.3f}", color='darkorange')
    plt.plot([0, 1], [0, 1], 'k--')
    plt.xlabel("Faux positifs (FPR)")
    plt.ylabel("Vrais positifs (TPR)")
    plt.title("Courbe ROC")
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

Solution : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

```python
def manual_pca(X, n_components=2):
    # Étape 1 : Centrage des données
    # On soustrait la moyenne de chaque variable (centrage colonne par colonne)
    X_centered = X - np.mean(X, axis=0)

    # Étape 2 : Calcul de la matrice de covariance (p x p)
    # On choisit rowvar=False car chaque ligne est une observation
    cov_matrix = np.cov(X_centered, rowvar=False)

    # Étape 3 : Décomposition spectrale (valeurs propres et vecteurs propres)
    eigvals, eigvecs = np.linalg.eigh(cov_matrix)  # méthode stable pour matrices
    ↪  symétriques

    # Étape 4 : Tri des composantes principales par ordre décroissant de variance
    sorted_idx = np.argsort(eigvals)[::-1]
    eigvals = eigvals[sorted_idx]
    eigvecs = eigvecs[:, sorted_idx]

    # Étape 5 : Sélection des n premières composantes principales
    components = eigvecs[:, :n_components]

    # Étape 6 : Projection des données centrées sur les composantes principales
    X_proj = X_centered @ components
    return X_proj, components
```

Solution : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

```python
# Affiche la frontière de décision dans un plan PCA
def plot_decision_boundary_pca(X, y, beta, title="Frontière de décision (PCA manuelle)"):
    # Étape 1 : Réduction en 2D avec PCA manuelle
    X_proj, components = manual_pca(X, n_components=2)
    # Étape 2 : Définition d'une grille couvrant l'espace projeté
    x_min, x_max = X_proj[:, 0].min() - 1, X_proj[:, 0].max() + 1
    y_min, y_max = X_proj[:, 1].min() - 1, X_proj[:, 1].max() + 1
    xx, yy = np.meshgrid(np.linspace(x_min, x_max, 300),
                         np.linspace(y_min, y_max, 300))
    grid = np.c_[xx.ravel(), yy.ravel()]  # grille 2D dans l'espace PCA
    # Étape 3 : Inversion de la projection par transposition pour revenir à l'espace original
    # On passe du plan PCA 2D à l'espace des variables initiales
    X_grid_original = grid @ components.T + np.mean(X, axis=0)
    # Étape 4 : Ajout de l'intercept pour l'application du modèle linéaire
    X_grid_augmented = np.column_stack((np.ones(X_grid_original.shape[0]), X_grid_original))
    # Étape 5 : Calcul des probabilités prédites par la régression logistique
    def sigmoid(z): return 1 / (1 + np.exp(-z))
    probs = sigmoid(X_grid_augmented @ beta).reshape(xx.shape)
    # Étape 6 : Tracé graphique de la frontière
    plt.figure(figsize=(7, 5))
    # a) Zones colorées de prédiction
    plt.contourf(xx, yy, probs, levels=[0, 0.5, 1], alpha=0.2, colors=["blue", "orange"])
    # b) Ligne de séparation (probabilité = 0.5)
    plt.contour(xx, yy, probs, levels=[0.5], colors='k', linewidths=1)
    # c) Affichage des données projetées (classes 0 et 1)
    plt.scatter(X_proj[y == 0, 0], X_proj[y == 0, 1], c='blue', label="Classe 0", alpha=0.6)
    plt.scatter(X_proj[y == 1, 0], X_proj[y == 1, 1], c='orange', label="Classe 1", alpha=0.6)
    # d) Mise en forme
    plt.xlabel("Composante principale 1")
    plt.ylabel("Composante principale 2")
    plt.title(title)
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

Solution : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

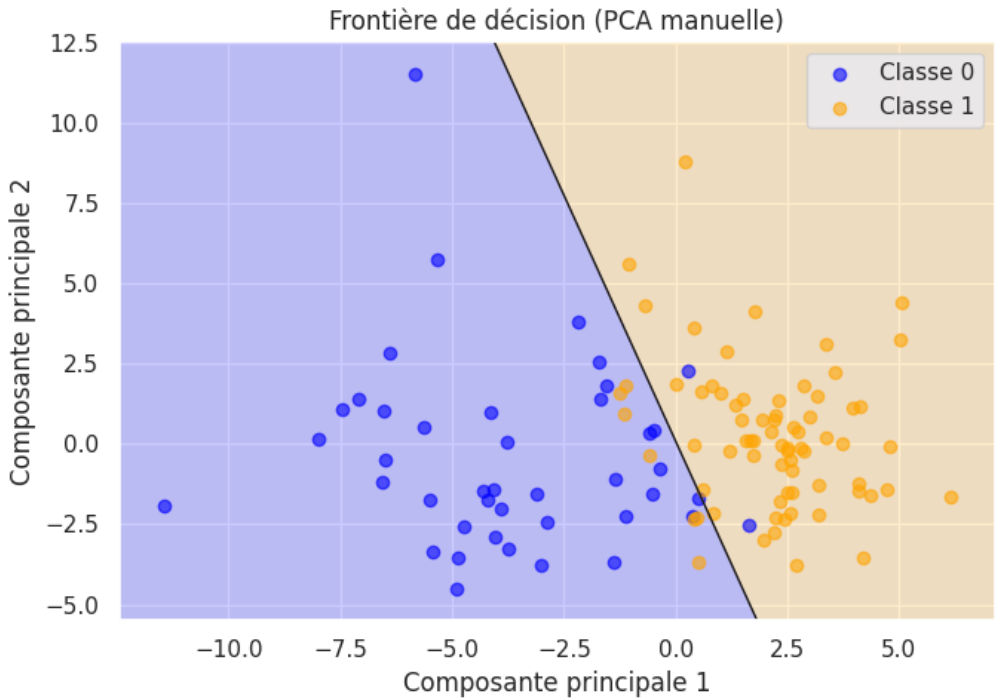
```python
# === PIPELINE PRINCIPAL ===
def main():
    # 1. Chargement et préparation des données
    data = load_breast_cancer()
    X_raw, y = data.data, data.target
    feature_names = data.feature_names
    X_train_raw, X_val_raw, y_train, y_val = train_test_split(X_raw, y, test_size=0.2, random_state=8302)
    # 2. Standardisation
    scaler = StandardScaler()
    X_train_std = scaler.fit_transform(X_train_raw)
    X_val_std = scaler.transform(X_val_raw)
    # 3. Ajout de l'intercept
    X_train = np.column_stack((np.ones(X_train_std.shape[0]), X_train_std))
    X_val = np.column_stack((np.ones(X_val_std.shape[0]), X_val_std))
    # 4. Entraînement
    beta_hat, history_train, history_val = logistic_regression(X_train, y_train, X_val=X_val, y_val=y_val)
    # 5. Prédictions
    p_pred = sigmoid(X_val @ beta_hat)
    y_pred_class = (p_pred >= 0.5).astype(int)
    # 6. Affichage des coefficients
    print("Coefficients estimés :")
    for name, coef in zip(['Intercept'] + list(feature_names), beta_hat):
        print(f"  {name} : {coef:.4f}")
    # 7. Visualisation apprentissage et performance
    plot_log_likelihood(history_train, history_val, y_train, y_val)
    plot_predictions_vs_observations(p_pred, y_val)
    # 8. Évaluation manuelle
    accuracy = compute_accuracy(y_val, y_pred_class)
    precision = compute_precision(y_val, y_pred_class)
    recall = compute_recall(y_val, y_pred_class)
    f1 = compute_f1(precision, recall)
    conf_mat = compute_confusion_matrix(y_val, y_pred_class)
    fpr, tpr, _ = roc_curve(y_val, p_pred)
    auc = roc_auc_score(y_val, p_pred)
    print("\nMétriques d'évaluation :")
    print(f"  Accuracy  : {accuracy:.3f}")
```

Solution : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

```
    print(f"  Précision : {precision:.3f}")
    print(f"  Rappel    : {recall:.3f}")
    print(f"  F1-score  : {f1:.3f}")
    print(f"  AUC       : {auc:.3f}")
    # 9. Visualisations finales
    plot_confusion_matrix(conf_mat)
    plot_roc_curve(fpr, tpr, auc)
    plot_decision_boundary_pca(X_val[:, 1:], y_val, beta_hat)

# Exécution
main()
```

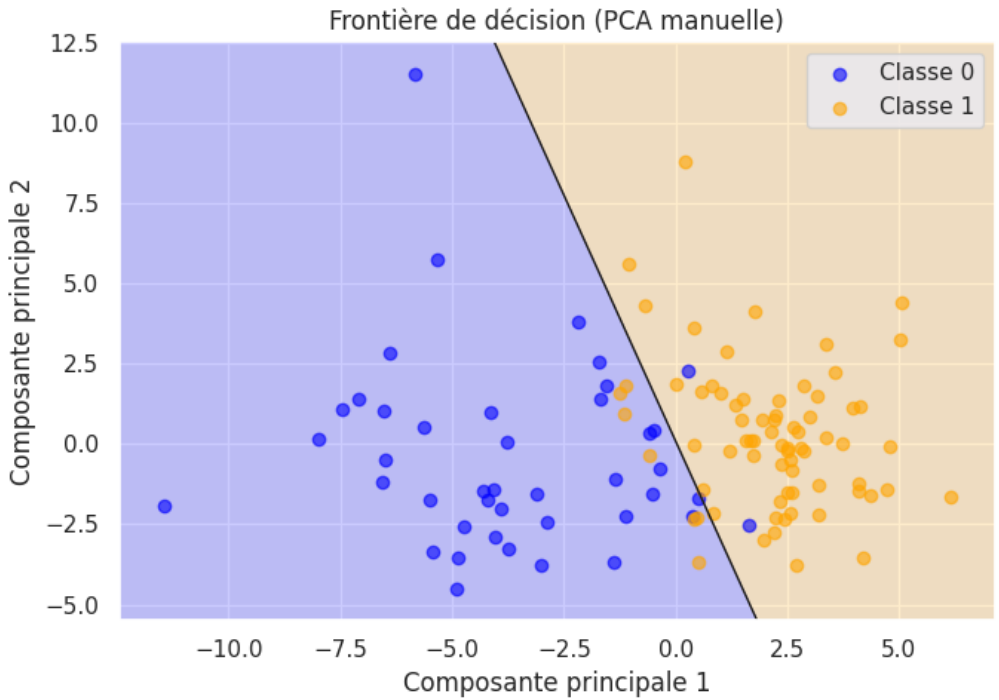
Solution : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

- **Ce que l'on observe :**
  - Les classes sont bien séparées dans le plan des deux premières composantes principales.
  - La ligne noire correspond à la frontière de décision du modèle appris.
  - La zone bleue correspond aux prédictions pour la classe 0, et l'orange à la classe 1.



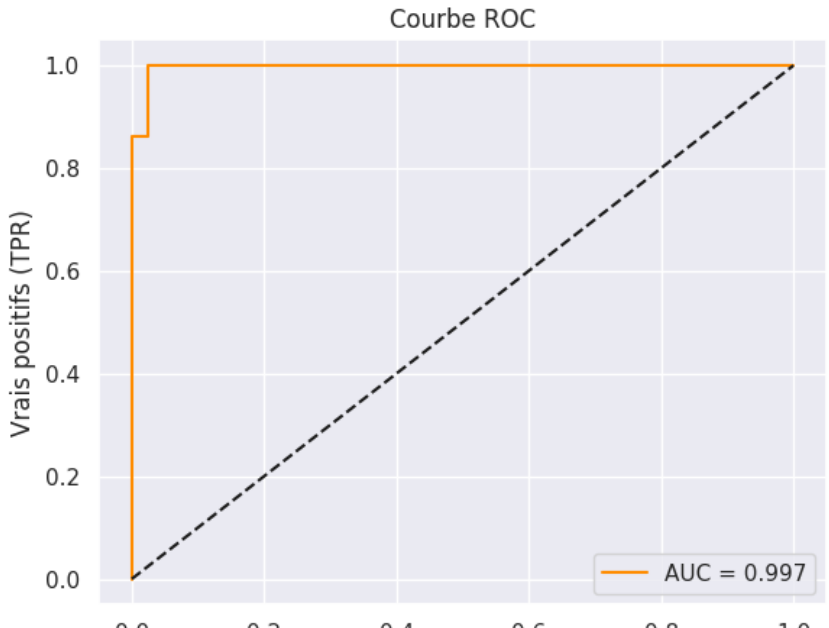
Solution : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

- **Interprétation :**
  - La projection PCA est très informative ici : elle permet de visualiser que les données sont quasi-linéairement séparables.
  - La frontière est cohérente avec les données projetées : très peu de points sont mal classés visuellement.



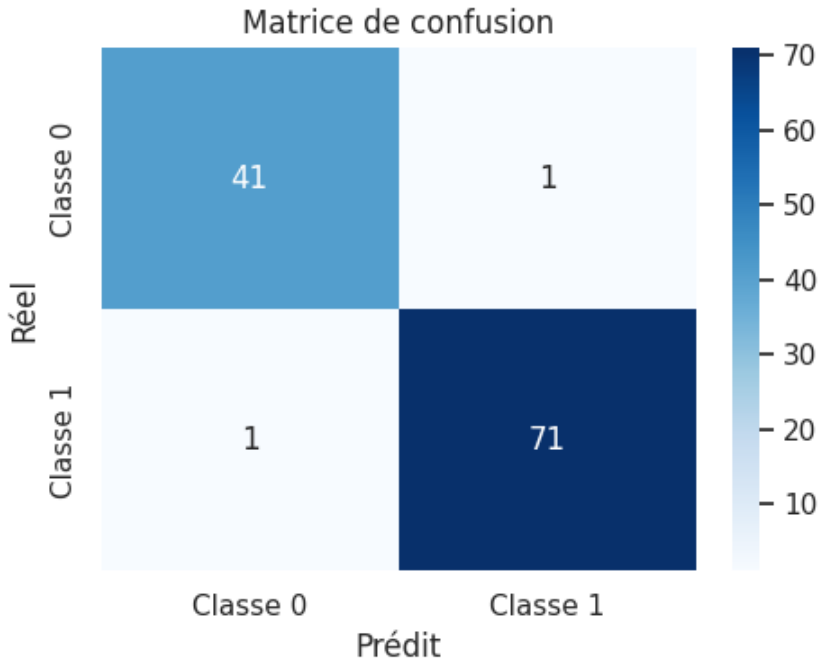
Solution : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

- **Ce que l'on observe :**
  - La courbe ROC est presque collée au coin supérieur gauche, ce qui est excellent.
  - L'AUC = 0.997, très proche de 1.
- **Interprétation :**
  - Le modèle distingue très bien les deux classes (quasi-parfaite séparation).
  - Cela confirme ce qu'on a vu avec la frontière de décision : le classifieur est très performant sur ces données.



Solution : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

- **Matrice observée :**
  - Réel : 0 $\rightarrow$ Prédit : 0 = 41, Prédit : 1 = 1
  - Réel : 1 $\rightarrow$ Prédit : 0 = 1, Prédit : 1 = 71
- **Ce que l'on observe :**
  - Seulement 2 erreurs de classification (1 faux positif + 1 faux négatif).
  - 41 + 71 = 112 bonnes prédictions sur 114 exemples.



Solution : Métriques d'Évaluation et des Outils de Vis

- **Métriques :**
  - Accuracy : $(41 + 71)/114 \approx 0.982$
  - Précision (classe 1) : $71/(71 + 1) \approx 0.986$
  - Rappel (classe 1) : $71/(71 + 1) \approx 0.986$
  - F1-score : ≈ 0.986
- **Interprétation :**
  - Peu d'erreurs et ces erreurs sont symétriques (1 FP, 1 FN).
  - La précision et le rappel excellents $\Rightarrow$ F1-score élevé.

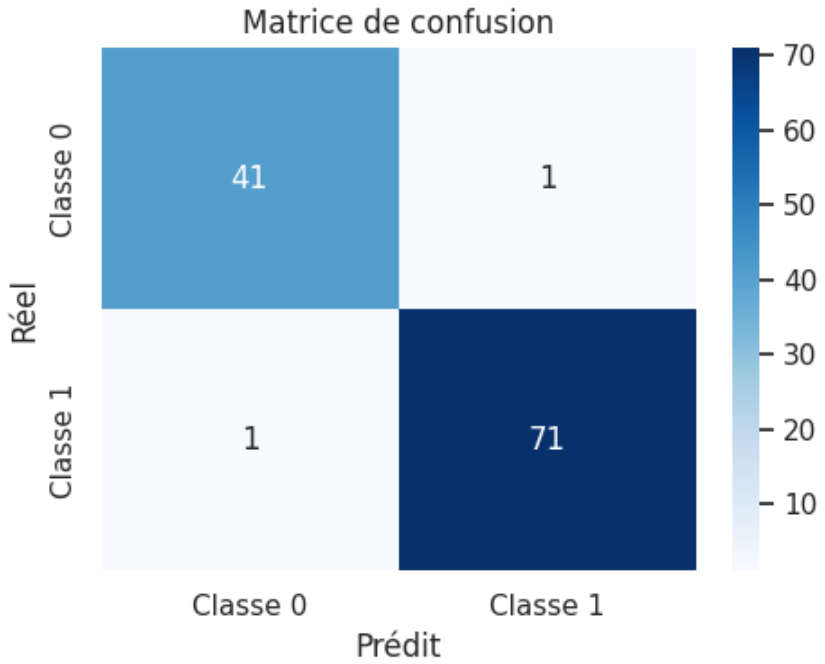


Table des Matières

1 Modèles Linéaires Généralisés

2 Regression Logistique

3 Analyse Linéaire Discriminante

4 Annexe

Analyse Linéaire Discriminante

Linear Discriminant Analysis (LDA)

Analyse Linéaire Discriminante : Introduction

- L'analyse linéaire discriminante (LDA), aussi appelée est une méthode statistique de classification supervisée.
- Elle permet de classer des objets, personnes ou événements en groupes prédéfinis à partir de variables explicatives.
- L'analyse linéaire discriminante cherche à trouver des directions de projection dans l'espace des variables qui **maximisent la variance entre les classes** et **minimisent la variance au sein des classes**.
- Ces directions sont appelées les **composantes discriminantes**, et permettent de mieux séparer les groupes dans un espace de dimension réduite.
- Les données sont ainsi projetées sur ces axes discriminants pour faciliter la classification.

Analyse Linéaire Discriminante : Introduction

- L'analyse linéaire discriminante est largement utilisée dans plusieurs domaines :
  - Reconnaissance de formes et d'images ;
  - Biostatistique (diagnostic médical, classification de profils) ;
  - Finance (analyse de risque et classification de crédit) ;
  - Apprentissage automatique, comme technique de réduction de dimension supervisée.
- Comme la PCA, elle permet de réduire la dimension des données tout en conservant l'information pertinente.
- **Différence clé :** la PCA est non supervisée et ne prend pas en compte les étiquettes de classe, alors que la LDA utilise les labels pour maximiser la séparabilité entre les classes.
- La LDA identifie donc des directions pertinentes **pour la classification**, contrairement à la PCA qui vise seulement à expliquer la variance globale.

Analyse Linéaire Discriminante : Introduction

- L'analyse discriminante repose sur certaines hypothèses fondamentales :
  - Les données suivent une **distribution normale multivariée** dans chaque classe ;
  - Les différentes classes partagent une **même matrice de covariance** (homoscédasticité).
- Ces hypothèses permettent d'utiliser la règle de Bayes pour établir une frontière de décision **linéaire** entre les classes.

Analyse Linéaire Discriminante : Introduction

- La LDA est particulièrement adaptée lorsque les données sont **étiquetées** et que l'on souhaite classer efficacement de nouvelles observations.
- Elle offre une méthode à la fois **statistiquement rigoureuse** et **interprétable**, prenant en compte la variabilité intra- et inter-groupes.
- C'est une approche pertinente pour des problèmes où la séparation linéaire entre classes est raisonnablement justifiée.

LDA : Modèles Discriminatif vs Génératif

- La **régression logistique** est un modèle discriminatif :
  - Elle modélise directement la probabilité conditionnelle $P(Y_i = y \mid \mathbf{X}_i = \mathbf{x})$;
  - L'objectif est de séparer les classes en ajustant un modèle qui maximise la vraisemblance.
- L'**analyse linéaire discriminante (LDA)** est un modèle génératif :
  - Elle commence par modéliser la loi des données dans chaque classe, c'est-à-dire $P(\mathbf{X}_i = \mathbf{x} \mid Y_i = y)$, ainsi que la loi a priori $P(Y_i = y)$;
  - Puis elle applique la règle de Bayes pour en déduire la probabilité a posteriori $P(Y_i = y \mid \mathbf{X}_i = \mathbf{x})$.
- **Conclusion** : LDA exploite une hypothèse probabiliste sur la distribution des données pour effectuer la classification.

LDA : Hypothèses du Modèle

- On suppose que les données $\mathbf{X}_i$ suivent une loi normale multivariée conditionnellement à la classe Y_i :

$$\mathbf{X}_i \mid Y_i = y \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_y, \boldsymbol{\Sigma})$$

- Chaque classe y possède sa propre moyenne $\boldsymbol{\mu}_y$, mais toutes les classes partagent la même matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ (hypothèse d'homoscédasticité).
- Les probabilités a priori des classes sont données par :

$$P(Y_i = y) = \pi_y \quad \text{avec} \sum_y \pi_y = 1$$

- Ces hypothèses permettent une classification efficace à l'aide de la règle de Bayes.

Forme mathématique des densités conditionnelles

- Sous les hypothèses de LDA, la densité des données $\mathbf{X}_i$ sachant leur classe $Y_i = y$ est donnée par la loi normale multivariée :

$$P(\mathbf{X}_i = \mathbf{x} \mid Y_i = y) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_y)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_y)\right)$$

- Cette expression combine :
  - une **partie constante** liée à la dimension et à la covariance ;
  - une **partie exponentielle** qui mesure la distance entre $\mathbf{x}$ et la moyenne de la classe y, pondérée par la matrice de covariance.

Application de la règle de Bayes

- Pour prédire la classe d'une observation $\mathbf{x}$, on utilise la règle de Bayes :

$$P(Y_i = y \mid \mathbf{X}_i = \mathbf{x}) \propto P(Y_i = y) \cdot P(\mathbf{X}_i = \mathbf{x} \mid Y_i = y)$$

- En prenant le logarithme de cette expression, on obtient :

$$\log\left[P(Y_i = y \mid \mathbf{X}_i = \mathbf{x})\right] = \log \pi_y - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_y)^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_y) + C$$

- **Remarque :** La constante C est commune à toutes les classes et correspond à :

$$C = -\frac{p}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|\boldsymbol{\Sigma}|$$

- Elle n'intervient pas dans la décision finale (comparaison entre classes), car elle est la même pour toutes les classes.
- Le log-score $\log\left[P(Y_i = y \mid \mathbf{X}_i = \mathbf{x})\right]$ nous permet de construire une fonction discriminante linéaire pour chaque classe.

Fonction discriminante et prédiction

- La fonction discriminante associée à une classe y est définie par :

$$\delta_y(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_y - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_y^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_y + \log \pi_y$$

- Cette fonction est **affine en $\mathbf{x}$** : elle dépend linéairement de l'observation.
- La prédiction se fait en choisissant la classe qui maximise ce score :

$$\widehat{Y}_i = \arg\max_y \ \delta_y(\mathbf{X}_i)$$

- Les frontières de décision sont donc des **hyperplans linéaires** qui séparent les classes dans l'espace des variables.

Formulation matricielle de LDA — Intuition géométrique

- Après avoir établi la forme probabiliste du modèle, on peut voir l'analyse discriminante linéaire comme une méthode **de projection optimale** des données.
- **Objectif :** Trouver une direction $\mathbf{w}$ dans l'espace des variables telle que la projection des données $\mathbf{z} = \mathbf{w}^\top \mathbf{x}$ permette une séparation maximale entre les classes.
- Deux types de variabilité sont essentiels :
  - La **variabilité (dispersion) entre les classes**, qu'on cherche à maximiser ;
  - La **variabilité (dispersion) à l'intérieur de chaque classe**, qu'on cherche à minimiser.
- C'est cette idée qui mène à la formulation matricielle entre et intra-classes.

Matrices de dispersion entre et intra-classes

- On considère deux classes, avec pour moyennes $\boldsymbol{\mu}_1$ et $\boldsymbol{\mu}_2$, et $\bar{\mathbf{x}}$ la moyenne globale.
- **Matrice de dispersion entre les classes (inter-classes)** :

$$\mathbf{S}_B = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^\top$$

Elle mesure la distance entre les moyennes des classes (i.e. la séparation entre les groupes).

- **Matrice de dispersion intra-classes (within-classes)** :

$$\mathbf{S}_W = \sum_{i \in \mathcal{C}_1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_1)(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_1)^\top + \sum_{j \in \mathcal{C}_2} (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_2)(\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_2)^\top$$

Elle quantifie la dispersion interne à chaque classe (i.e. la variance "bruitée" autour des centres).

Critère de Fisher et direction optimale

- On cherche une direction $\mathbf{w}$ telle que la séparation entre les classes projetées soit maximisée.
- Le critère utilisé est celui de Fisher :

$$J(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_B \mathbf{w}}{\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_W \mathbf{w}}$$

- Ce rapport mesure :
  - en haut : la variance des centres des classes (signal) ;
  - en bas : la variance intra-classe (bruit).
- L'objectif est de maximiser ce critère.
- **Solution :** la direction optimale est donnée par :

$$\mathbf{w} = \mathbf{S}_W^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)$$

- Cette direction maximise la séparabilité linéaire des classes après projection.

Étape 1 — Définition du critère de Fisher

Pour formaliser donc ce compromis entre séparation entre les classes et compacité entre les éléments d'une même classe, on utilise le **critère de Fisher** :

$$J(\mathbf{w}) = \frac{\text{Variance inter-classes projetée}}{\text{Variance intra-classes projetée}} = \frac{\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_B \mathbf{w}}{\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_W \mathbf{w}}$$

- $\mathbf{S}_B$ est la matrice de dispersion **entre les classes**, qui mesure l'écart entre les moyennes des groupes ;
- $\mathbf{S}_W$ est la matrice de dispersion **intra-classes**, qui mesure la variabilité des points autour de leur centre de classe ;
- Le critère $J(\mathbf{w})$ est un **rapport de formes quadratiques**, structure fréquente en optimisation.

Étape 2 — Interprétation intuitive du critère de Fisher

- Le numérateur $\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_B \mathbf{w}$ mesure à quel point les classes sont séparées une fois projetées sur la direction $\mathbf{w}$;
- Le dénominateur $\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_W \mathbf{w}$ mesure le "bruit projeté", c'est-à-dire la variance résiduelle dans chaque classe ;
- En maximisant $J(\mathbf{w})$, on cherche donc une direction $\mathbf{w}$ qui maximise le rapport signal / bruit dans l'espace projeté.

Intuition : on souhaite que les classes soient bien séparées (grand signal) et peu dispersées (peu de bruit).

Étape 3 — Optimisation du critère de Fisher

Nous voulons maximiser le critère suivant :

$$J(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_B \mathbf{w}}{\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_W \mathbf{w}}$$

- Cette quantité est appelée **quotient de Rayleigh** et est courante en optimisation quadratique.
- Elle est invariante à la norme de $\mathbf{w}$, donc on impose une contrainte pour l'optimiser.
- On fixe : $\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_W \mathbf{w} = 1$.

Étape 3 — Optimisation du critère de Fisher

On transforme le problème en une maximisation sous contrainte :

$$\max_{\mathbf{w}} \quad \mathbf{w}^\top \mathbf{S}_B \mathbf{w} \quad \text{sous la contrainte} \quad \mathbf{w}^\top \mathbf{S}_W \mathbf{w} = 1$$

- On introduit un multiplicateur de Lagrange λ.
- On définit la fonction de Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^\top \mathbf{S}_B \mathbf{w} - \lambda(\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_W \mathbf{w} - 1)$$

Étape 3 — Optimisation du critère de Fisher

- On dérive $\mathcal{L}$ par rapport à $\mathbf{w}$.
- Rappel utile : si $\mathbf{A}$ est une matrice symétrique, alors :

$$\frac{d}{d\mathbf{w}}(\mathbf{w}^\top \mathbf{A}\mathbf{w}) = 2\mathbf{A}\mathbf{w}$$

- En appliquant cette règle :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = 2\mathbf{S}_B\mathbf{w} - 2\lambda\mathbf{S}_W\mathbf{w}$$

- On annule le gradient pour maximiser :

$$2\mathbf{S}_B\mathbf{w} - 2\lambda\mathbf{S}_W\mathbf{w} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{S}_B\mathbf{w} = \lambda\mathbf{S}_W\mathbf{w}$$

Équation aux valeurs propres généralisée

- L'équation obtenue est une **équation aux valeurs propres généralisée** :

$$\mathbf{S}_B\mathbf{w} = \lambda\mathbf{S}_W\mathbf{w}$$

- Si $\mathbf{S}_W$ est inversible, on peut écrire :

$$\mathbf{S}_W^{-1}\mathbf{S}_B\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$$

- La solution optimale $\mathbf{w}$ est donc le **vecteur propre principal** de la matrice $\mathbf{S}_W^{-1}\mathbf{S}_B$.

Interprétation :

- $\mathbf{S}_B$ mesure la séparation entre les centres des classes ;
- $\mathbf{S}_W$ mesure la dispersion à l'intérieur des classes ;
- La direction optimale $\mathbf{w}$ maximise le rapport entre ces deux quantités.

Cas binaire : Forme explicite de la solution

Lorsque l'on a uniquement deux classes (cas binaire), la matrice $\mathbf{S}_B$ est de **rang 1** :

$$\mathbf{S}_B = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^\top$$

- Il existe donc une seule direction informative ;
- La solution optimale est donnée explicitement par :

$$\boxed{\mathbf{w} \propto \mathbf{S}_W^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)}$$

Intuition pédagogique :

- $(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)$ est le vecteur qui relie les centres de gravité des deux classes ;
- La matrice $\mathbf{S}_W^{-1}$ agit comme une correction qui pondère cette direction selon la variabilité des dimensions (moins une variable est fiable, moins elle est utilisée).

Table des Matières

1 Modèles Linéaires Généralisés

2 Regression Logistique

3 Analyse Linéaire Discriminante

4 Annexe

Annexe

Dérivation des Moments de la Famille Exponentielle

Dérivation des Moments de la Famille Exponentielle

- Soit la fonction de densité de la famille exponenitelle écrite sous la forme :

$$f_Y(y;\theta,\phi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right).$$

On souhaite démontrer tout d'abord que $\mathbb{E}[Y] = b'(\theta)$.

- **Étape 1 : Calcul de la Log-Vraisemblance**

$$\ell(\theta,\phi \mid y) = \log\left[f_Y(y;\theta,\phi)\right] = \frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi).$$

- **Étape 2 : Calcul de la fonction Score $\frac{\partial \ell}{\partial \theta}$**

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{y - b'(\theta)}{a(\phi)}.$$

- **Étape 3 — Calcul de l'Espérance du Score $\mathbb{E}\left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right]$**

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{y - b'(\theta)}{a(\phi)}\right] = \frac{\mathbb{E}[Y] - b'(\theta)}{a(\phi)}.$$

Dérivation des Moments de la Famille Exponentielle

- L'espérance du Score est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{\log\left[f_Y(y;\theta,\phi)\right]}{\partial \theta}\right] \\
&= \int \frac{1}{f_Y(y;\theta,\phi)} \cdot \frac{\partial f_Y(y;\theta,\phi)}{\partial \theta} \cdot f_Y(y;\theta,\phi)\, dy \\
&= \int \frac{f_Y(y;\theta,\phi)}{f_Y(y;\theta,\phi)} \cdot \frac{\partial f_Y(y;\theta,\phi)}{\partial \theta} \cdot dy \\
&= \int \frac{\partial f_Y(y;\theta,\phi)}{\partial \theta}\, dy \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta} \int f(y;\theta,\phi) dy \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta}(1) = 0
\end{aligned}$$

- $\mathbb{E}\left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right] = 0 \Rightarrow \frac{\mathbb{E}[Y] - b'(\theta)}{a(\phi)} = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[Y] = b'(\theta)$ (CQFD).

Dérivation des Moments de la Famille Exponentielle

- On souhaite maintenant démontrer que $\text{Var}(Y) = b''(\theta) \cdot a(\phi)$ en exploitant la dérivée seconde de la log-vraisemblance.
- Fonction log-vraisemblance :

$$\ell(\theta, \phi \mid y) = \frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)$$

- Fonction score :

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{y - b'(\theta)}{a(\phi)}$$

- Dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} = \frac{-b''(\theta)}{a(\phi)}, \quad \textbf{Résultat (I).}$$

- On a besoin de démontrer l'identité de **l'Information de Fisher** :

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)^2\right] = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right]$$

Dérivation des Moments de la Famille Exponentielle

- On rappelle que la fonction log-vraisemblance est :

$$\ell(\theta, \phi \mid y) = \log\left[f_Y(y; \theta, \phi)\right]$$

- On cherche à calculer :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log\left[f_Y(y; \theta, \phi)\right]\right]$$

- On applique la dérivée du logarithme d'une fonction :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log(f_Y) = \frac{1}{f_Y} \cdot \frac{\partial f_Y}{\partial \theta}$$

- Donc, la dérivée seconde s'écrit :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right] = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log(f_Y) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{f_Y} \cdot \frac{\partial f_Y}{\partial \theta}\right)$$

Dérivation des Moments de la Famille Exponentielle

- On applique la règle du quotient et de la chaîne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right] &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{f_Y}\cdot\frac{\partial f_Y}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(f_Y^{-1}\cdot\frac{\partial f_Y}{\partial \theta}\right)\\ &= \left(-\frac{1}{f_Y^2}\cdot\frac{\partial f_Y}{\partial \theta}\right)\cdot\frac{\partial f_Y}{\partial \theta} + \frac{1}{f_Y}\cdot\frac{\partial^2 f_Y}{\partial \theta^2}\\ &= -\frac{1}{f_Y^2}\left(\frac{\partial f_Y}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{f_Y}\cdot\frac{\partial^2 f_Y}{\partial \theta^2}\end{aligned}$$

- Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right] &= \mathbb{E}\left[-\frac{1}{f_Y^2}\left(\frac{\partial f_Y}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{f_Y}\cdot\frac{\partial^2 f_Y}{\partial \theta^2}\right]\\ \Rightarrow \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right] &= -\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{f_Y}\cdot\frac{\partial f_Y}{\partial \theta}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{f_Y}\cdot\frac{\partial^2 f_Y}{\partial \theta^2}\right]\\ &= -\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{f_Y}\cdot\frac{\partial^2 f_Y}{\partial \theta^2}\right]\end{aligned}$$

Dérivation des Moments de la Famille Exponentielle

- On remarque que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{1}{f_Y}\cdot\frac{\partial^2 f_Y}{\partial\theta^2}\right] &= \int \frac{1}{f_Y}\cdot\frac{\partial^2 f_Y}{\partial\theta^2}\cdot f_Y\,dy \\ &= \int \frac{\partial^2 f_Y}{\partial\theta^2}\,dy \\ &= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int f_Y(y;\theta,\phi)\,dy \\ &= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(1) = 0\end{aligned}$$

- Donc :

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{f_Y(y;\theta,\phi)}\cdot\frac{\partial^2 f_Y(y;\theta,\phi)}{\partial\theta^2}\right] = 0$$

- Il en résulte que :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\theta^2}\right] = -\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial\ell}{\partial\theta}\right)^2\right], \quad \textbf{Résultat (II).}$$

Dérivation des Moments de la Famille Exponentielle

- On a :

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{y - b'(\theta)}{a(\phi)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{(y - b'(\theta))^2}{a(\phi)^2}$$

- Alors :

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)^2\right] = \frac{\mathbb{E}\left[(Y - \mu)^2\right]}{a(\phi)^2} = \frac{\mathsf{Var}(Y)}{a(\phi)^2}$$

- D'autre part, d'après **Résultat (I)** :

$$-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right] = \frac{b''(\theta)}{a(\phi)}.$$

- En égalant les deux expressions dans **Résultat (I)** et **Résultat (II)**:

$$\frac{b''(\theta)}{a(\phi)} = \frac{\mathsf{Var}(Y)}{a(\phi)^2} \Rightarrow \mathsf{Var}(Y) = b''(\theta) \cdot a(\phi), \quad \text{(CQFD)}.$$

Fonction de Score et Information de Fisher

Fonction de Score et Information de Fisher

- Toute variable aléatoire Y dont la loi appartient à la famille exponentielle a une densité de probabilité de la forme :

$$f_Y(y;\theta,\phi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right)$$

- Dans ce cadre, on peut analyser :
  - **la fonction de score**, qui mesure la sensibilité de la log-vraisemblance par rapport à θ,
  - **l'information observée**, qui donne la courbure locale de la log-vraisemblance,
  - **l'information de Fisher**, qui mesure la précision espérée de l'estimateur.

Fonction de Score et Information de Fisher

- **Définition formelle :** Soit $Y \sim f_Y(y;\theta)$, une variable aléatoire dont la loi dépend d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$. La log-vraisemblance est donnée par:

$$\boxed{\ell(\theta; y) = \log\left[f_Y(y;\theta)\right]}$$

La **fonction de score** $U(\theta)$ est la dérivée de la log-vraisemblance par rapport à θ :

$$\boxed{U(\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}\ell(\theta; y) = \frac{\partial}{\partial\theta}\log\left[f_Y(y;\theta)\right]}$$

- $U(\theta)$ est une variable aléatoire (car dépend de Y) :
  - Elle indique la direction dans laquelle modifier θ pour augmenter la vraisemblance.

Fonction de Score et Information de Fisher

- $U(\theta) = \frac{\partial \ell}{\partial \theta}$ agit comme une **boussole** qui guide l'optimisation de θ.
- **Intuition** : si on observe une donnée y, on se demande *Pour quelle valeur de θ cette donnée est-elle la plus probable ?*
  - Si $\frac{\partial \ell}{\partial \theta} > 0$: on peut augmenter θ pour améliorer la vraisemblance.
  - Si $\frac{\partial \ell}{\partial \theta} < 0$: on peut diminuer θ.
  - Si $\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = 0$: on est sur un **point critique** (potentiellement maximum).
- **Résultat fondamental :** On a démontré dans **le calcul de la moyenne pour une densité faisant partie de la famille exponentielle que**

$$\mathbb{E}[U(\theta)] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right] = 0.$$

- **Ceci est vrai pour n'importe quelle densité $f_Y(y;\theta)$:**
  - Le maximum de vraisemblance est atteint lorsque la dérivée de la log-vraisemblance est nulle en moyenne.

Fonction de Score et Information de Fisher

- **Définition** : **L'information observée** est l'opposée de la dérivée seconde de la log-vraisemblance :

$$\boxed{J(\theta) := -\frac{\partial^2 \ell(\theta; y)}{\partial \theta^2}}$$

- C'est une mesure locale de la courbure de la log-vraisemblance autour de θ.
- Si la log-vraisemblance est très courbée (pic étroit), alors l'information est grande en quantité et l'estimation est alors plus précise.
- Si elle est plate, alors l'estimation est plus incertaine.

Fonction de Score et Information de Fisher

- **L'information de Fisher** est l'espérance de l'information observée. Elle quantifie cette concavité moyenne :

$$\boxed{I(\theta) := \mathbb{E}_\theta \left[J(\theta) \right] = -\mathbb{E}_\theta \left[\frac{\partial^2 \ell(\theta; Y)}{\partial \theta^2} \right]}$$

- Lorsque l'on peut échanger dérivation et intégration, on a aussi :

$$\boxed{I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial \ell(\theta; Y)}{\partial \theta} \right)^2 \right]}$$

- On a démontré dans **le calcul de la variance pour une densité faisant partie de la famille exponentielle que** que les deux définitions sont équivalentes et ceci est vrai pour n'importe quelle densité $f_Y(y; \theta)$.

Fonction de Score et Information de Fisher

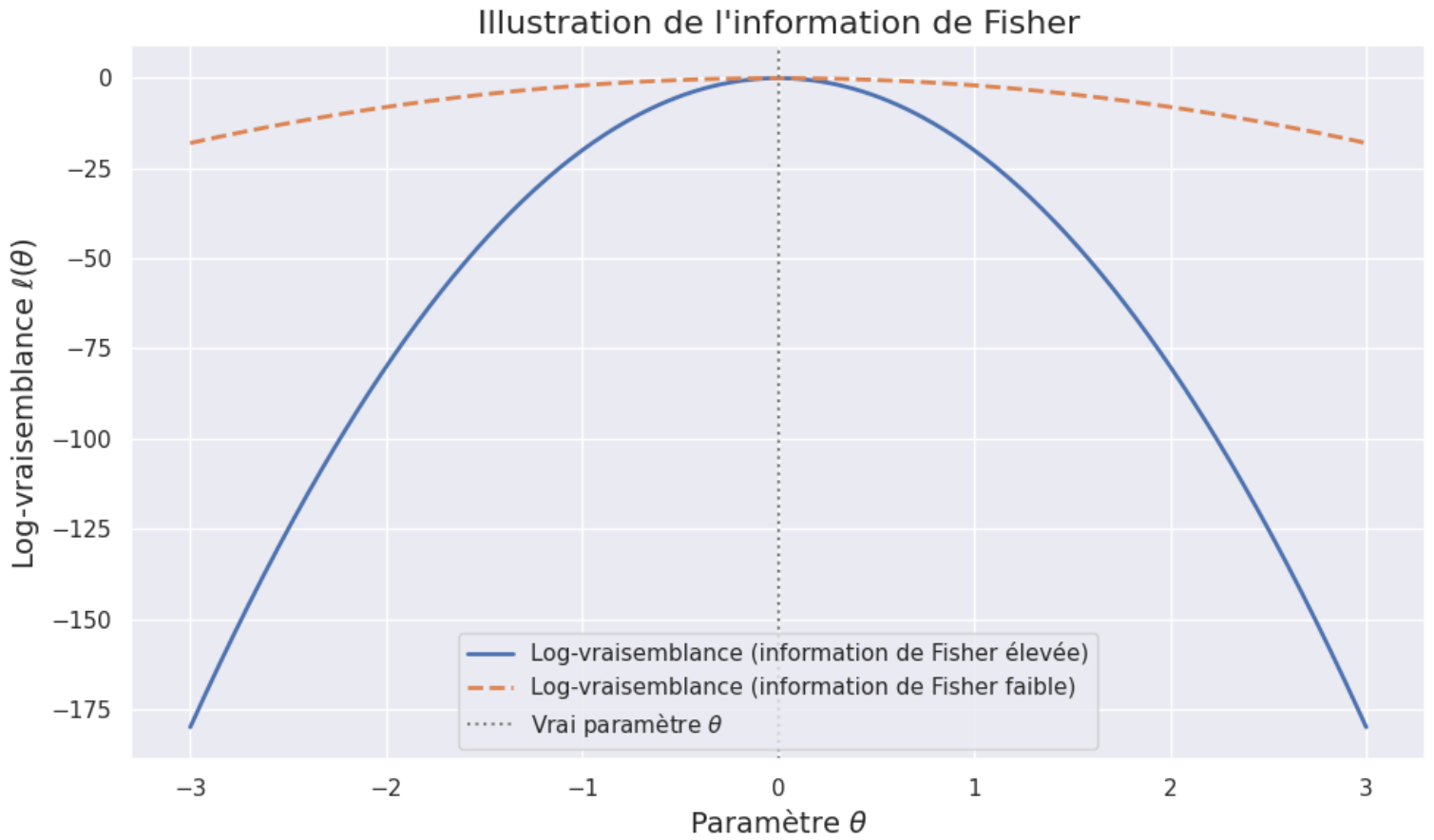
- Étant donné que $\mathbb{E}\left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right] = 0$, l'information de Fisher exprime la variance du score $\text{Var}[U(\theta)]$ puisque :

$$\begin{aligned}
\text{Var}\left(\underbrace{\frac{\partial \ell(\theta; Y)}{\partial \theta}}_{U(\theta)}\right) &= \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial \ell(\theta; Y)}{\partial \theta}\right)^2 - \left(\underbrace{\mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial \ell(\theta; Y)}{\partial \theta}\right]}_{0}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial \ell(\theta; Y)}{\partial \theta}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_\theta\left[J(\theta)\right] \\
&= I(\theta)
\end{aligned}$$

- **Interprétation intuitive :**
  - $I(\theta)$ mesure la précision moyenne de notre estimation.
  - Plus $I(\theta)$ est grand, plus la log-vraisemblance est "pointue", et plus on estime θ précisément.

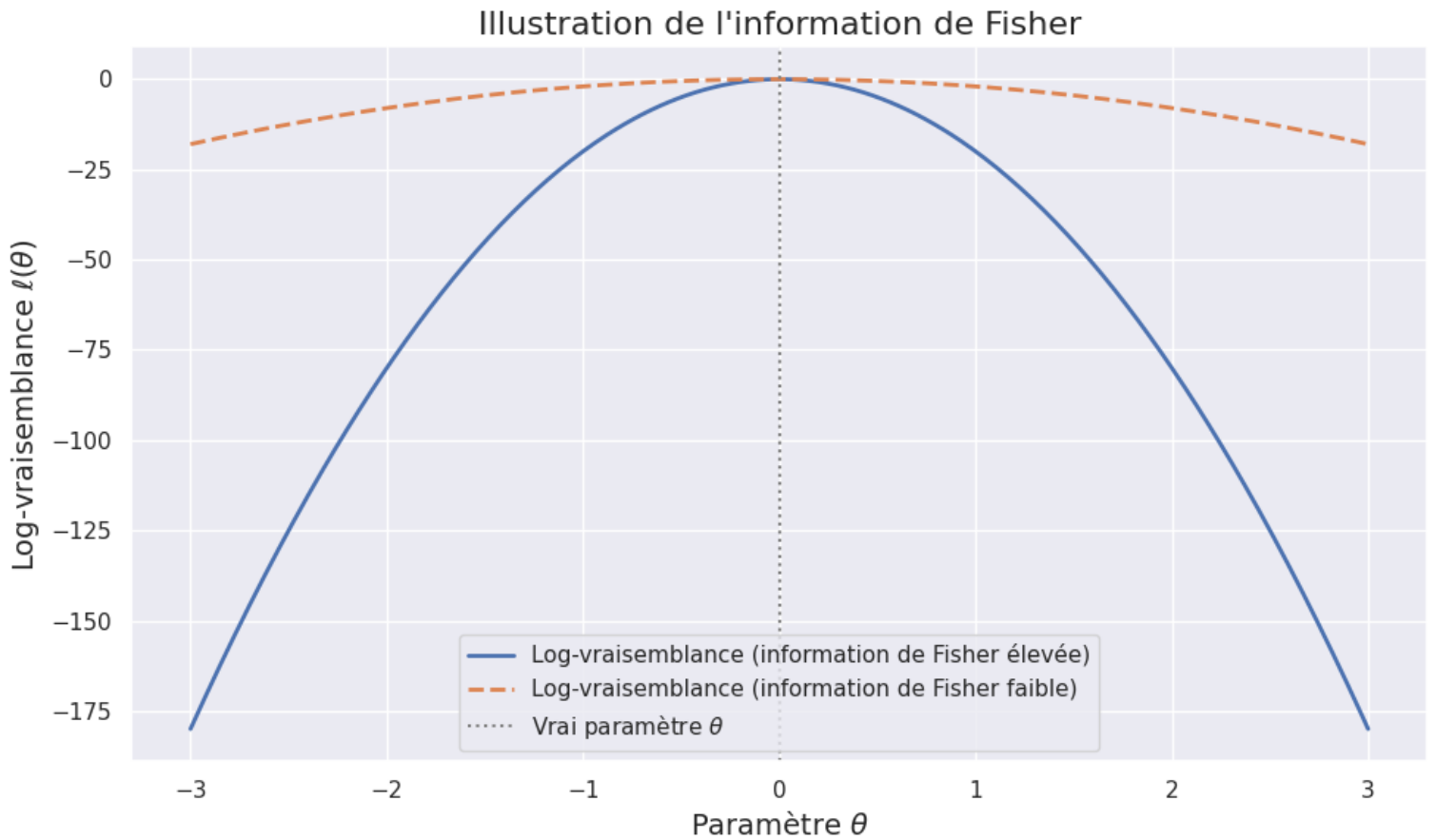
Fonction de Score et Information de Fisher

- **Interprétation intuitive :**
  - $I(\theta)$ mesure la précision moyenne de notre estimation.
  - Plus $I(\theta)$ est grand, plus la log-vraisemblance est "pointue", et plus on estime θ précisément.



Fonction de Score et Information de Fisher

- **Interprétation intuitive :**
  - Exemple : En régression linéaire où $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mathcal{I}(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}\right] = \frac{b''(\theta)}{a(\phi)} = \frac{1}{\sigma^2}$. Plus le bruit est faible, plus l'estimation est précise.



Fonction de Score et Information de Fisher

Terme	**Expression**	**Interprétation**
Fonction de score $U(\theta)$	$\frac{\partial}{\partial \theta} \log f_Y(y;\theta)$	Sensibilité de la log-vraisemblance
Information observée $J(\theta)$	$-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f_Y(y;\theta)$	Courbure locale
Information de Fisher $I(\theta)$	$\mathbb{E}[J(\theta)] = \text{Var}(U(\theta))$	Précision moyenne de l'estimation de θ