POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

NeuroPoly

Transformations et amélioration dans le domaine fréquentiel

Eva Alonso Ortiz

ELE8812

2 février 2023

Plan

1. **Aspects pratiques des calculs dans le domaine fréquentiel**
   - Rappel: propriétés importantes de la TFD
   - Exemple : interpolation
   - Exemple : convolution
2. **Principe des traitements dans le domaine fréquentiel**
3. **Lissage (“*smoothing*”) dans le domaine fréquentiel**
   - Filtre passe-bas idéal
   - Filtres classiques : Butterworth et gaussien
4. **Rehaussement (“*sharpening*”) dans le domaine fréquentiel**
   - Filtres classiques : ideal, Butterworth et gaussien
   - Autres types de traitements : laplacien, masque flou, homomorphique
5. **Traitements *ad hoc* dans le domaine fréquentiel**
   - Filtre passe-bande et coupe-bande
   - Filtres *ad hoc*

Plan

1. **Aspects pratiques des calculs dans le domaine fréquentiel**
    - Rappel: propriétés importantes de la TFD
    - Exemple : interpolation
    - Exemple : convolution
2. **Principe des traitements dans le domaine fréquentiel**
3. **Lissage (“*smoothing*”) dans le domaine fréquentiel**
    - Filtre passe-bas idéal
    - Filtres classiques : Butterworth et gaussien
4. **Rehaussement (“*sharpening*”) dans le domaine fréquentiel**
    - Filtres classiques : ideal, Butterworth et gaussien
    - Autres types de traitements : laplacien, masque flou, homomorphique
5. **Traitements *ad hoc* dans le domaine fréquentiel**
    - Filtre passe-bande et coupe-bande
    - Filtres *ad hoc*

Transformée de Fourier discrète : rappels (1)

Définition

- Image $f(x,y)$; $0 \le x \le M-1$, $0 \le y \le N-1$
- Transformée $F(u,v)$; $0 \le u \le M-1$, $0 \le v \le N-1$
- TFD 2D : $$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-2i\pi(ux/M + vy/N)}$$
- TFDI 2D : $$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{2i\pi(ux/M + vy/N)}$$

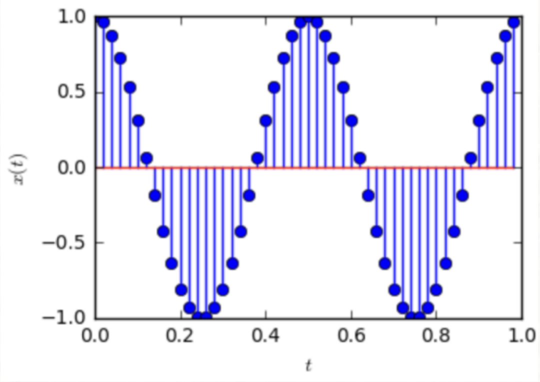
TF ou TFI : opération *globale*

Ne pas tenter de lier quelques échantillons de $f(x,y)$ avec quelques échantillons de $F(u,v)$

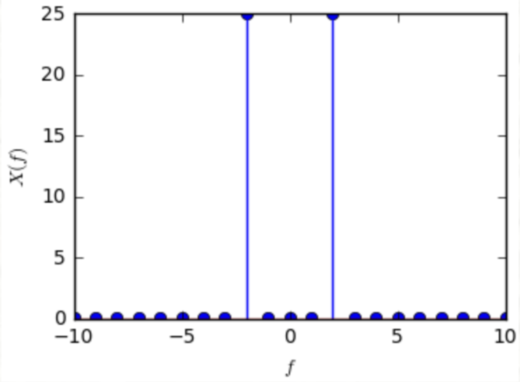
Transformée de Fourier discrète : rappels (2)

Interprétation

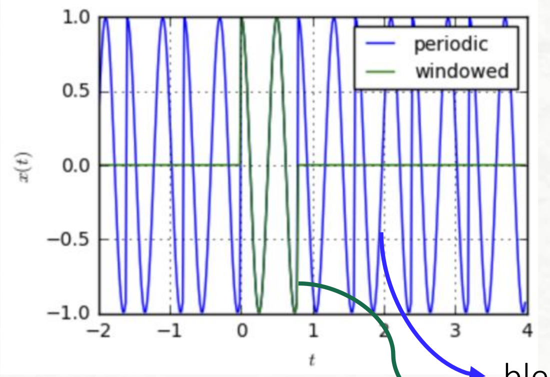
- f discrète (M, N) et périodique de période $(M, N) \longleftrightarrow F(u,v)$ *discrète et « exacte »*



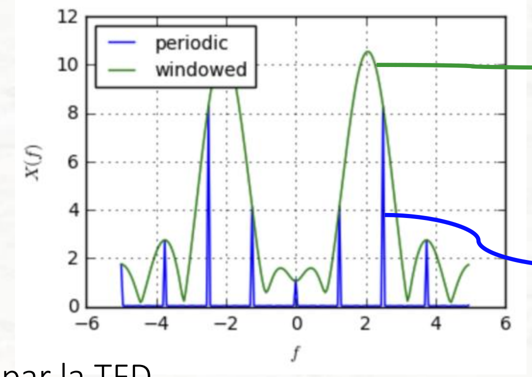
$\longleftrightarrow$



- f discrète (M, N) et non-périodique $\longleftrightarrow F(u,v)$ *échantillonne* $F(\nu_1, \nu_2)$ pour $\nu_1 = u/M$, $\nu_2 = v/N$



$\longleftrightarrow$



vert: spectre exacte, $F(\nu_1, \nu_2)$, du signal non-périodique

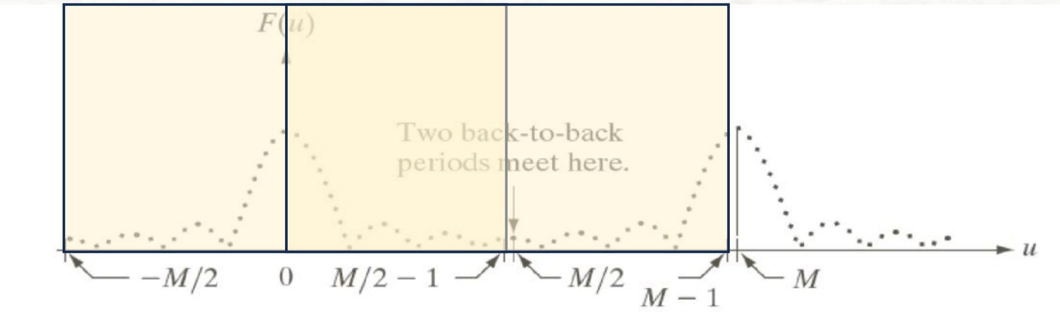
bleu: N échantillons de $F(\nu_1, \nu_2)$

bleu: signal présumé par la TFD

vert: N échantillons d'un signal non-périodique

Transformée de Fourier discrète : rappels (2)

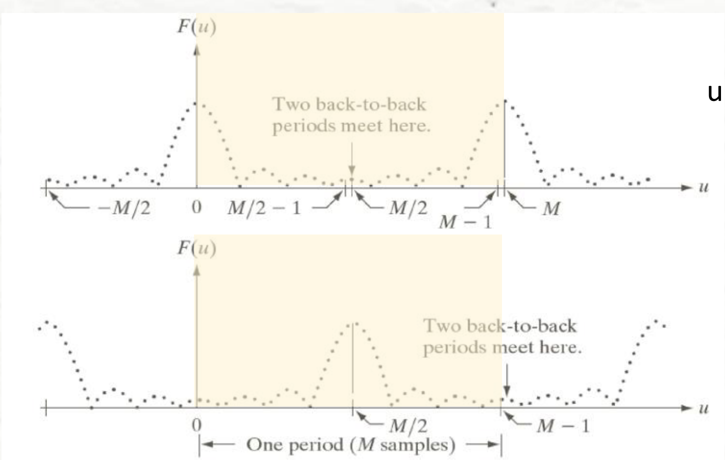
$$(u/M,\ v/N) \in [0\,,1]^2 \text{ alors que } (v_1\,, v_2) \in \left[-\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right]^2$$

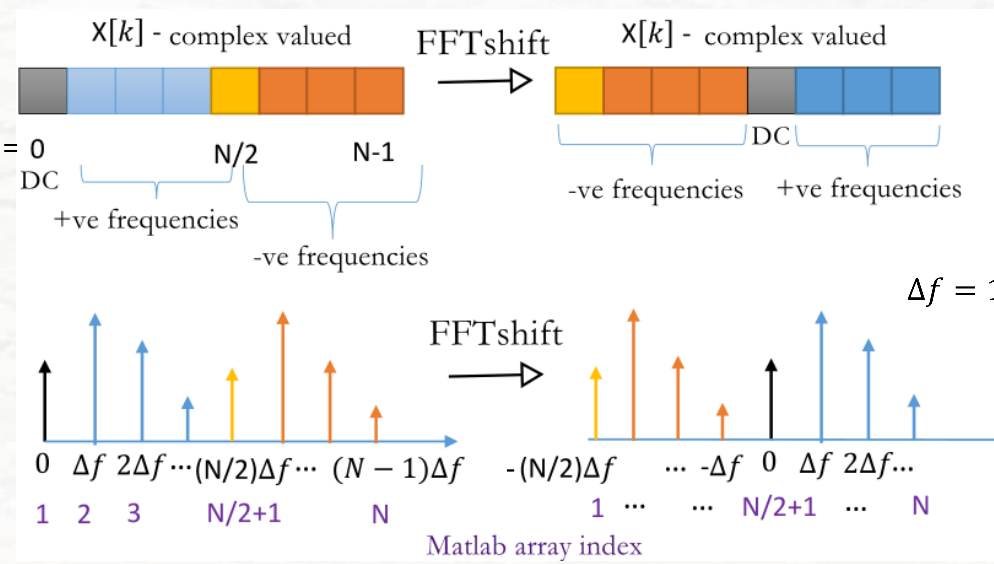


Interprétation des fréquences discrètes

Points à retenir

- TFD brute : fréquence entre 0 et 1
- Centrage et la fréquence nulle : fonctions **fftshift et ifftshift**
- Dimension impaire: fréquence nulle centrée, autres fréquences symétriques, pas de fréquence $\pm 1/2$
- Dimension paire: fréquence nulle décalée d’un échantillon, autres fréquences symétriques sauf fréquence $-1/2$





https://www.gaussianwaves.com/2015/11/interpreting-fft-results-complex-dft-frequency-bins-and-fftshift/

Propriétés de symétrie de la TF 2D

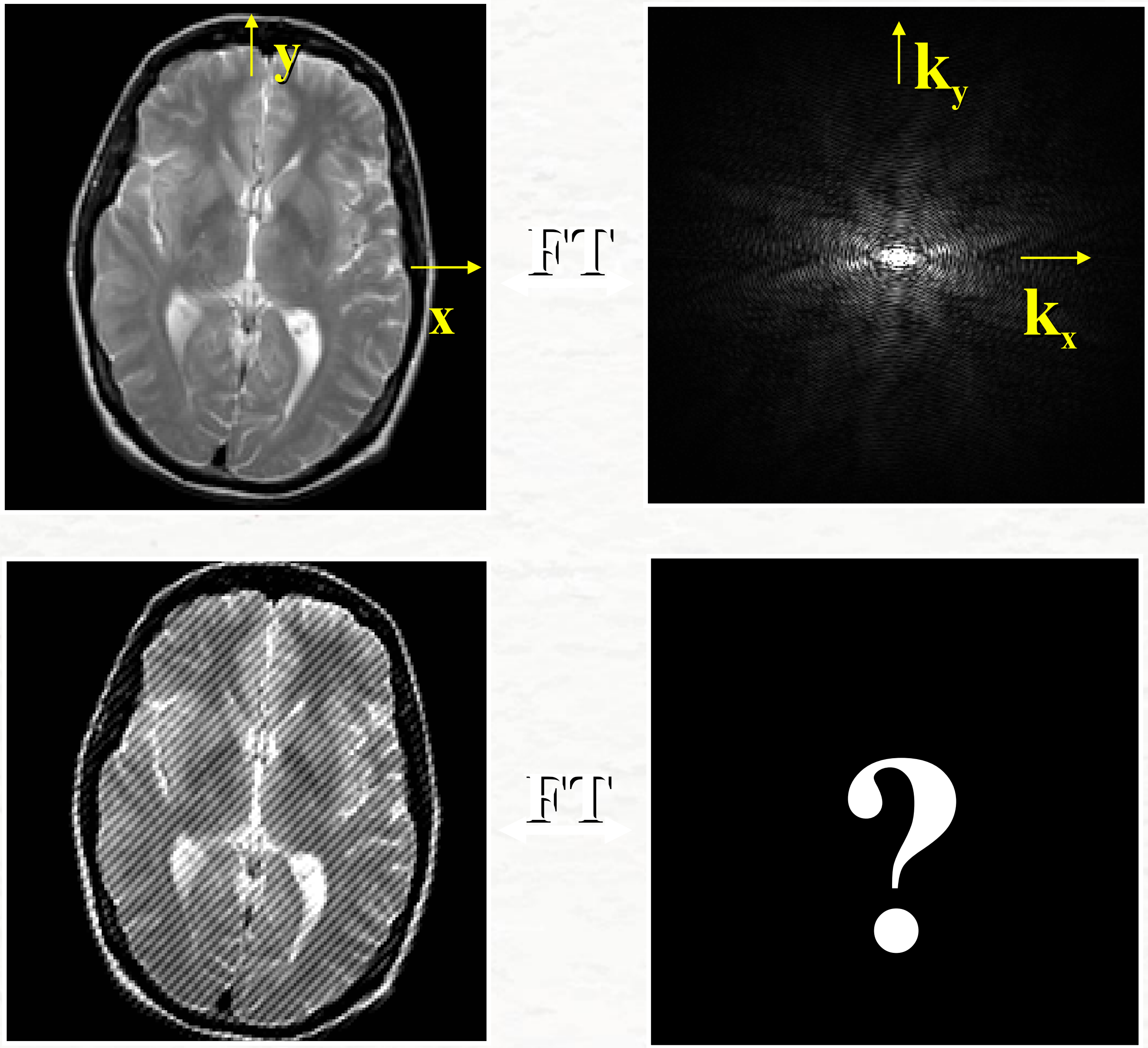
	Spatial Domain†		Frequency Domain†
1)	$f(x, y)$ real	$\Leftrightarrow$	$F^*(u, v) = F(-u, -v)$
2)	$f(x, y)$ imaginary	$\Leftrightarrow$	$F^*(-u, -v) = -F(u, v)$
3)	$f(x, y)$ real	$\Leftrightarrow$	$R(u, v)$ even; $I(u, v)$ odd
4)	$f(x, y)$ imaginary	$\Leftrightarrow$	$R(u, v)$ odd; $I(u, v)$ even
5)	$f(-x, -y)$ real	$\Leftrightarrow$	$F^*(u, v)$ complex
6)	$f(-x, -y)$ complex	$\Leftrightarrow$	$F(-u, -v)$ complex
7)	$f^*(x, y)$ complex	$\Leftrightarrow$	$F^*(-u - v)$ complex
8)	$f(x, y)$ real and even	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ real and even
9)	$f(x, y)$ real and odd	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ imaginary and odd
10)	$f(x, y)$ imaginary and even	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ imaginary and even
11)	$f(x, y)$ imaginary and odd	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ real and odd
12)	$f(x, y)$ complex and even	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ complex and even
13)	$f(x, y)$ complex and odd	$\Leftrightarrow$	$F(u, v)$ complex and odd

†Recall that x, y, u, and v are *discrete* (integer) variables, with x and u in the range $[0, M - 1]$, and y, and v in the range $[0, N - 1]$. To say that a complex function is *even* means that its real *and* imaginary parts are even, and similarly for an odd complex function.

Mag(u,v) paire
Phase(u,v) impaire

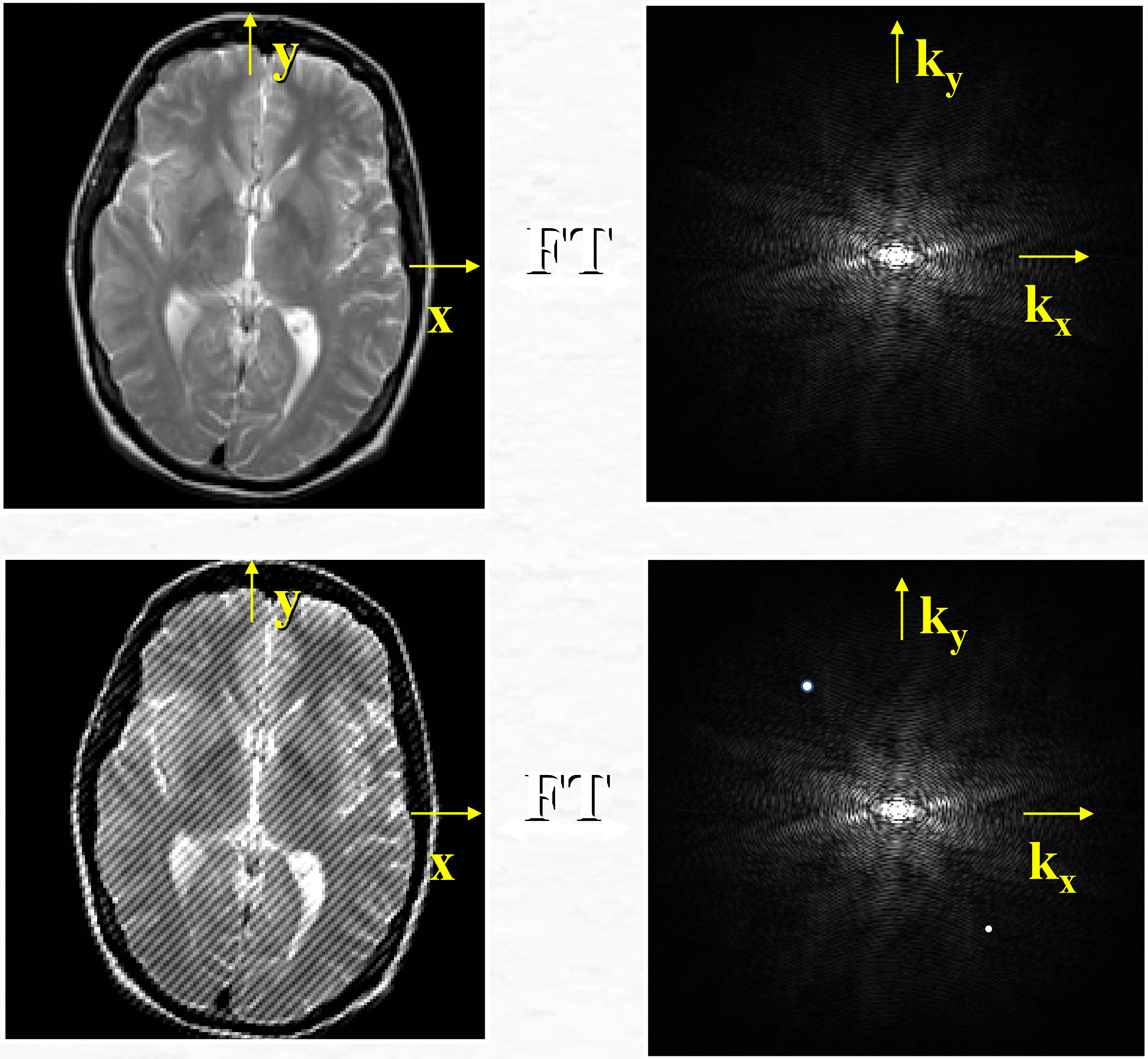
$$\boxed{|F(u,v)| = |F(-u.-v)|}$$

$$\boxed{\angle F(u,v) = \angle F(-u,-v)}$$



slido

Slide courtesy of Elfar Adalsteinsson



Slide courtesy of Elfar Adalsteinsson

Interpolation dans le domaine fréquentiel

Principe

- Interpolation : rééchantillonnage de l'image
- Augmentation de la *résolution* : prolongement de $F(u,v)$ par des zéros
- Diminution de la *résolution* : troncature de $F(u,v)$
- Voir **demo_interp**

Points délicats

- Préservation des propriétés de symétrie (nécessité de manipuler des quantités intermédiaires de taille impaire)
- Présence d'oscillations parasites
- Conservation de l'echelle.

Convolution par passage dans le domaine fréquentiel

Principe

- $g(x,y) = (f * h)(x,y) \Longleftrightarrow G(u,v) = F(u,v)H(u,v)$
- $F(u,v)$ et $H(u,v)$ doivent être définis pour les mêmes (u,v)
- Hypothèse implicite de périodicité ⇒ prolongement de f et h par des zéros
- Voir **demo_conv**

Points délicats

- Taille et nature du prolongement
- Recalage adéquat du résultat

Plan

1. Aspects pratiques des calculs dans le domaine fréquentiel
   - Rappel: propriétés importantes de la TFD
   - Exemple : interpolation
   - Exemple : convolution
2. Principe des traitements dans le domaine fréquentiel
3. Lissage (“*smoothing*”) dans le domaine fréquentiel
   - Filtre passe-bas idéal
   - Filtres classiques : Butterworth et gaussien
4. Rehaussement (“*sharpening*”) dans le domaine fréquentiel
   - Filtres classiques : ideal, Butterworth et gaussien
   - Autres types de traitements : laplacien, masque flou, homomorphique
5. Traitements *ad hoc* dans le domaine fréquentiel
   - Filtre passe-bande et coupe-bande
   - Filtres *ad hoc*

Principe des traitements dans le domaine fréquentiel

Nature des traitements

$$f(x,y) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u,v) \qquad \text{Transformation fréquentielle} \qquad G(u,v) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} g(x,y)$$

Situations typiques

- Transformation fréquentielle spécifiée directement dans le domaine fréquentiel
- Transformation fréquentielle spécifiée à partir de son equivalent dans le domaine spatial

Points critiques

- Choix de la transformation
- Mise en œuvre (symétrie, prolongements, etc.)

Plan

1. **Aspects pratiques des calculs dans le domaine fréquentiel**
   - Rappel: propriétés importantes de la TFD
   - Exemple : interpolation
   - Exemple : convolution
2. **Principe des traitements dans le domaine fréquentiel**
3. **Lissage (“*smoothing*”) dans le domaine fréquentiel**
   - Filtre passe-bas idéal
   - Filtres classiques : Butterworth et gaussien
4. **Rehaussement (“*sharpening*”) dans le domaine fréquentiel**
   - Filtres classiques : ideal, Butterworth et gaussien
   - Autres types de traitements : laplacien, masque flou, homomorphique
5. **Traitements *ad hoc* dans le domaine fréquentiel**
   - Filtre passe-bande et coupe-bande
   - Filtres *ad hoc*

Approche générale du filtrage dans le domaine fréquentiel

Hypothèses

- Filtrage linéaire : $G(u,v) = F(u,v)H(u,v)$
- En général : $H(u,v)$ invariant par rotation (isotrope: ne dépend pas de la direction)

$$H(u,v) = \phi(D(u,v))$$

$$D(u,v) = \sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}$$ (distance radiale)

(u_0, v_0) : indices de la fréquence nulle

- $H(u,v)$ pair et réel $\Leftrightarrow$ $h(x,y)$ pair et réel

Points critiques

- Choix de la fonction ϕ
- Étendue spatiale du filtre $h(x,y)$ correspondant (prolongement de f?)

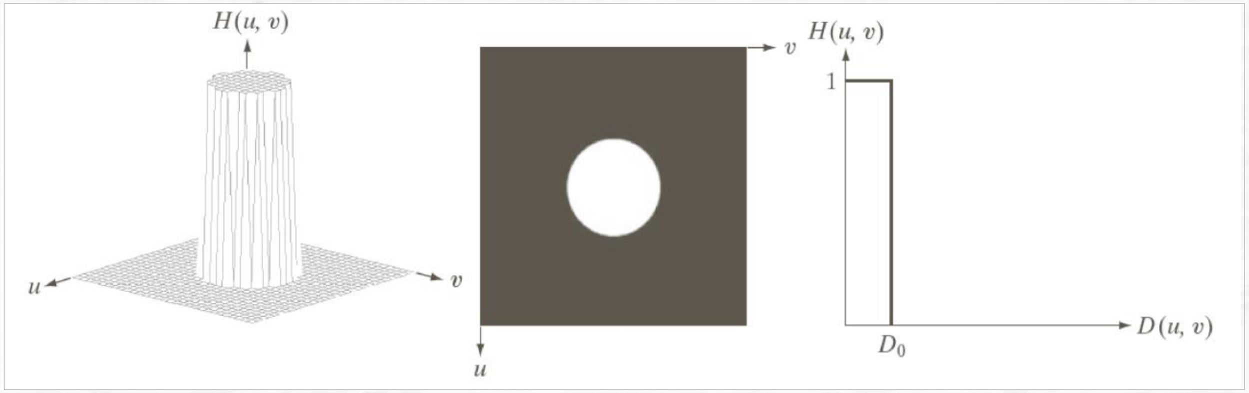
Filtrage passe-bas ideal (1)

Principe

- Choix de $H(u,v)$: fenêtre centrée autour de zero

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 \text{ si } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 \text{ si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

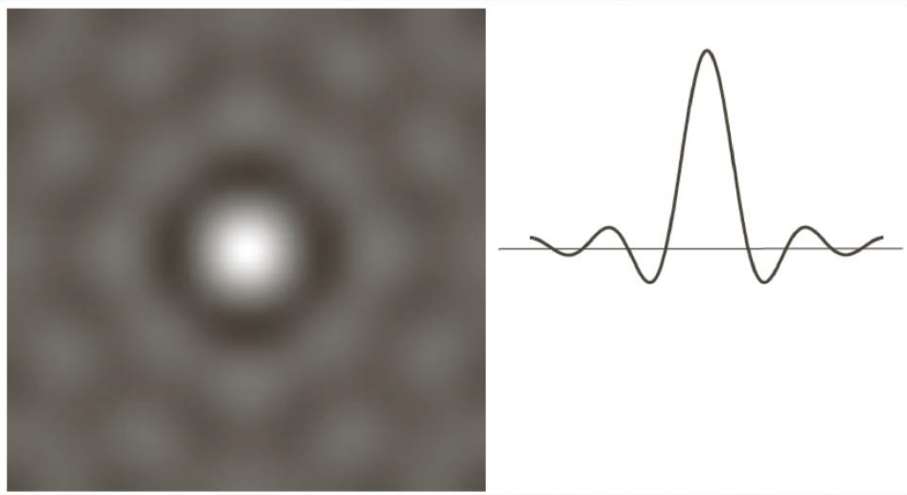
Représentation



Filtrage passe-bas ideal (2)

Points délicats

- Choix de la fréquence de coupure et du prolongement
- Oscillations



a b

FIGURE 4.43 (a) Representation in the spatial domain of an ILPF of radius 5 and size 1000×1000. (b) Intensity profile of a horizontal line passing through the center of the image.

Filtres passe-bas classiques

Filtres de Butterworth

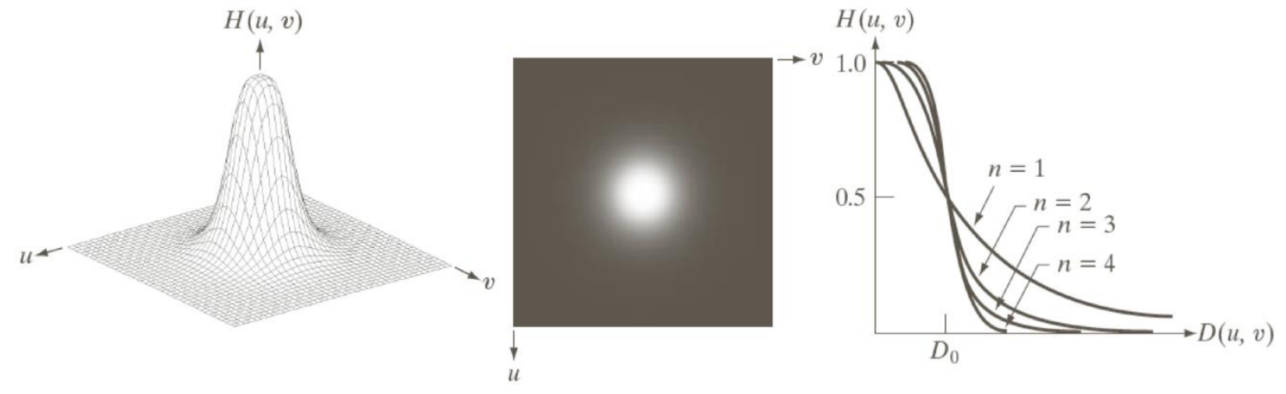
Principe

- Définition : $H(u,v) = \phi\big(D(u,v)\big) \qquad \phi(v) = \frac{1}{1 + (v/D_0)^{2n}}$

Définition non classique

- n : ordre du filtre
- Décroissance monotone dans le domaine fréquentiel

Représentation

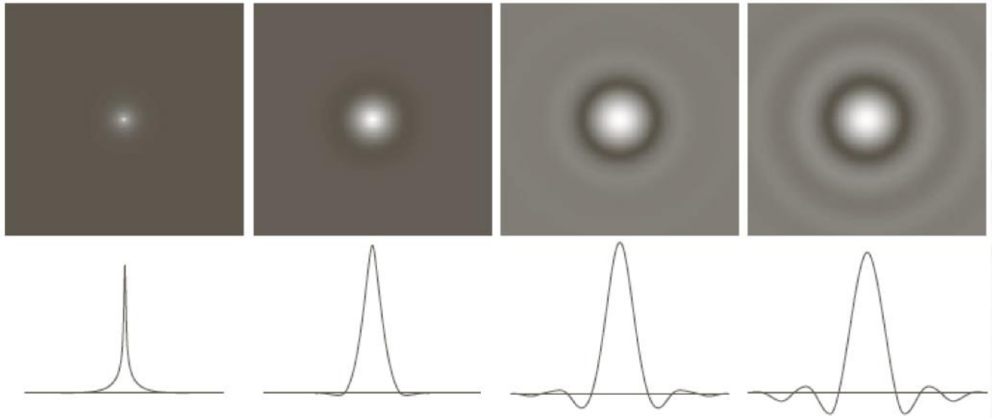


Filtres de Butterworth

Points marquants

- Ordre : permet un choix aisé de la raideur du filtre
- Compromis entre ordre et oscillations

Ordre 1 Ordre 2 Ordre 5 Ordre 20



a b c d

FIGURE 4.46 (a)–(d) Spatial representation of BLPFs of order 1, 2, 5, and 20, and corresponding intensity profiles through the center of the filters (the size in all cases is 1000 × 1000 and the cutoff frequency is 5). Observe how ringing increases as a function of filter order.

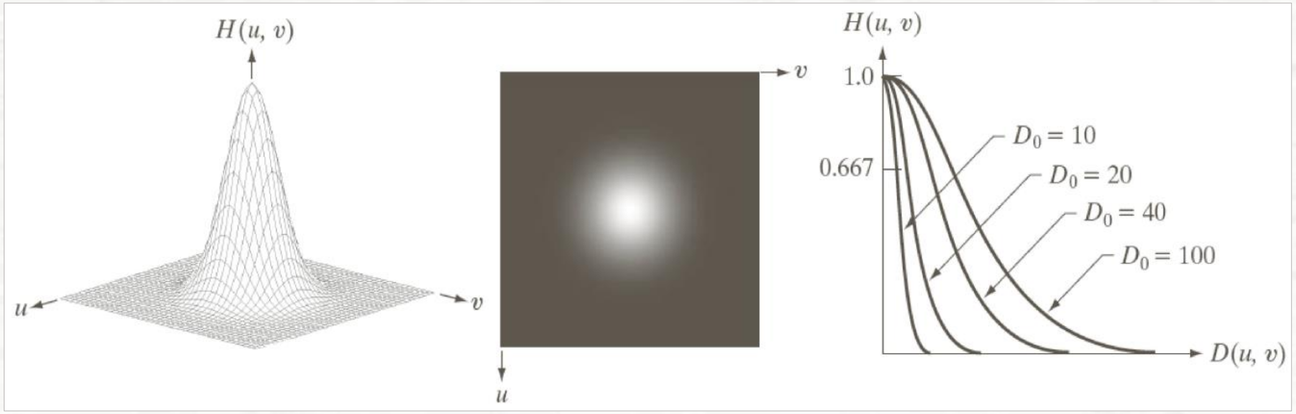
Filtres passe-bas classiques

Filtres gaussien

Définition et propriétés

- Définition : $H(u, v) = \phi(D(u, v)) \quad \phi(\nu) = e^{-\nu^2/(2D_0^2)}$
- TFI : $\phi(\nu) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longrightarrow} f(t) = \sqrt{2\pi} D_0 e^{-2\pi^2 D_0^2 t^2}$
- Décroissance monotone dans les domaines spatial et fréquentiel

Représentation



Filtres gaussiens

Mise en œuvre

- Étapes du traitement : voir **filtpb**
- Résultats typiques : voir **demo_pb**

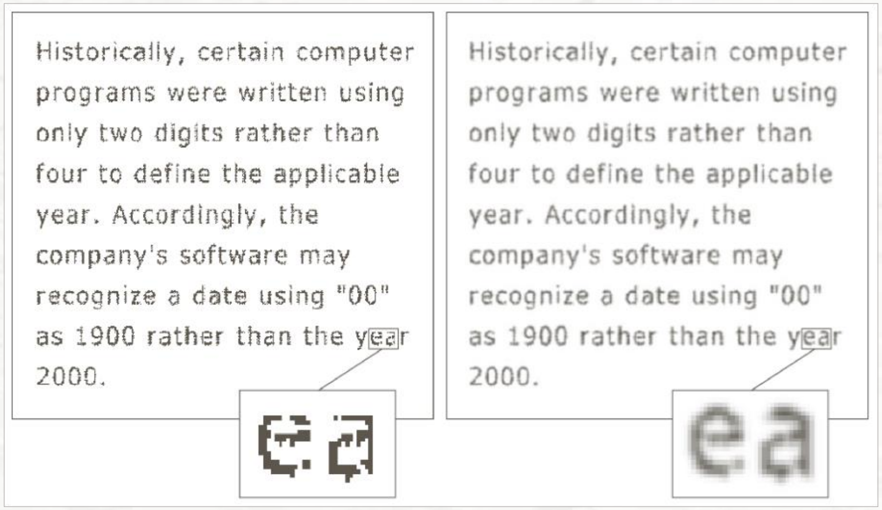
Points marquants

- Pas d’oscillations dans les domaines spatial et fréquentiel
- Notion de fréquence de coupure plus difficile à appréhender

Filtres passe-bas

Exemples d’utilisation

- Lissage



a b

FIGURE 4.49 (a) Sample text of low resolution (note broken characters in magnified view). (b) Result of filtering with a GLPF (broken character segments were joined).

- Détramage : voir demo_detr

Plan

1. **Aspects pratiques des calculs dans le domaine fréquentiel**
    - Rappel: propriétés importantes de la TFD
    - Exemple : interpolation
    - Exemple : convolution
2. **Principe des traitements dans le domaine fréquentiel**
3. **Lissage ("*smoothing*") dans le domaine fréquentiel**
    - Filtre passe-bas idéal
    - Filtres classiques : Butterworth et gaussien
4. **Rehaussement ("*sharpening*") dans le domaine fréquentiel**
    - Filtres classiques : ideal, Butterworth et gaussien
    - Autres types de traitements : laplacien, masque flou, homomorphique
5. **Traitements *ad hoc* dans le domaine fréquentiel**
    - Filtre passe-bande et coupe-bande
    - Filtres *ad hoc*

Filtres passe-haut dans le domaine fréquentiel

Rappel : principales utilisations du filtrage passe-haut

- Détection de contours
- Rehaussement

Principe de construction des filtres passe-haut classiques

- $H_{PH}\,(u,v) = 1 - H_{PB}\,(u,v)$; $H_{PB}\,(u,v)$: réponse fréquentielle des filtres passe-bas classiques
- $h_{ph}\,(x,y)$: singularité en (0, 0)!

Caractéristiques analogues à celles des filtres passe-bas de même type

Filtres passe-haut classiques (1)

Réponse fréquentielle

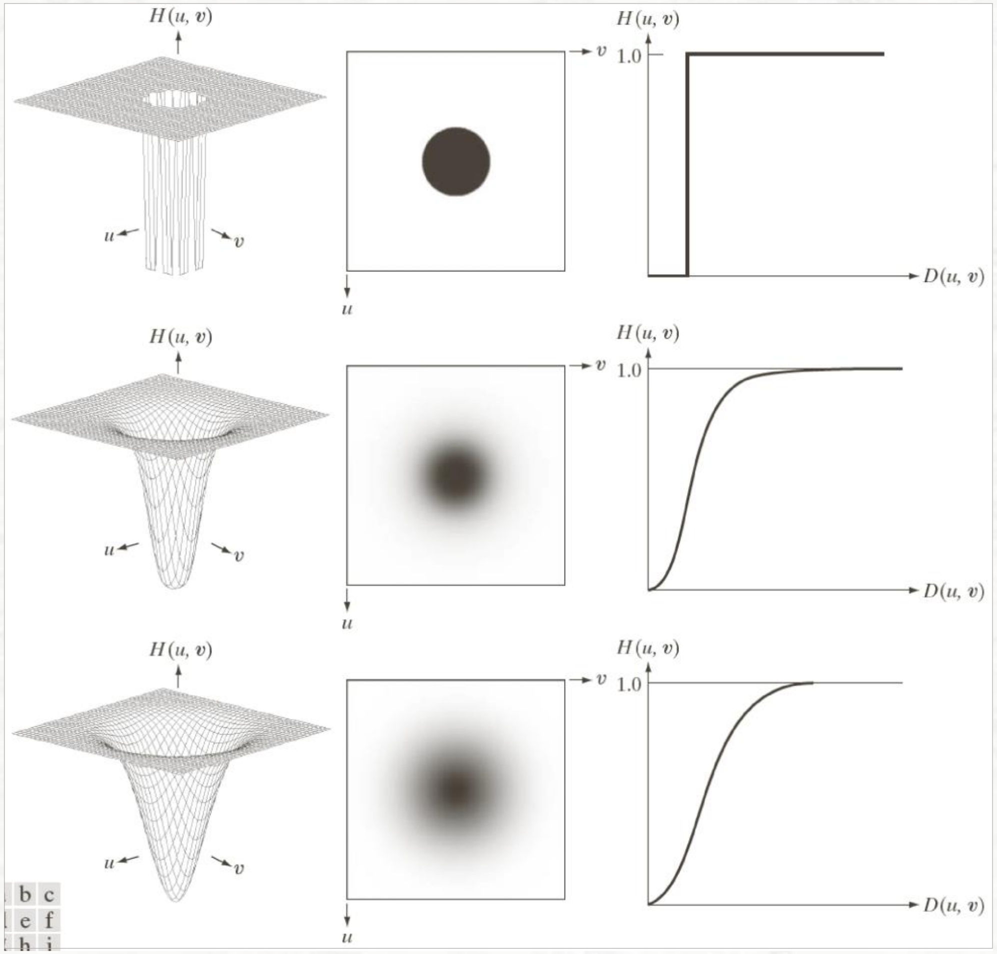
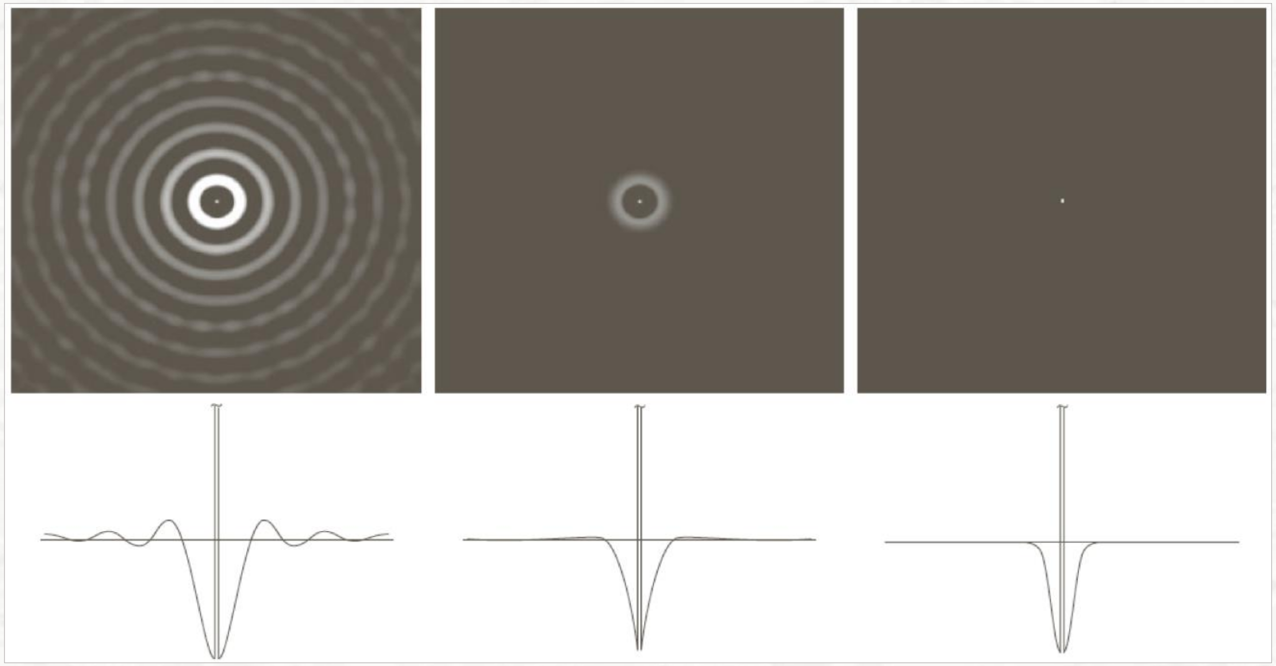


FIGURE 4.52 Top row: Perspective plot, image representation, and cross section of a typical ideal highpass filter. Middle and bottom rows: The same sequence for typical Butterworth and Gaussian highpass filters.

Filtres passe-haut classiques (2)

Réponse impulsionnelle



a b c

FIGURE 4.53 Spatial representation of typical (a) ideal, (b) Butterworth, and (c) Gaussian frequency domain highpass filters, and corresponding intensity profiles through their centers.

Exemple de résultats

Voir demo_ph

Rehaussement : laplacien

- Principe : $g(x,y) = f(x,y) + c\nabla^2 f(x,y)$
- $\nabla^2 f(x,y)$: expression explicite dans le domaine fréquentiel

$$\nabla^2 f(x,y) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} H(u,v)F(u,v)$$

$$\nabla^2 f(x,y) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} -4\pi^2 D^2(u,v)F(u,v)$$

- $c = -1$
- Attention aux problèmes d’échelle… il faut re-normaliser la TF du Laplacien

a b

FIGURE 4.56
(a) Original, blurry image. (b) Image enhanced using the Laplacian in the frequency domain. Compare with Fig. 3.46(d). (Original image courtesy of NASA.)

Rehaussement : masquage flou

- Principe : $g(x,y) = f(x,y) + k\left(f(x,y) - f_{PB}(x,y)\right)$
- Filtrage passe-haut de f : filtres classiques dans le domaine fréquentiel
- Caractéristiques des filtres classiques correspondants
- Voir demo_reh

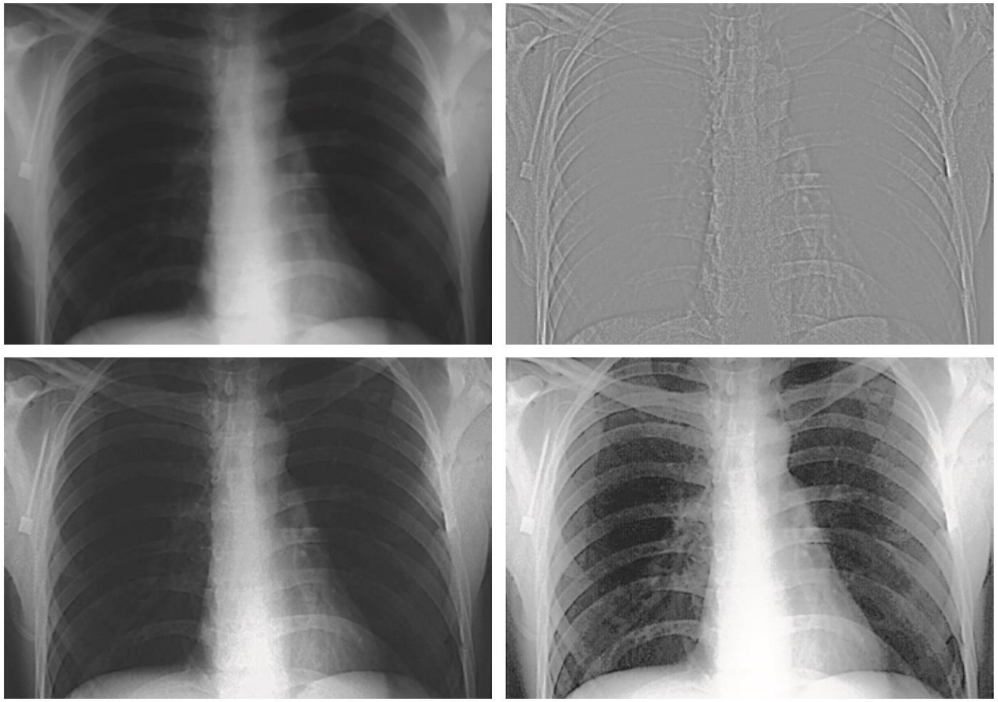


FIGURE 4.57 (a) A chest X-ray. (b) Result of filtering with a GHPF function. (c) Result of high-frequency-emphasis filtering using the same GHPF. (d) Result of performing histogram equalization on (c). (Original image courtesy of Dr. Thomas R. Gest, Division of Anatomical Sciences, University of Michigan Medical School.)

Filtrage homomorphique (1)

Principe

- Décomposition de l’image en luminance et réflectance :

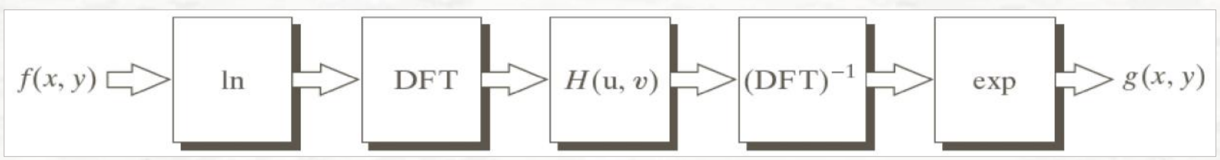
  $f(x,y) = i(x,y)r(x,y)$

- Traitement « séparé de chaque composante» :
  - luminance : basses fréquences, à atténuer
  - réflectance : hautes fréquences, à amplifier
- Produit —> mélange des fréquences
- Séparation : logarithme

$$z(x,y) = \ln f(x,y) = \ln i(x,y) + \ln r(x,y)$$

$$\Im[z(x,y)] = \Im[\ln f(x,y)] = \Im[\ln i(x,y)] + \Im[\ln r(x,y)]$$

$$Z(u,v) = F_i(u,v) + F_r(u,v)$$



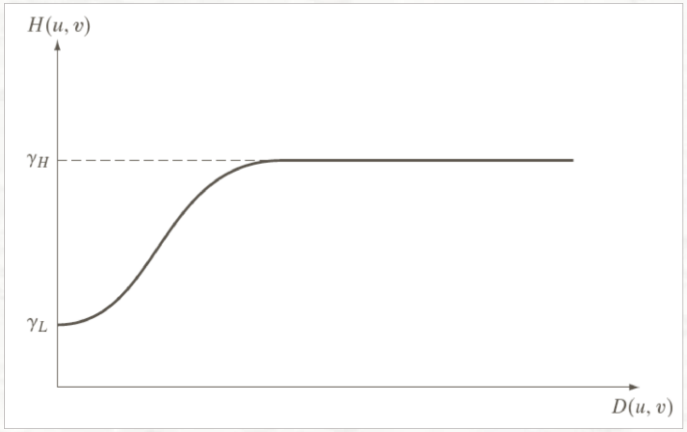
Utilité

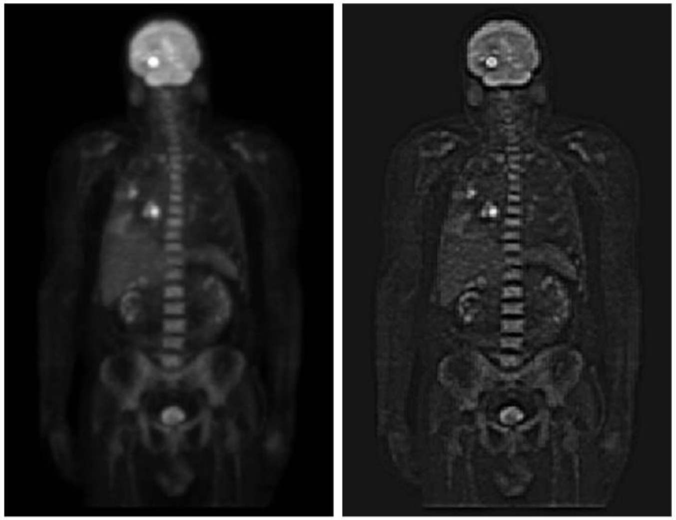
Rehausser une image et compresser la plage dynamique simultanément

Filtrage homomorphique (2)

Allure du filtre pour traitement fréquentiel

FIGURE 4.61 Radial cross section of a circularly symmetric homomorphic filter function. The vertical axis is at the center of the frequency rectangle and $D(u, v)$ is the distance from the center.





a b

FIGURE 4.62 (a) Full body PET scan. (b) Image enhanced using homomorphic filtering. (Original image courtesy of Dr. Michael E. Casey, CTI PET Systems.)

Exemple de résultats

Voir demo_hom

Plan

1. **Aspects pratiques des calculs dans le domaine fréquentiel**
   - Rappel: propriétés importantes de la TFD
   - Exemple : interpolation
   - Exemple : convolution
2. **Principe des traitements dans le domaine fréquentiel**
3. **Lissage (“*smoothing*”) dans le domaine fréquentiel**
   - Filtre passe-bas idéal
   - Filtres classiques : Butterworth et gaussien
4. **Rehaussement (“*sharpening*”) dans le domaine fréquentiel**
   - Filtres classiques : ideal, Butterworth et gaussien
   - Autres types de traitements : laplacien, masque flou, homomorphique
5. **Traitements *ad hoc* dans le domaine fréquentiel**
   - Filtre passe-bande et coupe-bande
   - Filtres *ad hoc*

Filtres passe-bande et coupe-bande classiques

Principe

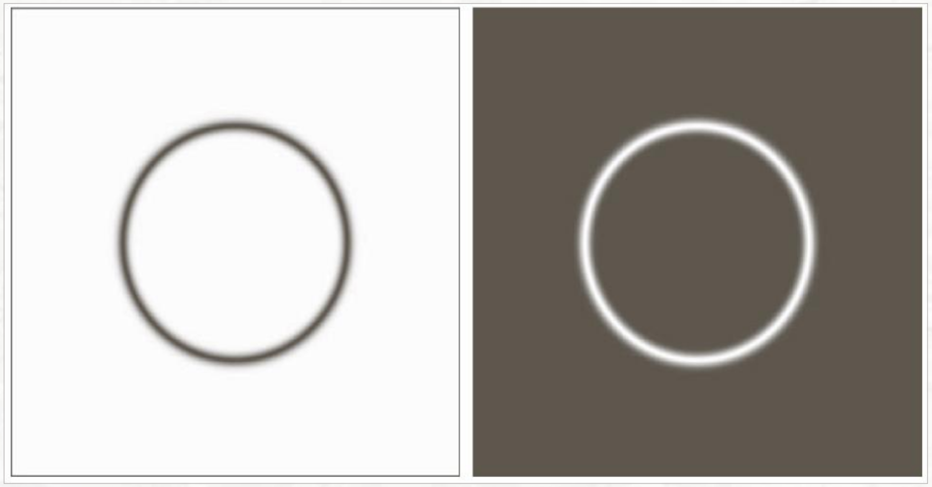
- « Circularisation » des passe-bande classiques
- D_0 : fréquence centrale ; W : largeur de bande
- Idéal : $H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D_0 - W/2 \leq D \leq D_0 + W/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
- Butterworth : $H(u,v) = \phi(D(u,v))\ ;\ \phi(\nu) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{\nu^2 - D_0^2}{\nu W}\right)^{2n}}$
- Gaussien : $H(u,v) = \phi(D(u,v))\ ;\ \phi(\nu) = e^{-\left(\frac{\nu^2 - D_0^2}{\nu W}\right)^2}$

Caractéristiques analogues à celles des filtres passe-bas de même type

Filtres passe-bande et coupe-bande classiques

Filtres coupe-bande

- Définition : $H_{CBD}\,(u,v) = 1 - H_{PBD}\,(u,v)$
- Exemple de réponses fréquentielles



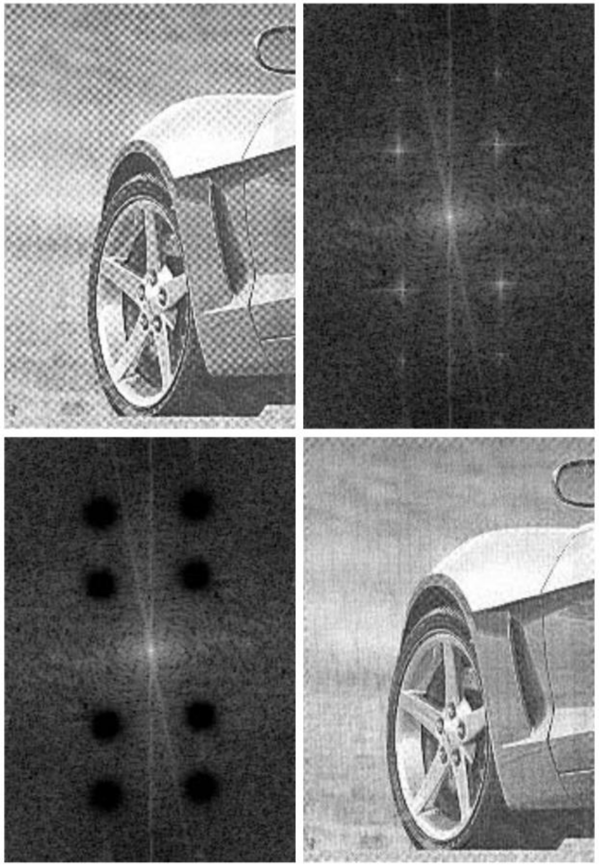


FIGURE 4.64 (a) Sampled newspaper image showing a moiré pattern. (b) Spectrum. (c) Butterworth notch reject filter multiplied by the Fourier transform. (d) Filtered image.

Exemple de résultats

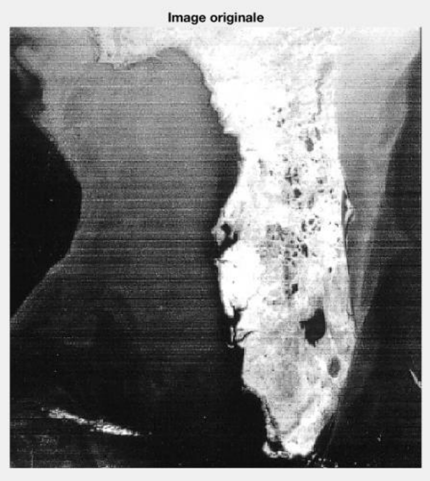
- Objectif : détramage
- Voir demo_detr1

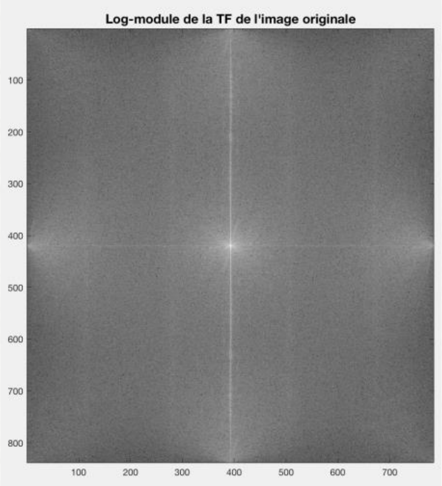
Filtres *ad hoc*

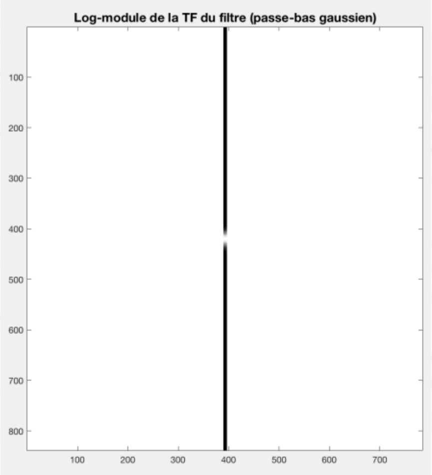
Principe : attenuation ou amplification de regions particulières de $F(u,v)$

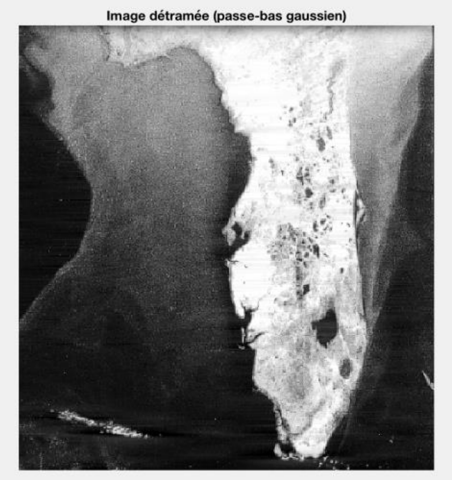
Exemple d'application

- Objectif : détramage
- Voir demo_detr2









Problème

Un technicien médical qualifié est chargé d'inspecter une certaine catégorie d'images générées par un microscope électronique. Afin de simplifier la tâche d'inspection, le technicien décide d'utiliser l'amélioration numérique des images et, à cette fin, il examine un ensemble d'images représentatives et constate les problèmes suivants :

(1) points brillants et isolés sans intérêt ;

(2) manque de netteté ;

(3) contraste insuffisant dans certaines images ; et

(4) décalage de l'intensité moyenne, alors que cette valeur devrait être V pour effectuer correctement certaines mesures d'intensité.

Le technicien veut corriger ces problèmes et afficher en blanc toutes les intensités dans une bande comprise entre I1 et I2, tout en conservant une tonalité normale dans les autres intensités.

Proposez une séquence d'étapes de traitement que le technicien peut suivre pour atteindre le but recherché. Vous pouvez utiliser les techniques des leçons 1 - 4.