

POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL



LE GÉNIE
EN PREMIÈRE CLASSE

NeuroPoly



Analyse multirésolution et transformée en ondelettes

Eva Alonso Ortiz

ELE8812

16 mars 2023

Plan

1. **Approches des traitements multirésolutions**
 - Analyse pyramidale
 - Codage en sous-bandes
 - Transformée de Haar
2. **Développements multirésolutions**
 - Rappels
 - Fonctions d'échelle
 - Ondelettes
3. **Développement en série d'ondelettes, transformée en ondelettes**
 - Développement en série d'ondelettes
 - Transformée en ondelettes discrète
 - Transformée en ondelettes rapide
 - Extension bi-dimensionnelle
4. **Applications de la transformée en ondelettes 2D**
 - Détection de contours
 - Débruitage et compression d'images

Plan

1. Approches des traitements multirésolutions

- Analyse pyramidale
- Codage en sous-bandes
- Transformée de Haar

2. Développements multirésolutions

- Rappels
- Fonctions d'échelle
- Ondelettes

3. Développement en série d'ondelettes, transformée en ondelettes

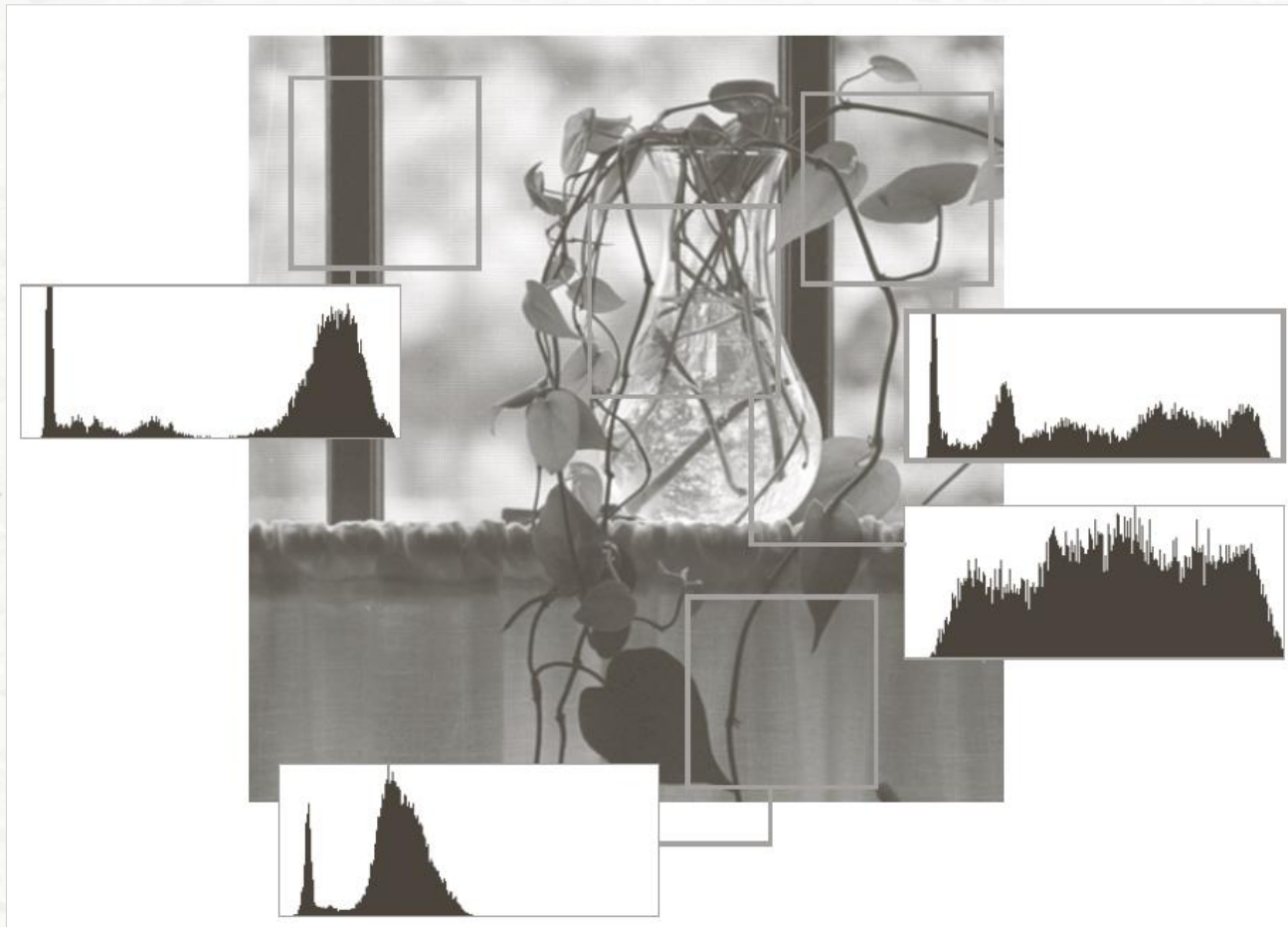
- Développement en série d'ondelettes
- Transformée en ondelettes discrète
- Transformée en ondelettes rapide
- Extension bi-dimensionnelle

4. Applications de la transformée en ondelettes 2D

- Détection de contours
- Débruitage et compression d'images

Variations locales dans une image

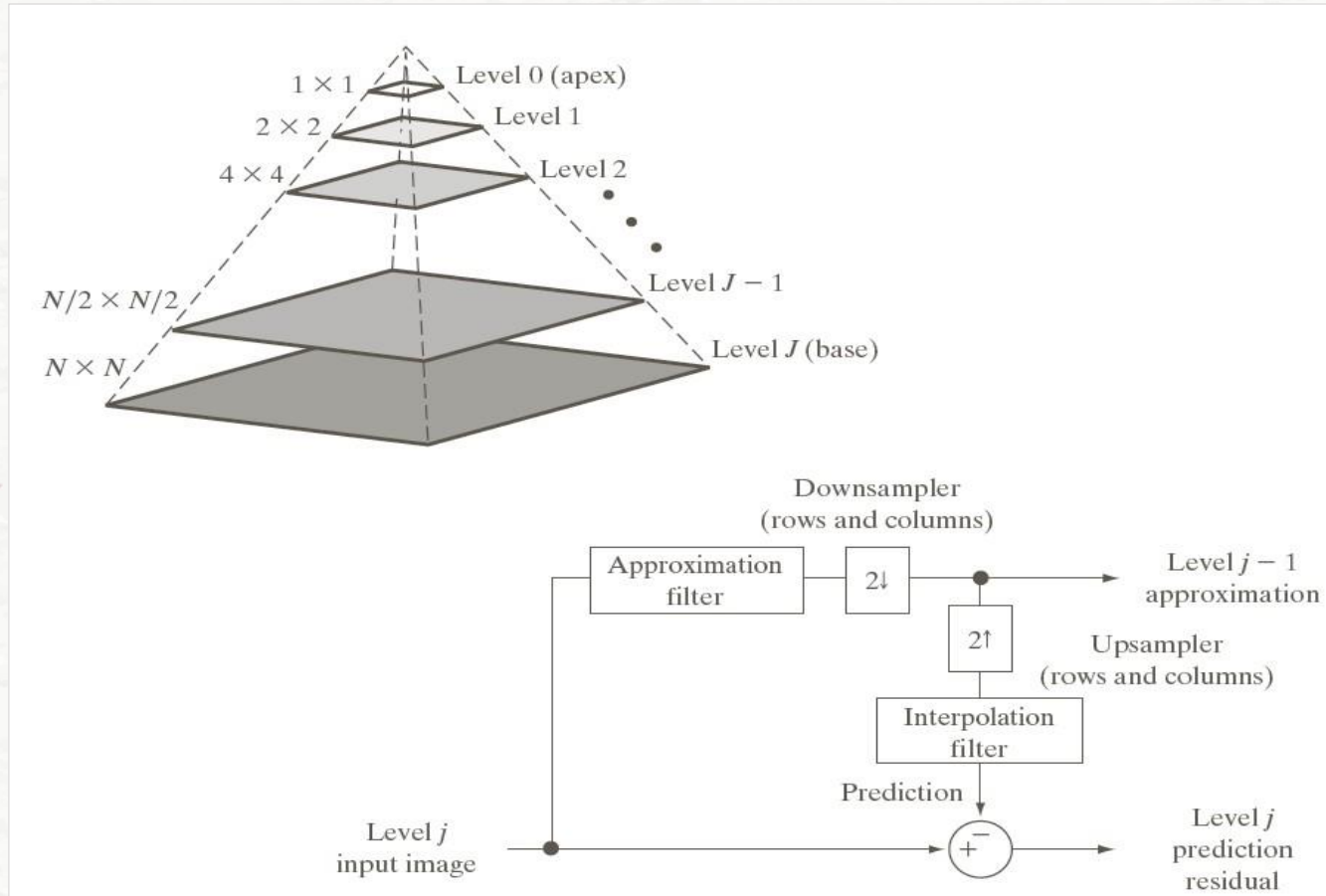
Exemple



© 1992-2008 R. C. Gonzalez & R. E. Woods

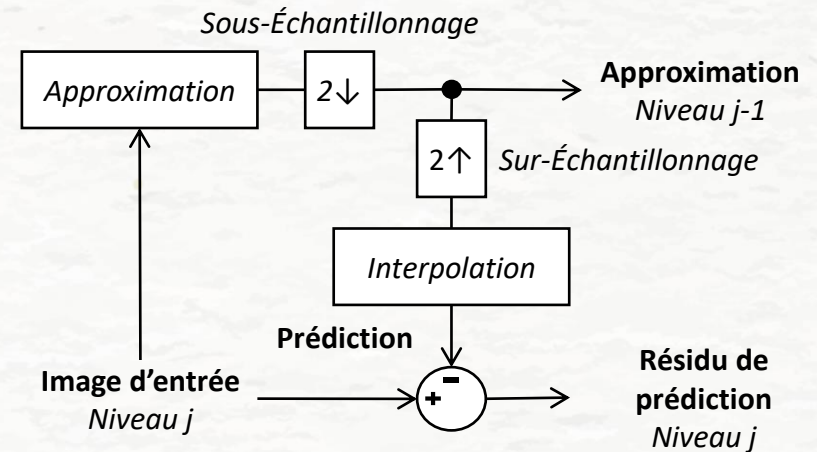
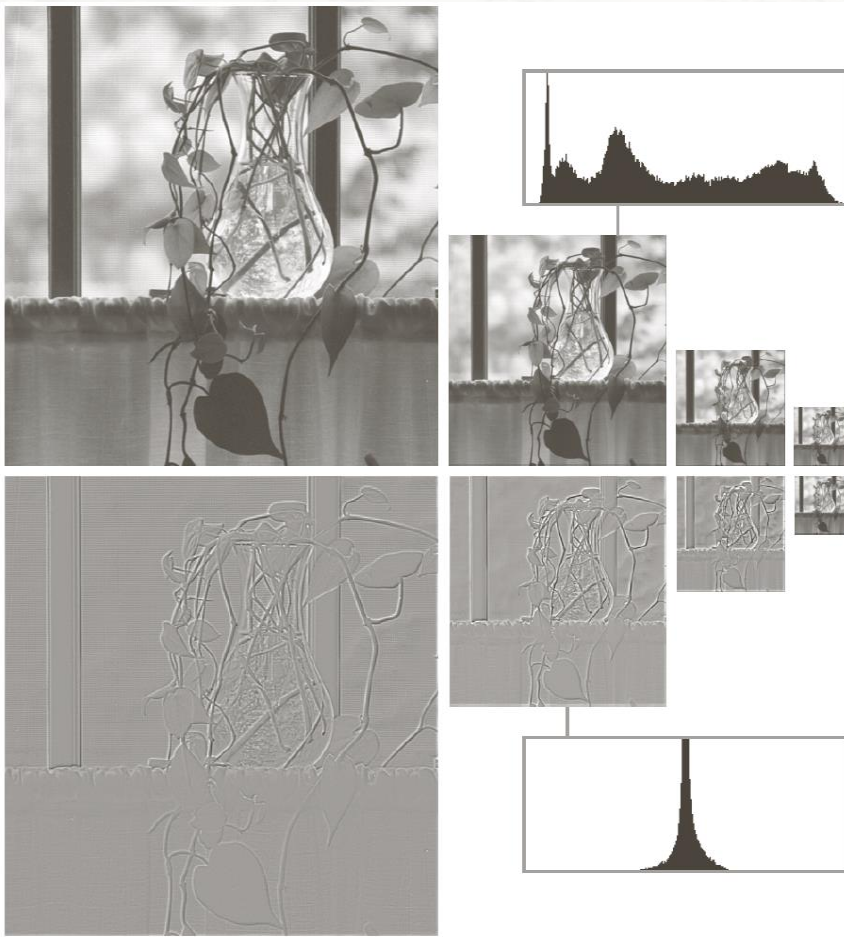
Analyse pyramidale

Principe



Analyse pyramidale

Exemple

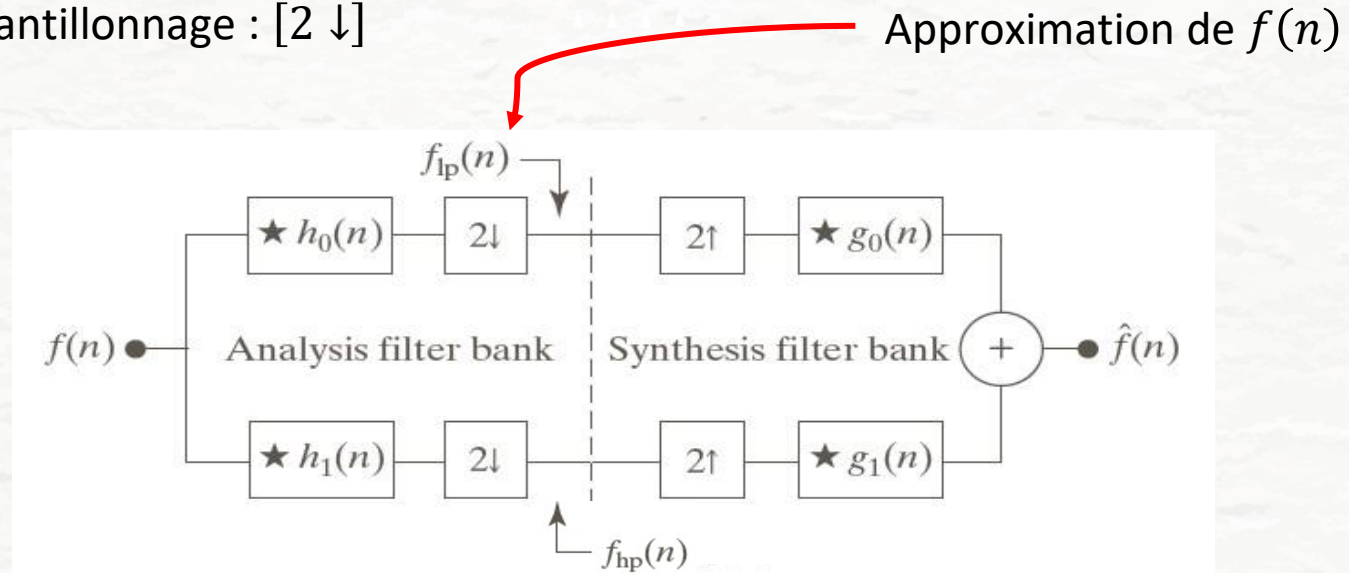


[Voir: Demo1 AnalysePyramidale.ipynb](#)

Codage en sous-bandes (1)

Analyse à différents niveaux de résolution :

- Décomposition d'un signal en bandes limitées
 - Banque de filtres d'analyse: $\{h_0(n), h_1(n)\}$
- Sous-échantillonnage : $[2 \downarrow]$

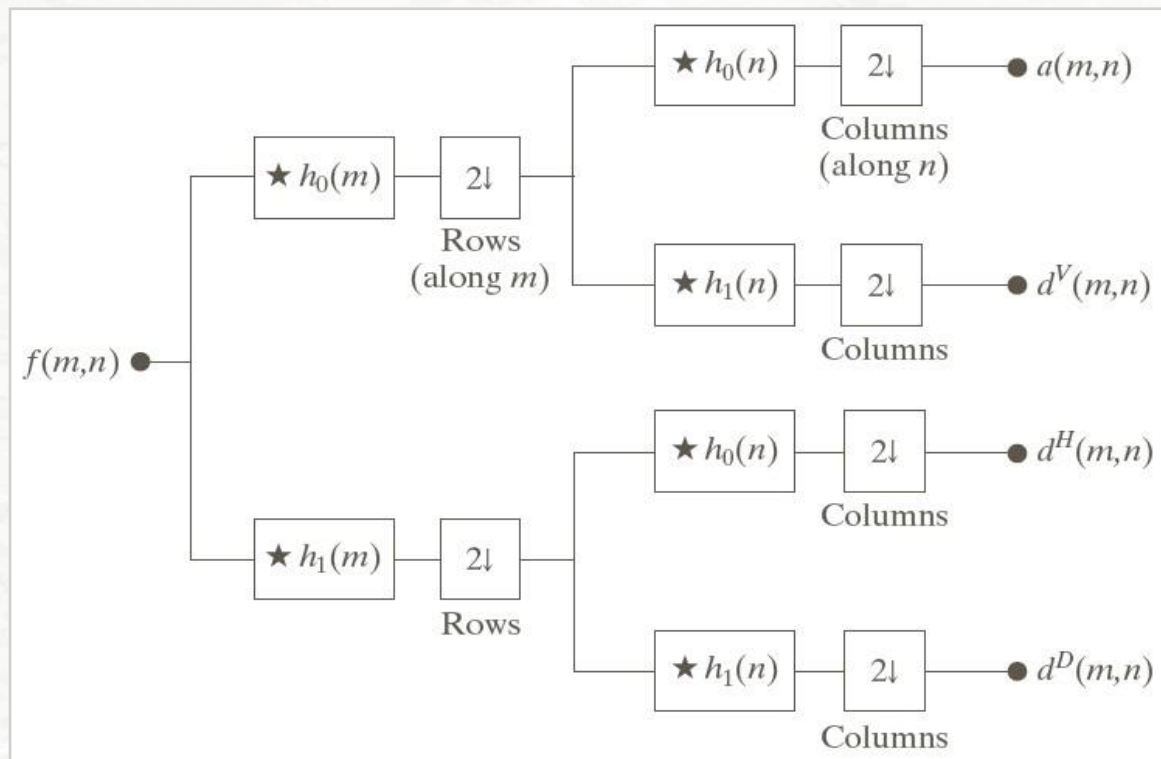


Restauration :

- Sur-échantillonnage : $[2 \uparrow]$
- Banque de filtres de synthèse: $\{g_0(n), g_1(n)\}$
- Selon les filtres, *reconstruction parfaite du signal*

Codage en sous-bandes (2)

Extension 2D



© 1992-2008 R. C. Gonzalez & R. E. Woods

Transformée de Haar

- Codage en sous-bandes avec les filtres les plus simples
- Signal de taille $N = 2^J$
- Application *récurrente* du codage en sous bandes (J fois)
- H**: Matrice de transformation

$$N = 2 ; H = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$h_0 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad h_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Propriétés

- H**: orthogonale
- Propriété supplémentaire d'orthonormalité des h_i aux différentes échelles
- Extension 2D: $T = H F H^t$



Ondelettes en bref

<https://youtube/QX1-xGVFqmw>

Eva Alonso Ortiz (ELE8812)

<https://www.youtube.com/watch?v=c4s5X-Bm2Wc>

Analyse multirésolution

9 / 43

Plan

1. **Approches des traitements multirésolutions**
 - Analyse pyramidale
 - Codage en sous-bandes
 - Transformée de Haar
2. **Développements multirésolutions**
 - Rappels
 - Fonctions d'échelle
 - Ondelettes
3. **Développement en série d'ondelettes, transformée en ondelettes**
 - Développement en série d'ondelettes
 - Transformée en ondelettes discrète
 - Transformée en ondelettes rapide
 - Extension bi-dimensionnelle
4. **Applications de la transformée en ondelettes 2D**
 - Détection de contours
 - Débruitage et compression d'images

Développements multirésolutions

Cadre : Continu ou discret

Système orthogonal ou orthonormé : $\{\phi_k(x) : k \in \mathcal{K}\}$

Développement

$$f(x) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \alpha_k \phi_k(x)$$

Transformée: $\alpha_k \propto \langle f, \phi_k \rangle = \int f(x) \phi_k^*(x) dx$

Orthogonal & Orthonormée:

$$\langle \phi_j, \phi_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

Fonctions génératrice et espace de fonctions

Fonctions de bases: $\{\phi_k(x); k \in \mathcal{K}\}$

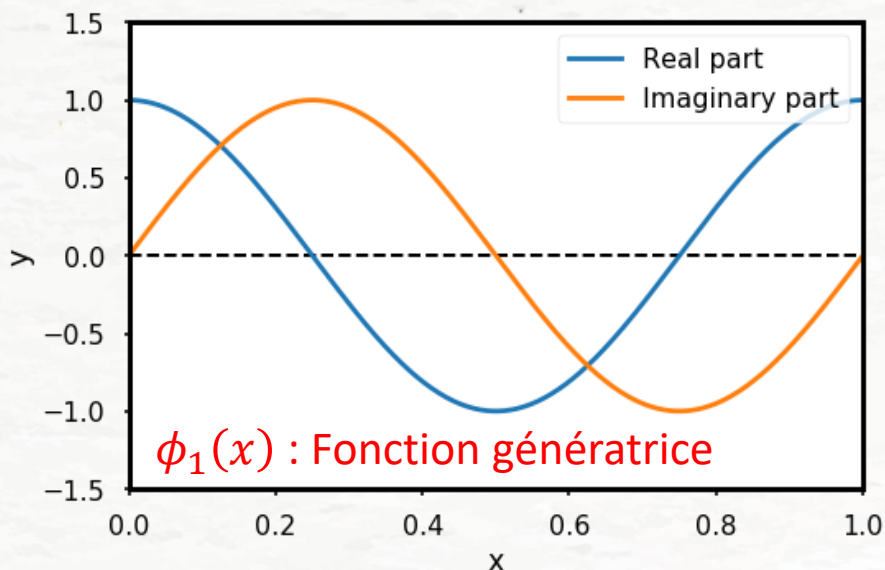
Exemple: Série de Fourier $\{\phi_k(x) = e^{2i\pi kx/T}; k \in \mathbb{Z}\}$

ϕ_k : Altération de la fonction génératrice ($\phi_1(x) = e^{2i\pi x/T}$)

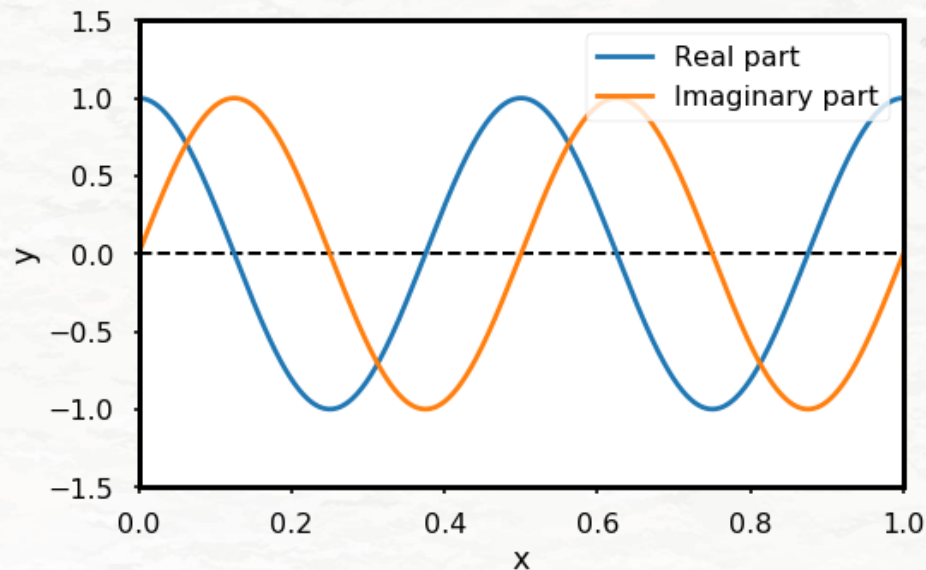
ϕ_k : Orthogonales les unes aux autres

Espace des fonctions décomposables: $\overline{\text{Vect}\{\phi_k(x); k \in \mathcal{K}\}}$

Fourier basis function $\phi_k(x)$ for $k=1$



Fourier basis function $\phi_k(x)$ for $k=2$

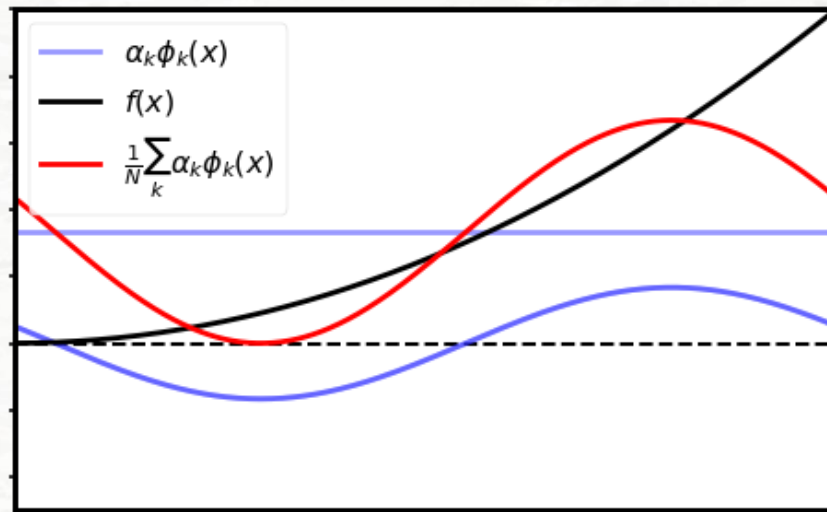
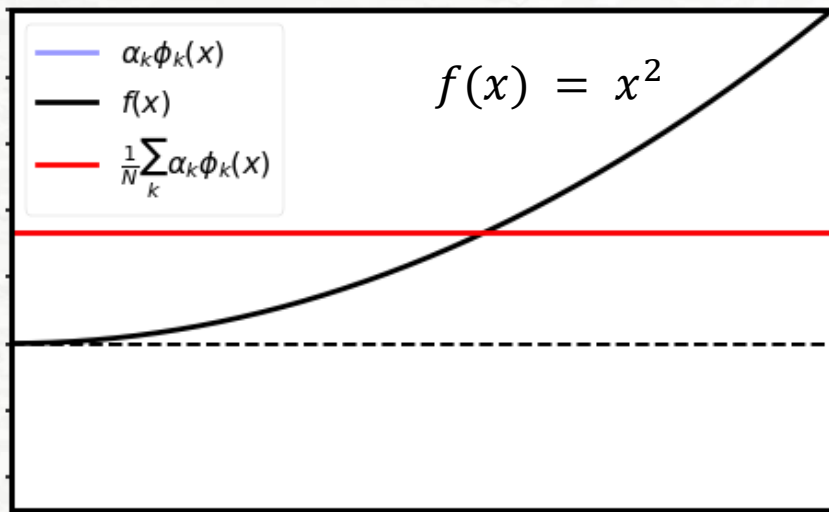


Exemple: Série de Fourier

$$\{\phi_k(x) = e^{2i\pi kx/T}\}$$

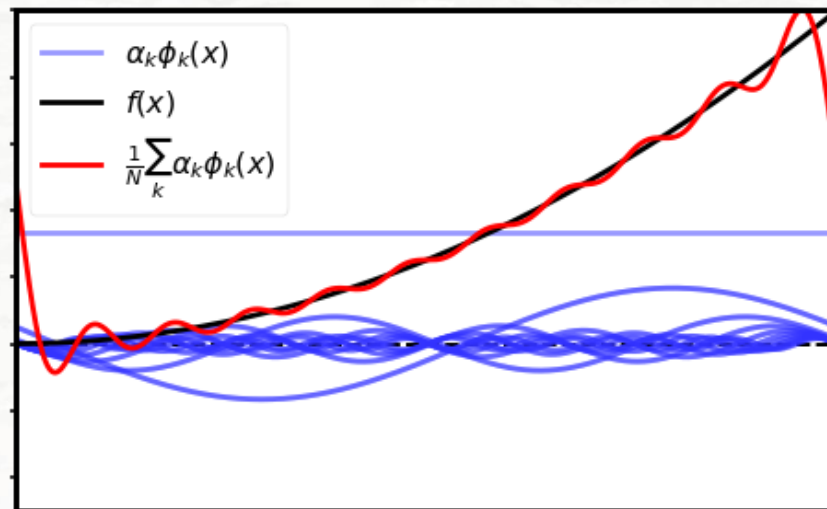
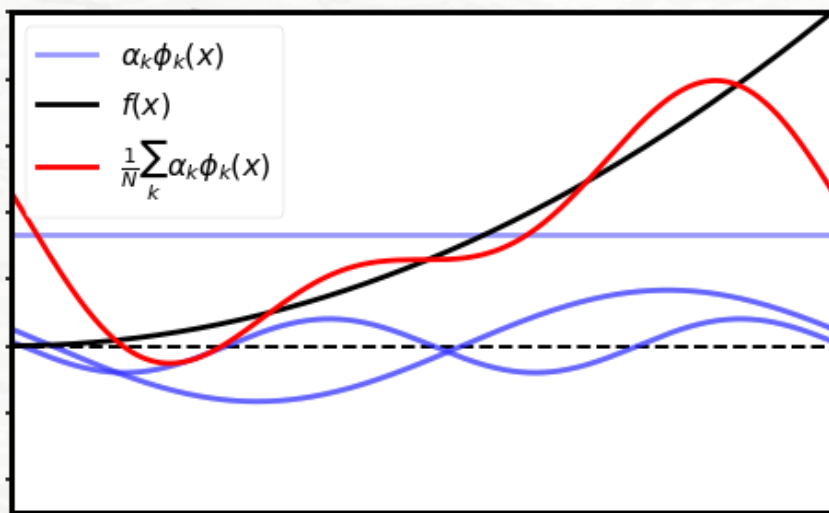
$|k| \leq 0$

$|k| \leq 1$



$|k| \leq 2$

$|k| \leq 10$



Slide courtesy of Joël Lefebvre

Fonctions d'échelle $\varphi_{j,k}(x)$

$\varphi(x)$: Fonction génératrice; x : Variable continue

Versions translatées de $\varphi(x)$

$$\varphi_k(x) = \varphi(x - k); \quad k \in \mathbb{Z}$$

φ choisie telle que les φ_k soient orthogonales les unes aux autres

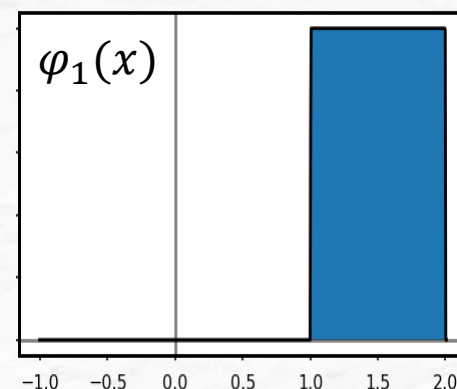
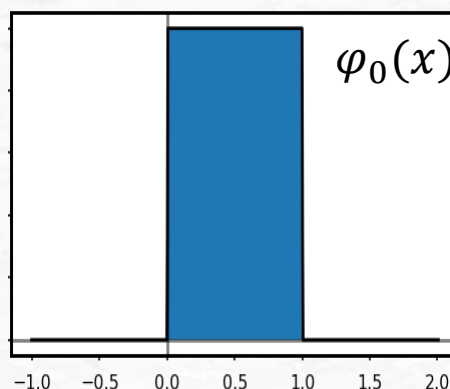
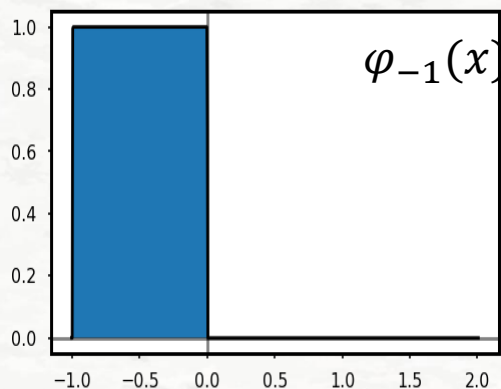
$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

$V = \text{Vect}\{\varphi_k(x); k \in \mathbb{Z}\} \subset L_2(\mathbb{R})$ (*Fonctions réelles carrées intégrables*)

[Démonstration](#)

[SignalDecomposition](#)

Ondelette de Haar



φ à support fini $\rightarrow \alpha_k$ lié aux caractéristiques locales de $f(x)$

Développements multirésolutions

Notion d'échelle

[Démonstration](#)
[SignalDecomposition](#)

Échelle originale (Échelle 0)

$$\varphi_k(x) \triangleq \varphi_{0,k}(x) = \varphi(x - k)$$

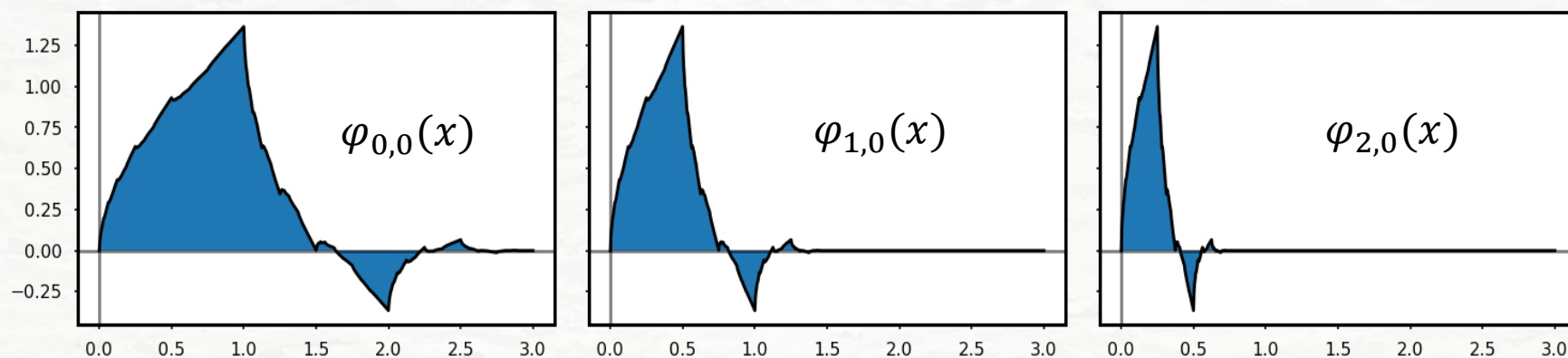
Passage à l'échelle j

$$\{\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$$

$\{\varphi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ orthogonal \Rightarrow $\{\varphi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ orthogonal

$$V_j = \text{Vect}\{\varphi_{j,k}(x); k \in \mathbb{Z}\} \subset L_2(\mathbb{R})$$

Exemple : Ondelette de Daubechies-2



Propriétés caractéristiques de l'analyse multirésolution

1. La fonction d'échelle $\varphi_{0,k}$ est orthogonale +/- translation

$$\langle \varphi_{0,i}, \varphi_{0,j} \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

2. Le sous-espace couvert par $\varphi_{j,k}$ (basse échelle) est inclus dans l'espace couvert par $\varphi_{j+1,k}$ (grande échelle)

$$V_{-\infty} \subset \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{\infty}$$

3. La seule fonction commune à toutes les échelles est

$$V_{-\infty} = \{0\} \text{ (Fonction uniformément nulle)}$$

4. Toutes les fonctions peuvent être représentées avec une précision arbitraire ($V_{+\infty} = L_2(\mathbb{R})$)

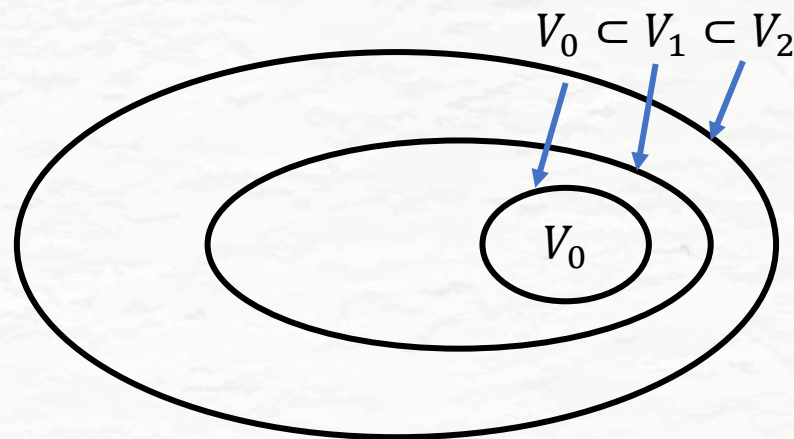
Fonction de dilatation

$$\varphi_{j,k}(x) = \sum_n \alpha_n \varphi_{j+1,n}(x)$$

$$\text{RAPPEL: } \varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$$

$$\varphi(x) = \sum_n h_\varphi(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n)$$

$h_\varphi(n)$: Coefficients d'échelle



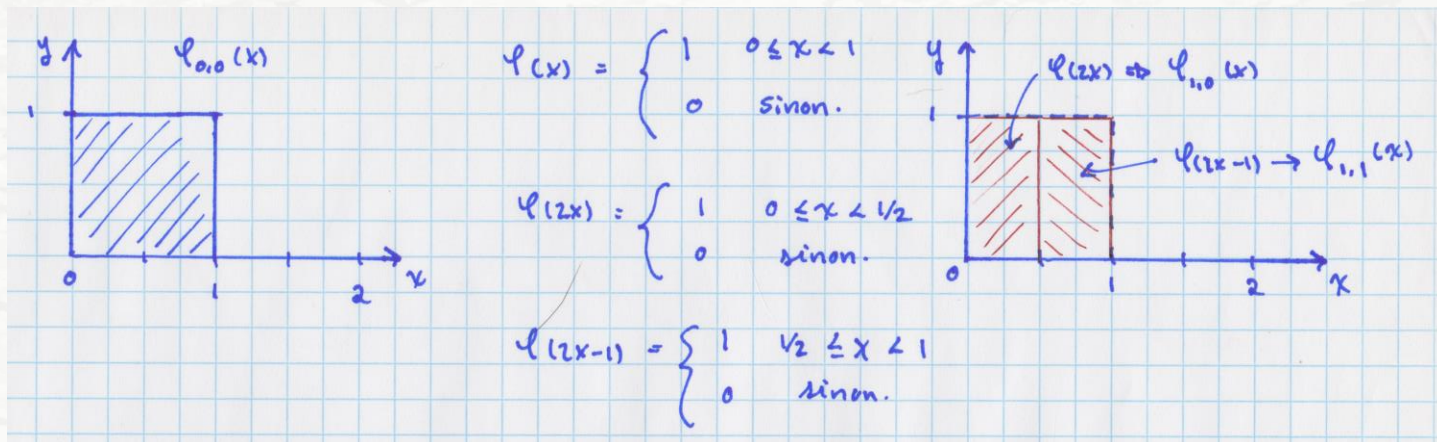
Exemple: Fonction de Haar

$$\text{Fonction de Haar: } \varphi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \sum_n h_\varphi(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n)$$

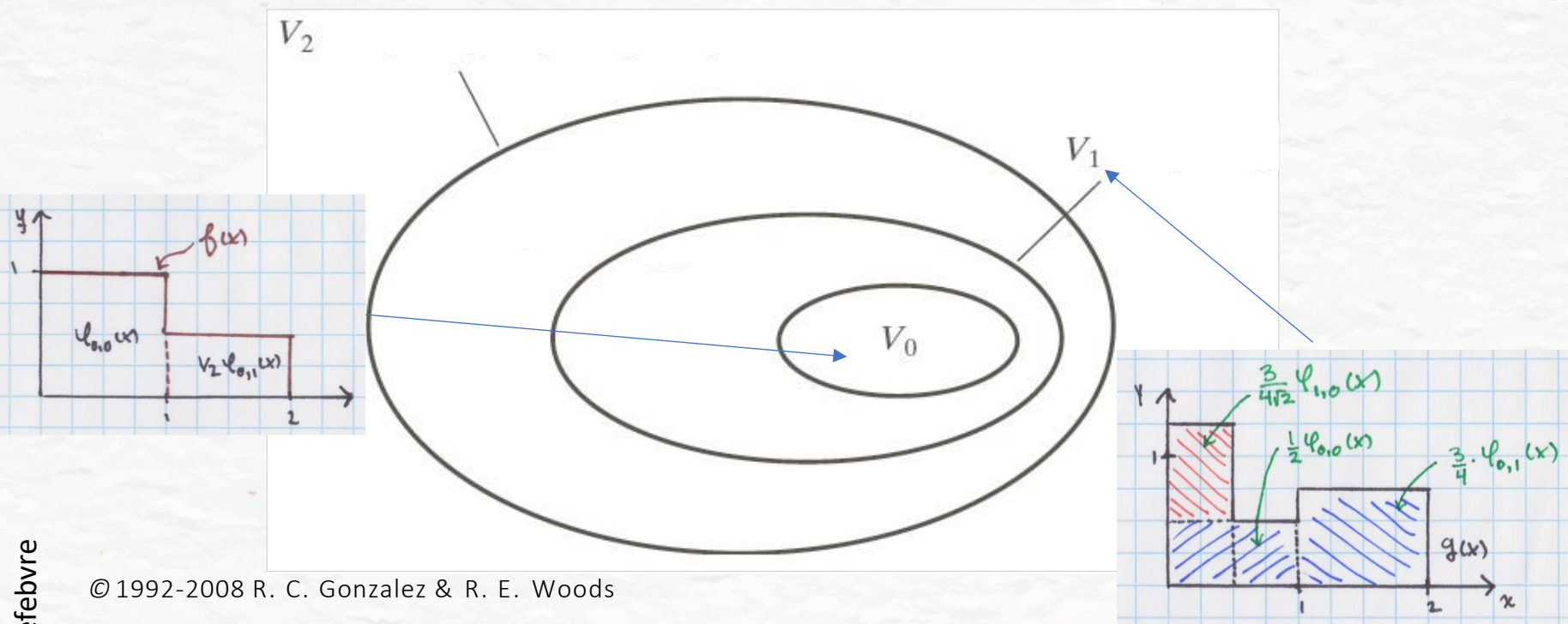
$$\text{Coefficients d'échelle : } h_\varphi(0) = h_\varphi(1) = 1/\sqrt{2}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{2}\varphi(2x)] + \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{2}\varphi(2x - 1)] = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1)$$



Ondelettes

Structure des espaces de décomposition



- Décomposition récurrente en sous espaces orthogonaux

$$V_2 = V_1 \oplus W_1 = (V_0 \oplus W_0) \oplus W_1 \dots$$

- Structure des sous-espaces W_j ?

Bases d'ondelettes (1)

Base de l'espace W_j

- Fonctions dépendant d'une variable x continue ($x \in \mathbb{R}$)
- $W_j = \text{Vect} \{ \psi_{j,k}(x) ; k \in \mathbb{Z} \}$
- $\psi_{j,k}(x) \propto \psi(2^j x - k)$
- $\psi(x)$: fonction génératrice des bases d'ondelettes

Justification de l'existence de ψ : codage en sous-bandes, filtres orthogonaux

Propriétés d'orthogonalité

- $\langle \varphi_{j,k}(x) | \varphi_{j,l}(x) \rangle = \delta(k - l)$
- $\langle \varphi_{j,k}(x) | \psi_{j,l}(x) \rangle = 0$
- $\langle \psi_{i,k}(x) | \psi_{j,l}(x) \rangle = \delta(i - j) \delta(k - l)$

Bases d'ondelettes (2)

Coefficients d'échelle : $h_\varphi(n)$

$$V_0 \subset V_1 \Rightarrow \varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_\varphi(n) \varphi_{1,n}(x)$$

Coefficients d'ondelette : $h_\psi(n)$

$$W_0 \subset V_1 \Rightarrow \psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_\psi(n) \varphi_{1,n}(x)$$

Relations d'orthogonalité

$$h_\psi(n) = (-1)^n h_\varphi(1 - n)$$

Le choix de φ détermine l'ensemble de la base de décomposition

Définir la fonction d'ondelette de Haar

$$\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_\psi(n) \varphi_{1,n}(x)$$

RAPPEL: $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$

$$\varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \varphi(2x - k)$$

Relations d'orthogonalité : $h_\psi(n) = (-1)^n h_\varphi(1 - n)$

Coefficients d'échelle : $h_\varphi(0) = h_\varphi(1) = 1/\sqrt{2}$

$$h_\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, h_\psi(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

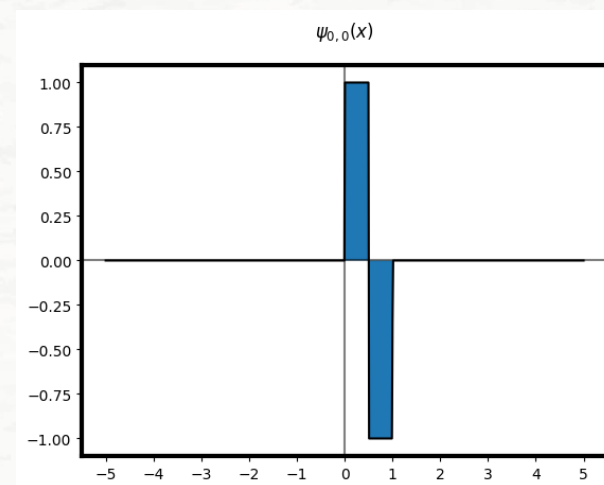
$$\psi(x) = h_\psi(0) \varphi_{1,0}(x) + h_\psi(1) \varphi_{1,1}(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \varphi(2x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \varphi(2x - 1)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\varphi(2x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\varphi(2x-1) = \begin{cases} 1 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



[Démonstration](#)

[SignalDecomposition](#)

Plan

1. **Approches des traitements multirésolutions**
 - Analyse pyramidale
 - Codage en sous-bandes
 - Transformée de Haar
2. **Développements multirésolutions**
 - Rappels
 - Fonctions d'échelle
 - Ondelettes
3. **Développement en série d'ondelettes, transformée en ondelettes**
 - Développement en série d'ondelettes
 - Transformée en ondelettes discrète
 - Transformée en ondelettes rapide
 - Extension bi-dimensionnelle
4. **Applications de la transformée en ondelettes 2D**
 - Détection de contours
 - Débruitage et compression d'images

Développement en série d'ondelettes

Cadre

$f(x)$: Élément de $L_2(\mathbb{R})$, x continue

Décomposition sur $V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus W_{j_0+2} \oplus \dots$

Décomposition

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_j(k) \psi_{j,k}(x)$$

Calcul des coefficients

$$c_{j_0}(k) = \langle f(x) | \varphi_{j_0,k}(x) \rangle = \int f(x) \varphi_{j_0,k}^*(x) dx$$

$$d_j(k) = \langle f(x) | \psi_{j,k}(x) \rangle = \int f(x) \psi_{j,k}^*(x) dx$$

Choix de la résolution la plus grossière j_0
Utilité : analyse espace-échelle (multirésolutions)

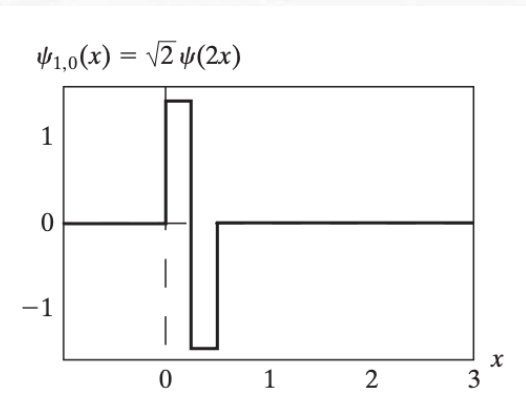
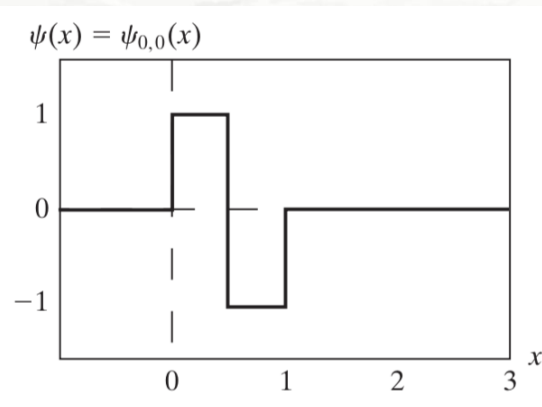
Base d'ondelette : Exemple

$$y(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

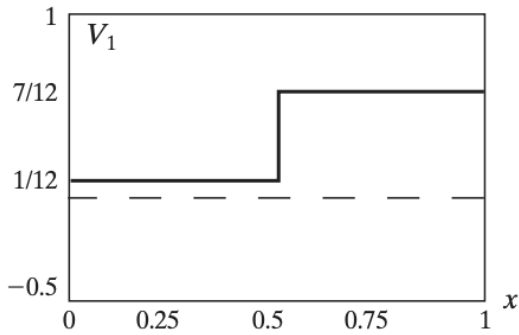
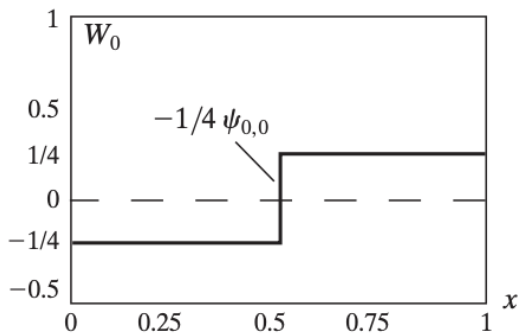
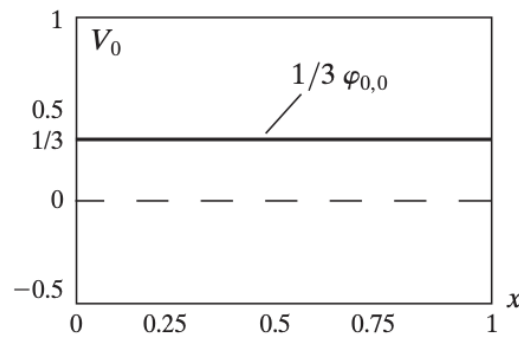
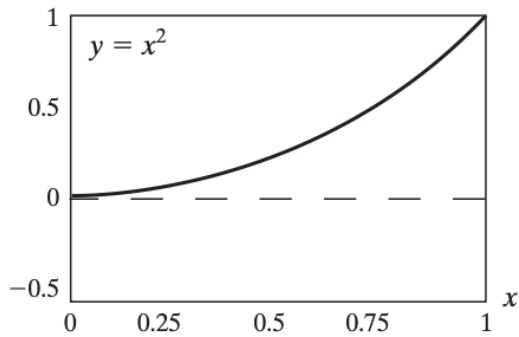
- En commençant à l'échelle $j_0 = 0$ faites un expansion de $y(x)$ en série d'ondelette.
 - Utilisez la fonction de Haar comme fonction génératrice.
 - Calculez les coefficients d'approximation et les coefficients de détails jusqu'à l'échelle $j = 1$

Vous aurez besoin de ces ondelettes:

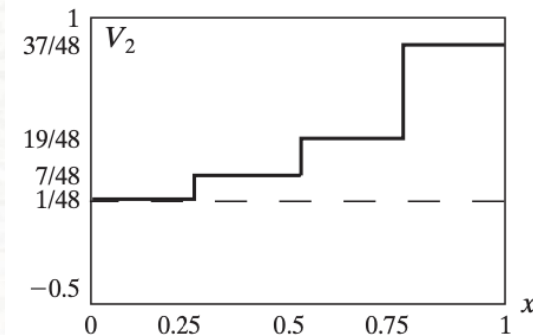
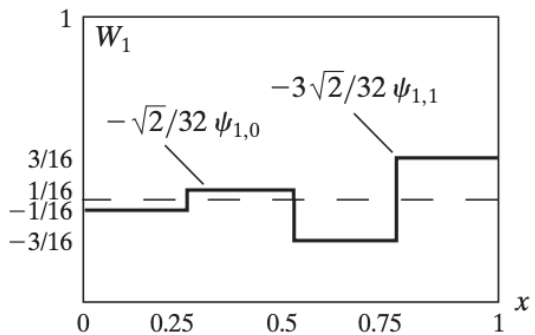
Slido:



Exemple de transformée en ondelettes



$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$



$$V_2 = V_1 \oplus W_1$$

[Démo](#)
[SignalDecomposition](#)

Transformée en ondelettes discrète

Cadre

$f(n)$: Élément de $L_2(\mathbb{Z})$. Variable *temporelle* discrète

Décomposition sur $V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus W_{j_0+2} \oplus \dots$

Décomposition (Inverse DWT)

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} W_\varphi(j_0, k) \varphi_{j_0, k}(n) + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j \geq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} W_\psi(j, k) \psi_{j, k}(n)$$

Calcul des coefficients (Forward DWT)

$$W_\varphi(j_0, k) = \langle f(n) | \varphi_{j_0, k}(n) \rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \varphi_{j_0, k}(n)$$

$$W_\psi(j, k) = \langle f(n) | \psi_{j, k}(n) \rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \psi_{j, k}(n)$$

Transformée en ondelettes rapide (1)

Approche

- Cadre : temps continu ou discret
- Utilisation du caractère *générateur* de φ ($\varphi_{j,k}(x) = \sum_n h_\varphi(n) \varphi_{j+1,n}(x)$)
- Relations entre coefficients de deux échelles voisines (j et $j+1$)

Signaux à temps continu

- $c_j(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_\varphi(m - 2k) c_{j+1}(m) = h_\varphi(-m) * c_{j+1}(m) \boxed{2\downarrow}$

- $d_j(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_\psi(m - 2k) c_{j+1}(m) = h_\psi(-m) * c_{j+1}(m) \boxed{2\downarrow}$

Point importants

- Structure analogue à celle du codage en sous-bandes

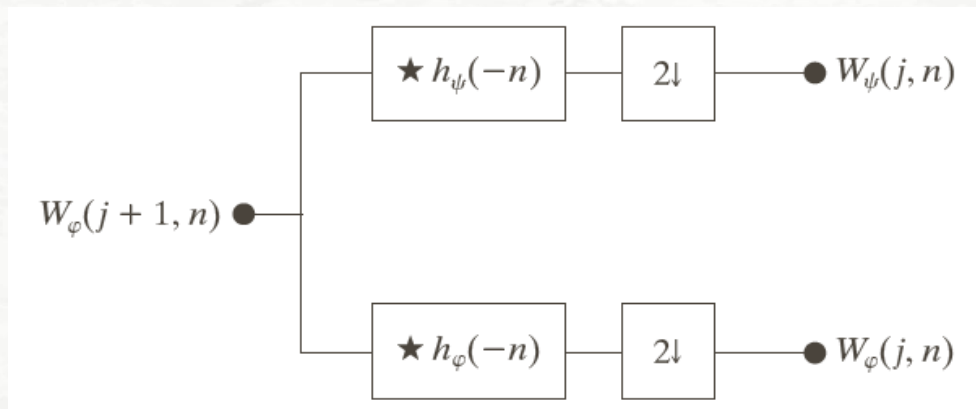
Transformée en ondelettes rapide (2)

Signaux à temps discret (support fini)

$$\begin{aligned} \bullet W_\varphi(j, k) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_\varphi(m - 2k) W_\varphi(j + 1, m) \\ &= h_\varphi(-m) * W_\varphi(j + 1, m) \quad \boxed{2\downarrow} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet W_\psi(j, k) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_\psi(m - 2k) W_\varphi(j + 1, m) \\ &= h_\psi(-m) * W_\varphi(j + 1, m) \quad \boxed{2\downarrow} \end{aligned}$$

TOR et codage en sous-bandes

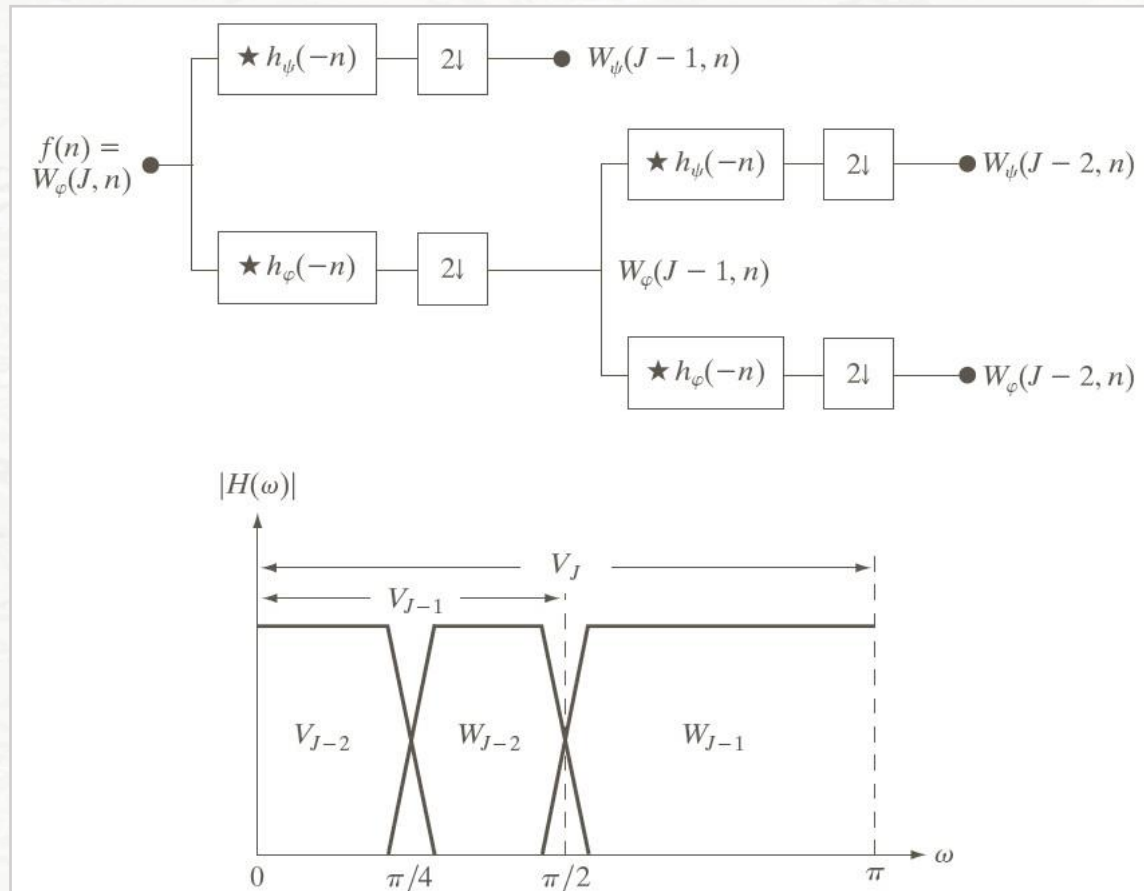


Équivalence entre TOR et codage en sous-bandes

- [Base de décomposition](#) détermine h_φ et h_ψ
- Ondelette Haar :
 - $h_\varphi(-n) = h_0(n)$
 - $h_\psi(-n) = h_1(n)$

Transformée en ondelettes rapide (3)

Décomposition en plusieurs échelles



Transformée en ondelettes rapide inverse

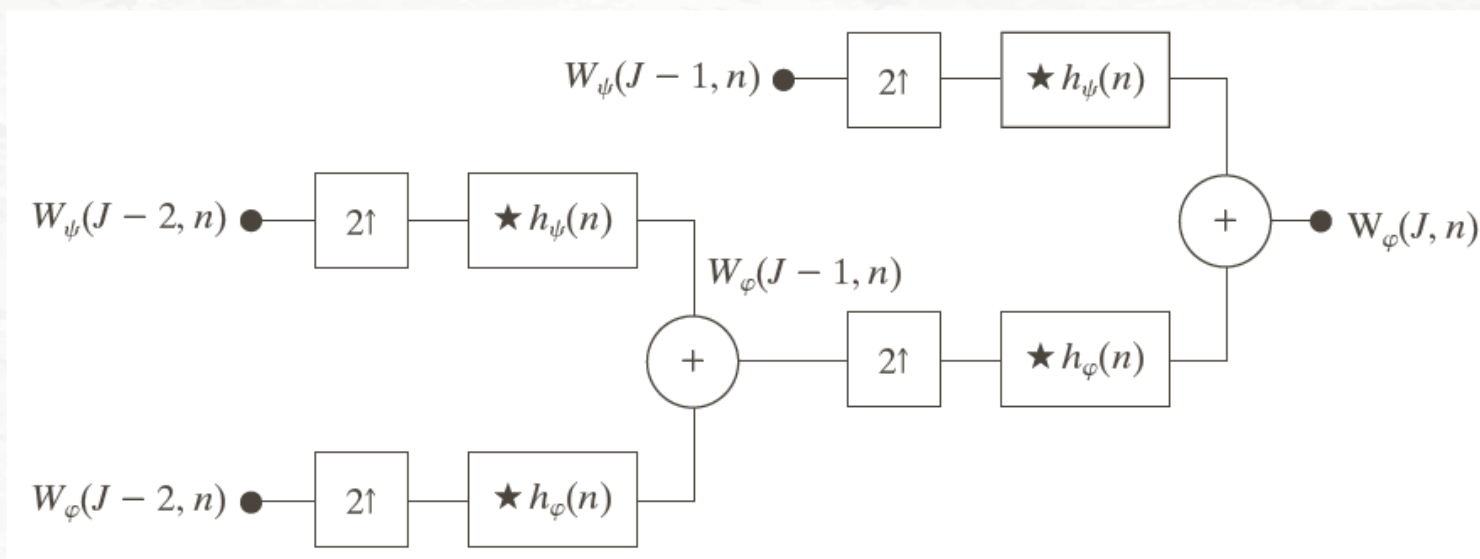
Codage en sous-bandes: partie synthèse

Reconstruction parfaite pour

$$g_0(n) = h_0(-n) = h_\varphi(n)$$

$$g_1(n) = h_1(-n) = h_\psi(n)$$

$$W_\varphi(j+1, k) = h_\varphi(k) * W_\varphi^{2\uparrow}(j, k) + h_\psi(k) * W_\psi^{2\uparrow}(j, k) \Big|_{k \geq 0}$$



Décomposition multirésolutions et ondelettes

Synthèse

Cadre théorique des ondelettes

- Signaux de tous types (temps continu, temps discret, support fini, ...)
- Outils variés (transformée continue, discrète, rapide, ...etc.)

En pratique

- Signaux à temps discret et à support fini
- Transformée en ondelettes rapide
- Codage récurrent en sous-bandes avec filtres orthogonaux

Élément déterminant : choix de la fonction d'échelle φ

Transformée en ondelettes 2D

Approche: séparabilité

Fonction d'échelle: $\varphi^{(2D)}(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$

Fonctions d'ondelette

$$\psi^{(H)}(x, y) = \psi(x)\varphi(y)$$

$$\psi^{(V)}(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$

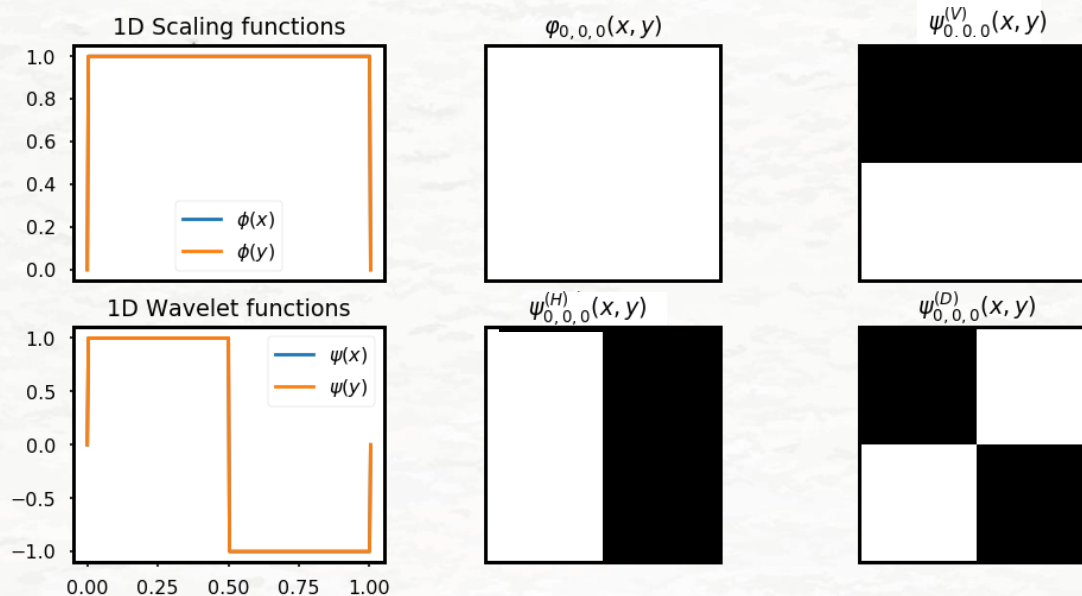
$$\psi^{(D)}(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

Rappel

- Fonction d'échelle $\varphi(x)$
- Fonction d'ondelette $\psi(x)$

Conséquence: Traitements selon X, puis selon Y

Identique au codage en sous-bandes 2D



T. en ondelettes discrète 2D

Fonction d'échelle génératrice

$$\varphi_{j,m,n}(x, y) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - m, 2^j y - n)$$

Fonction d'ondelette génératrice

$$\psi_{j,m,n}^i(x, y) = 2^{j/2} \psi^i(2^j x - m, 2^j y - n), \quad i = \{H, V, D\}$$

Calcul des coefficients (*DWT*)

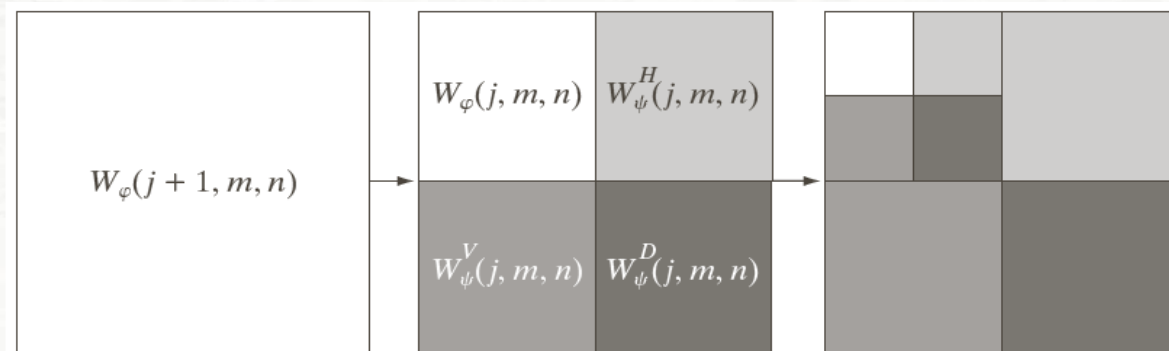
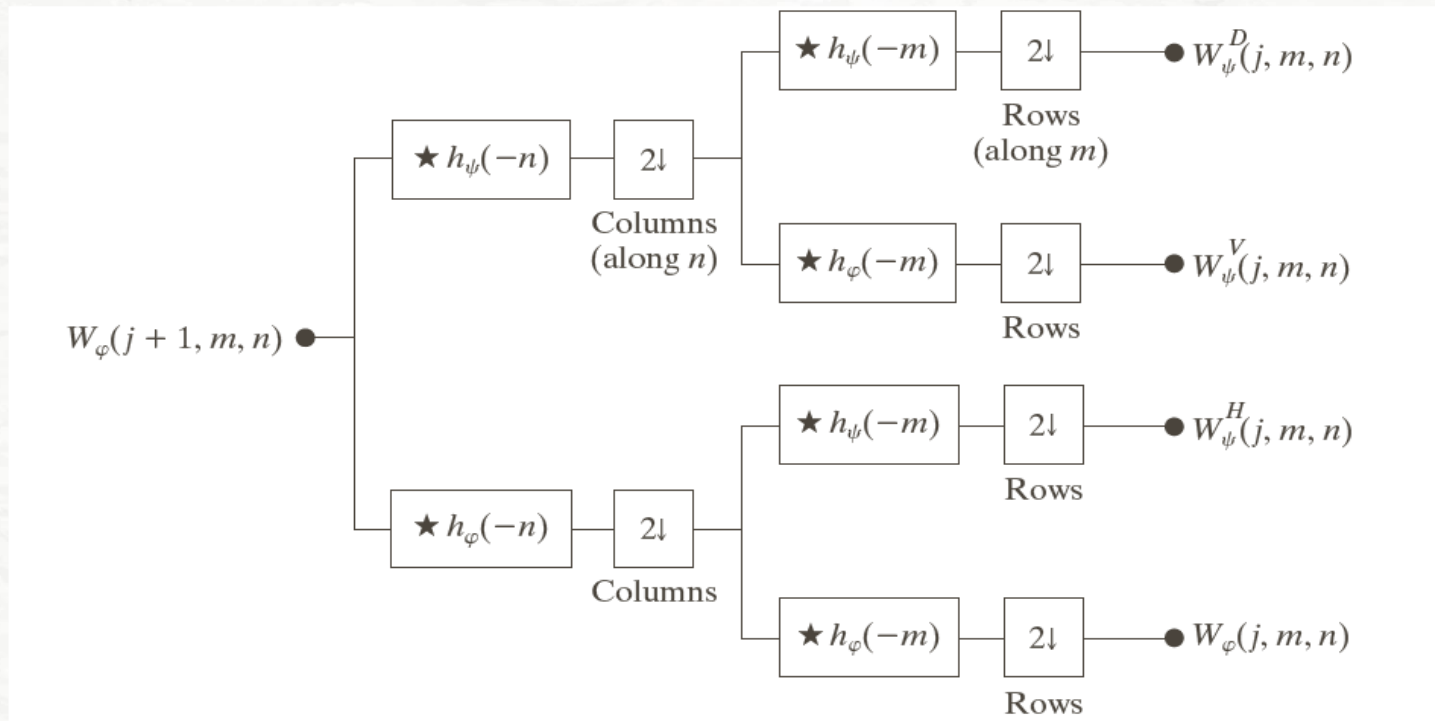
$$W_\varphi(j_0, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \varphi_{j_0, m, n}(x, y)$$

$$W_\psi^i(j, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \psi_{j, m, n}^i(x, y), \quad i = \{H, V, D\}$$

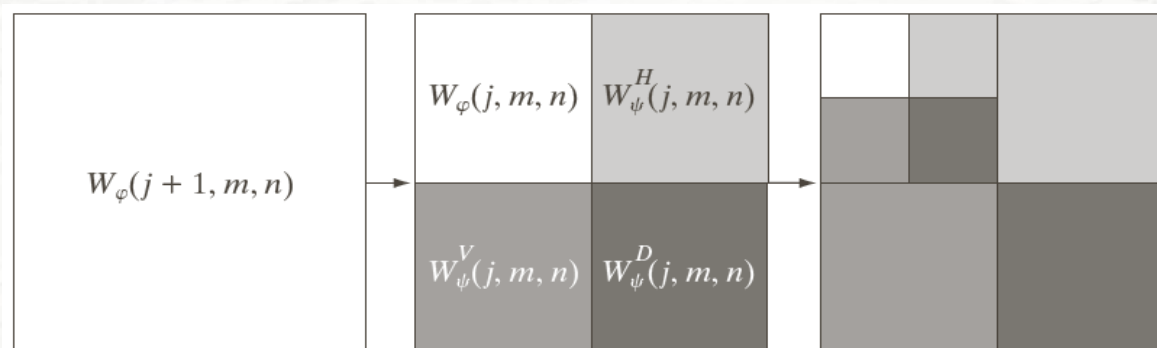
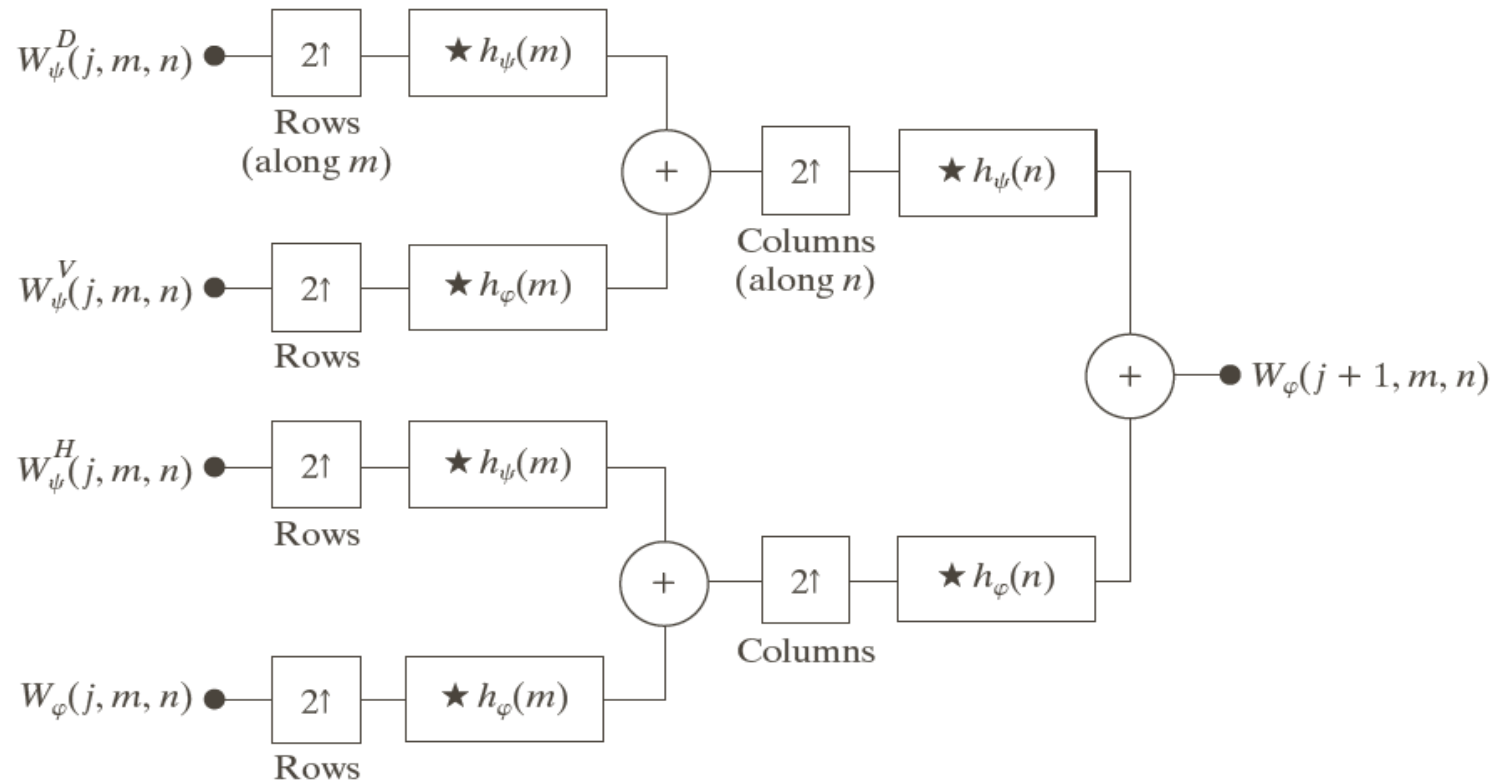
Reconstruction du signal 2D (*Inverse DWT*)

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_m \sum_n W_\varphi(j_0, m, n) \varphi_{j_0, m, n}(x, y) \\ + \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_i \sum_j \sum_m \sum_n W_\psi^i(j, m, n) \psi_{j, m, n}^i(x, y)$$

TOR2D – Décomposition



TOR2D – Reconstruction



Plan

1. **Approches des traitements multirésolutions**
 - Analyse pyramidale
 - Codage en sous-bandes
 - Transformée de Haar
2. **Développements multirésolutions**
 - Rappels
 - Fonctions d'échelle
 - Ondelettes
3. **Développement en série d'ondelettes, transformée en ondelettes**
 - Développement en série d'ondelettes
 - Transformée en ondelettes discrète
 - Transformée en ondelettes rapide
 - Extension bi-dimensionnelle
4. **Applications de la transformée en ondelettes 2D**
 - Détection de contours
 - Débruitage et compression d'images

Applications

Principe général

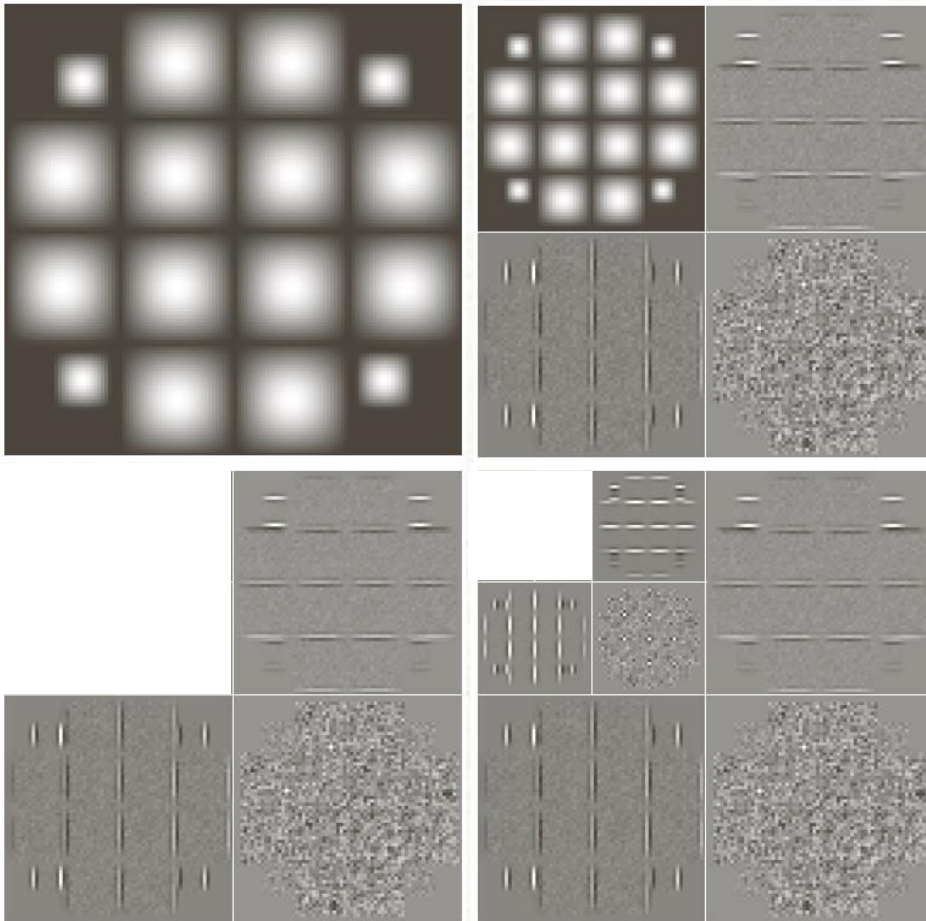
- Calcul de la transformée en ondelettes rapide 2D
- Calcul des coefficients de la décomposition
- Modification des coefficients (tri, quantification, mise à zéro...) en fonction de leur signification et des objectifs du traitement
- Calcul de la transformée inverse à partir des coefficients modifiés

Points critiques

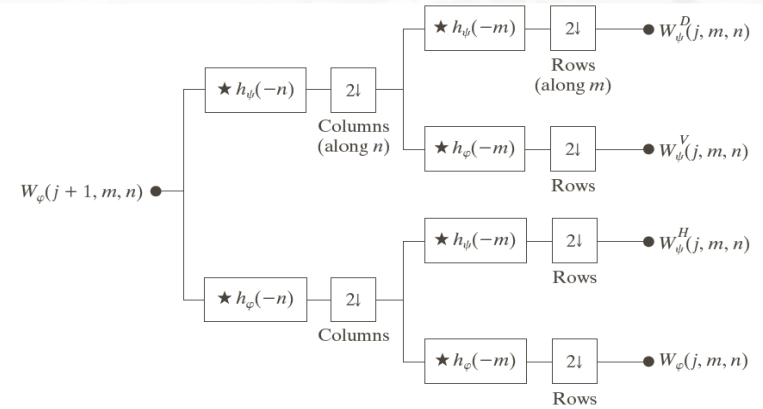
- Choix de la fonction d'échelle φ
- Choix du nombre d'échelles J
- Choix de la stratégie de modification des coefficients

Détection de contours

Exemple

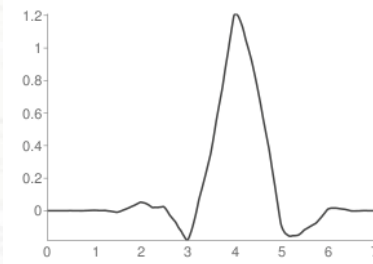


Décomposition 2D en ondelettes

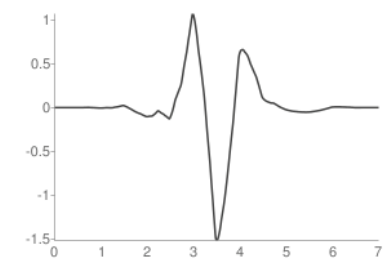


1. **Calcul TOR-2D**
2. **Calcul des coefficients**
3. Modification des coefficients
4. Calcul de la TOR-2D inverse

Wavelet and scaling functions



Scaling function φ

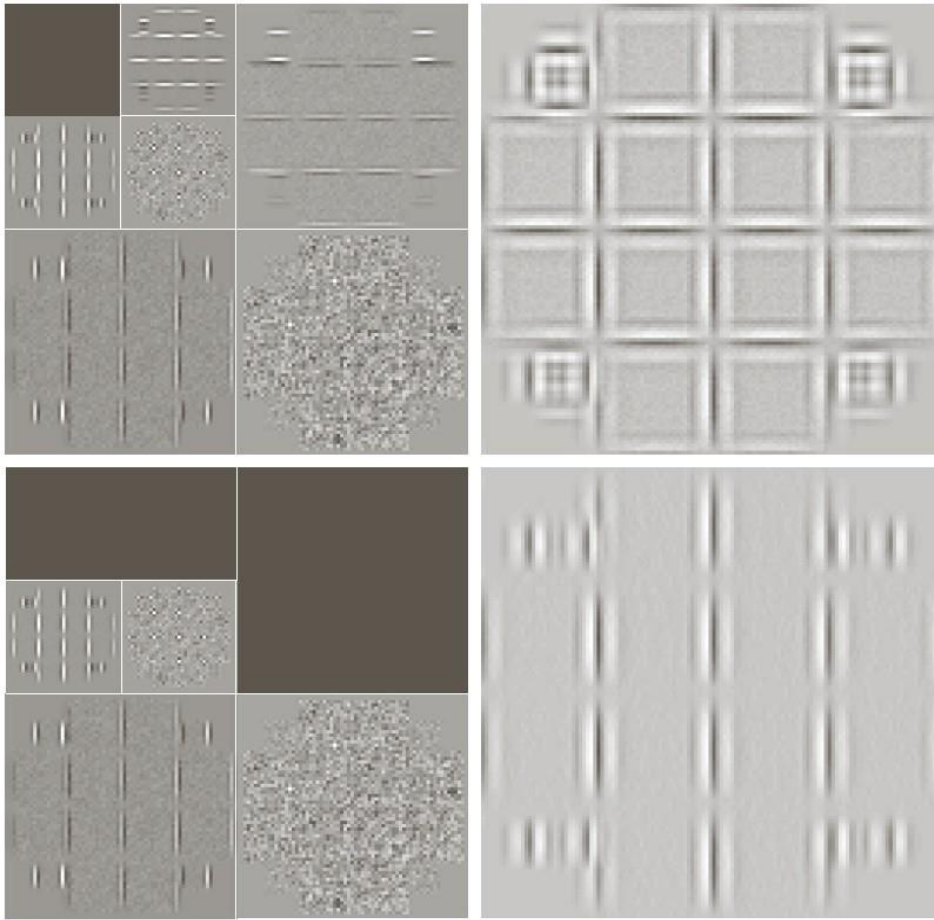


Wavelet function ψ

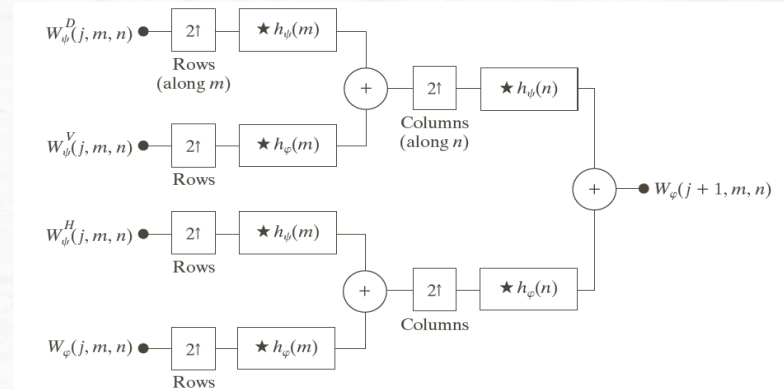
Ondelette utilisée: Symlet-4 ([Lien](#))

Détection de contours

Exemple



Reconstruction



1. Calcul TOR-2D
2. Calcul des coefficients
3. **Modification des coefficients**
4. **Calcul de la TOR-2D inverse**

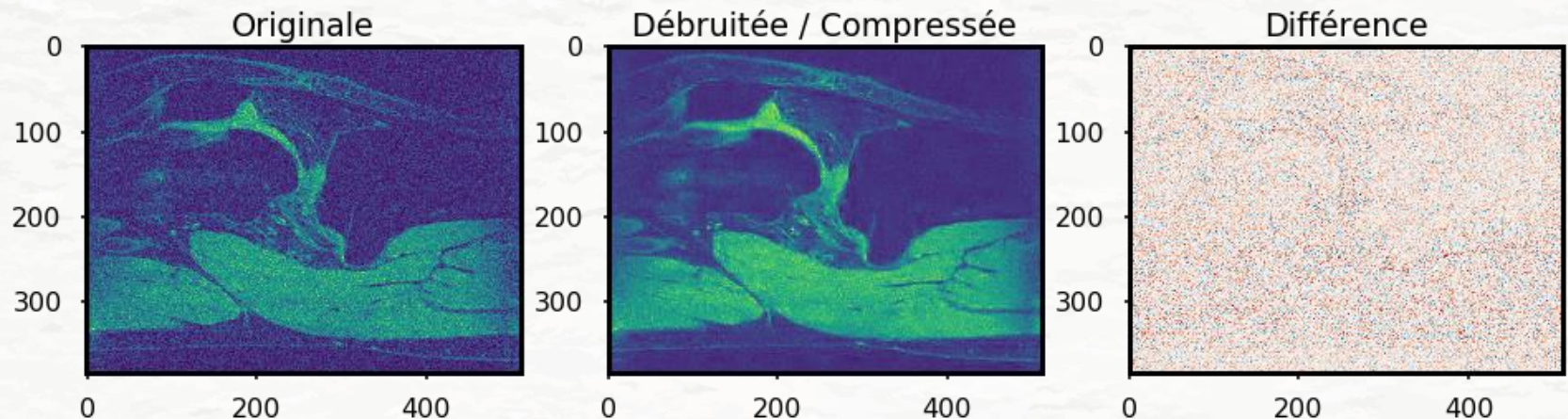
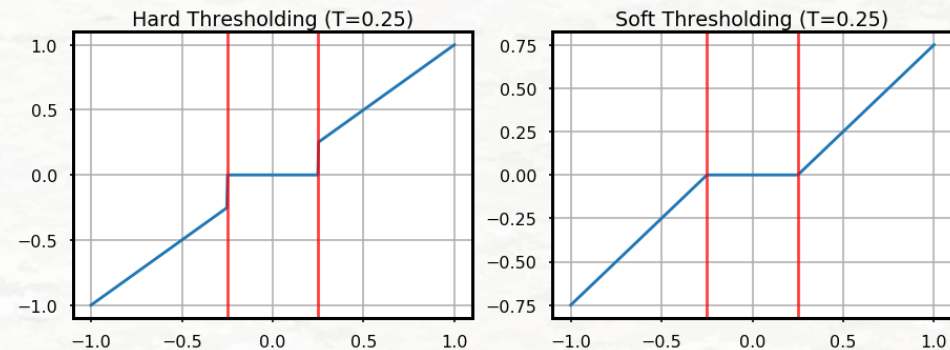
Débruitage

Hypothèse: Le bruit affecte tous les coefficients

Suppression d'une forte partie de l'énergie du bruit en mettant à zéro les coefficients de faible amplitude

Seuillage « dur » ou « doux »

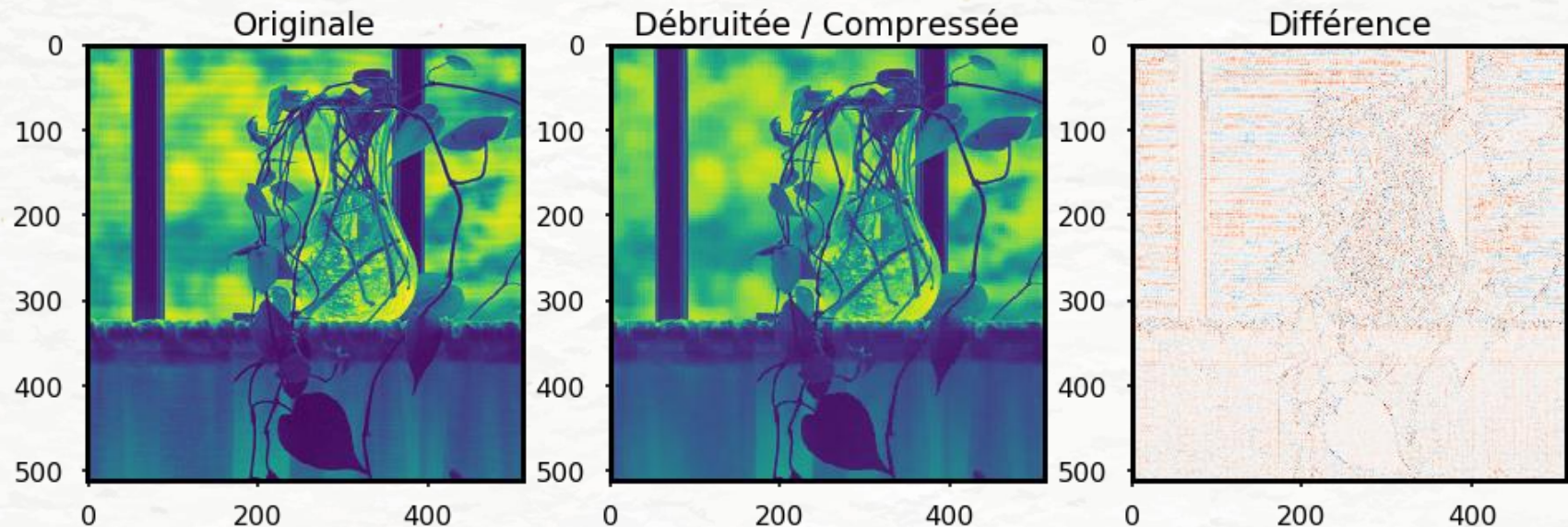
Plusieurs stratégies possibles



Compression d'images

[Démonstration de Compression](#)

- Application privilégiée de la transformée en ondelettes (JPEG-2000)
- Caractéristiques essentielles de l'image capturées par un petit nombre de coefficients
- Seuillage ou quantification grossière des coefficients de détail



Slide courtesy of Joël Lefebvre

Exemple: Haar, 3-Niveaux, Seuil de 0.1, Taux de compression: 91.32%, Erreur (RMS): 4.65%

Problème à résoudre

Calculez la transformée en ondelette rapide en 2D par rapport aux ondelettes de Haar pour l'image 2 x 2 :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Remplissez les valeurs obtenues à chaque étape de la décomposition montrée dans la figure ci-dessus :

