Transformations et améliorations élémentaires dans le domaine spatial

Eva Alonso Ortiz

ELE8812

14 janvier 2025

Notions élémentaires

1. Topologie sur une image
2. Notion d'opération
3. Opérations arithmétiques et logiques
4. Transformations géométriques
5. Transformations portant sur l'intensité

Voisinages

Principaux types de voisinages

$(x-1, y-1)$	$(x-1, y)$	$(x-1, y+1)$
$(x, y-1)$	$p : (x, y)$	$(x, y+1)$
$(x+1, y-1)$	$(x+1, y)$	$(x+1, y+1)$

Voisinage d'ordre 1 ($N_4(p)$)

Voisinage d'ordre 2 ($N_8(p)$)

Utilité de la notion de voisinage

- Contours, régions
- Traitements spatiaux élémentaires (filtrage)
- Modèles probabilistes d'images (champs de Markov)

Connexité, régions et frontières

Importance de ces notions

- Définition rigoureuse de la notion de région
- Définition rigoureuse de la notion de contour

Adjacence de deux pixels

Deux pixels p et q sont adjacents si $q \in$ voisinage de p

- 4-adjacence: $q \in N_4(p)$
- 8-adjacence: $q \in N_8(p)$ (plus faible)

Chemin ou courbe

Ensemble de pixels $\{ p_i \; ; \; 1 \leq i \leq n \}$ tels que $\forall i \; : \; p_i$ et p_{i+1} adjacents.

Connexité, régions et frontières

Connexité

- Région R : ensemble de pixels appartenant à une image
- R connexe $\Leftrightarrow \forall (p,q) \in R^2$: $\exists$ un chemin connexe de pixels de R permettant de joindre p à q
- Régions 4-connexes ou 8-connexes

Frontière

R région d'une image

- Frontière: pixels p de R adjacents à au moins un pixel de $\overline{R}$
- Le type d'adjacence (4 ou 8) doit être précisé

☛ démo

Distance entre pixels

Nature de l'opération

Distance entre pixels ≠ distance entre objets

Définition

Distances classiques : pixels p_1 : (x_1 , y_1) et p_2 : (x_2 , y_2)

- Distance L_2 (euclidienne) : $d_2 (p_1 , p_2) = \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right)^{1/2}$
- Distance L_1 : $d_1(p_1 , p_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$
- Distance L_∞ : $d_\infty (p_1 , p_2) = \max (|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$

Notions élémentaires

1. Topologie sur une image
2. Notion d'opération
3. Opérations arithmétiques et logiques
4. Transformations géométriques
5. Transformations portant sur l'intensité

Opérations sur les images

Quantités en jeu

- Deux images —> une image (soustraction, multiplication, ...)
- Une image —> une image (seuillage, filtrage, transformation, ...)
- Une image —> un vecteur ou un scalaire (moyenne, variance, histogramme, ...)

Nature des opérations

- Principale distinction: linéaire *vs* non-linéaire
- Linéarité: par rapport à quelle quantité?

Opérations sur les images

Diapo modifiée!

Linéarité

$$H\,[f(x,y)] = g(x,y)$$

Une opération H est dite linéaire si elle satisfait l'équation suivante pour une image d'entrée f(x,y), une image de sortie g(x,y) et des constantes arbitraires a et b:

$$\begin{aligned} H[a\,f_1(x,y) + bf_2(x,y)] &= aH[f_1(x,y)] + bH[f_2(x,y)] \\ &= ag_1(x,y) + bg_2(x,y) \end{aligned}$$

Opérations sur les images

Diapo ajoutée!

Linéarité exemple

$$H\ [f(x,y)] = g(x,y)$$

Pour H = opérateur de summation $\sum$

$$\begin{aligned}\sum[a\ f_1(x,y) + bf_2(x,y)] &= \sum a[f_1(x,y)] + \sum b[f_2(x,y)] \\ &= a\sum[f_1(x,y)] + b\sum[f_2(x,y)] \\ &= ag_1(x,y) + bg_2(x,y)\end{aligned}$$

L'opération $\sum$ est donc linéaire

Voir le manuel page 69 pour un exemple d'opérateur non-linéaire

Notions élémentaires

1. Topologie sur une image
2. Notion d'opération
3. Opérations arithmétiques et logiques
4. Transformations géométriques
5. Transformations portant sur l'intensité

Opérations arithmétiques

Deux ou plusieurs images de même taille —> une image

Types d'opérations

Opérations arithmétiques : terme à terme (pixel à pixel)

f et g deux images de même taille

- Addition : $f(x,y) + g(x,y)$
- Soustraction : $f(x,y) - g(x,y)$
- Multiplication : $f(x,y) \times g(x,y)$
- Division : $f(x,y) / g(x,y)$

Précautions indispensables

- Validité des opérations
- Plage de variation du résultat

Opérations arithmétiques

Deux ou plusieurs images de même taille —> une image

Diapo ajoutée !

Validité des opérations:

- Division par zéro :
  - Ajout d'une petite constante à tous les pixels
  - Masquer les pixels problématiques
  - Interpolation selon les pixels voisins
- Plage de variation des résultats :

Exemple: 135+212 >255 (max)

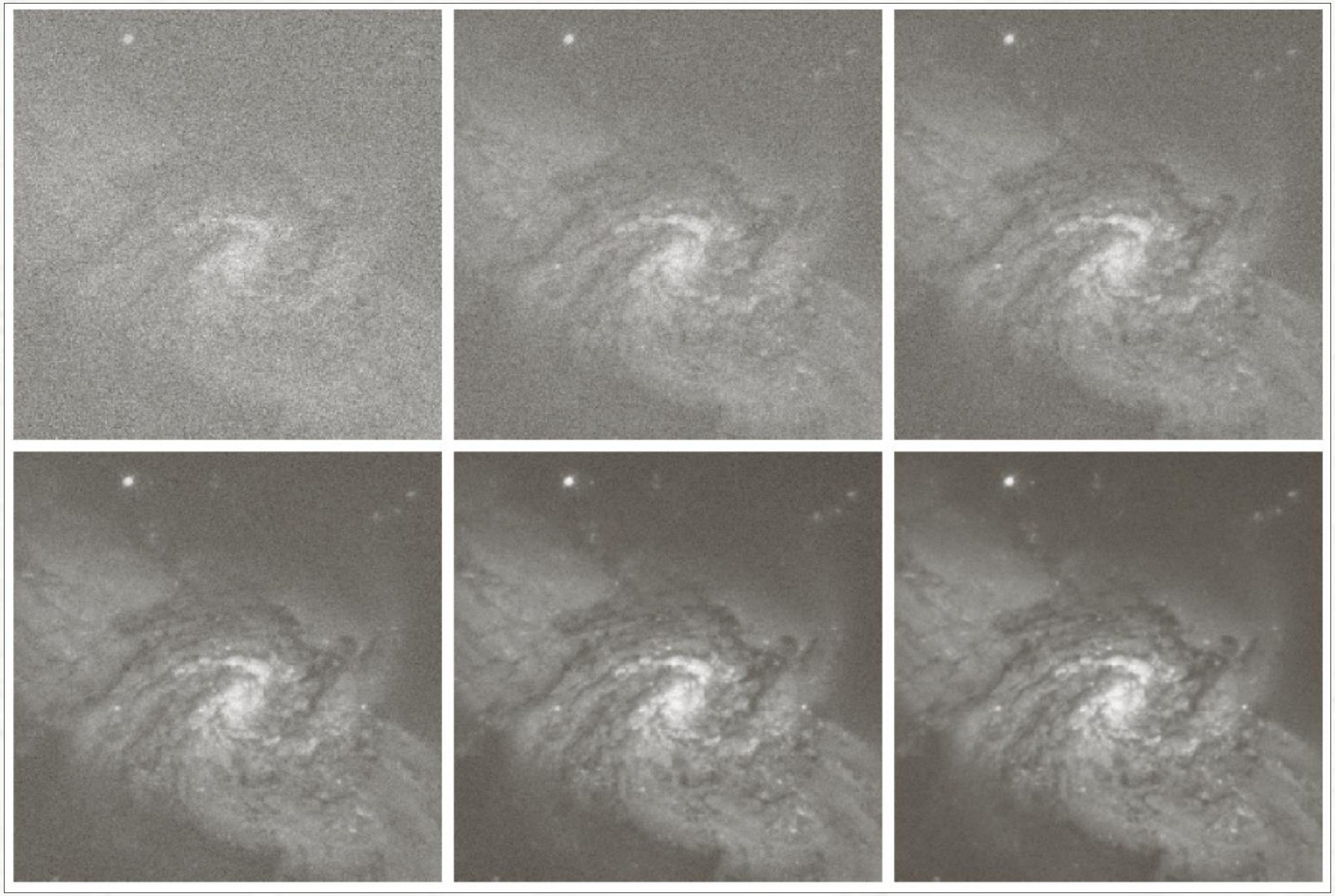
1. $image_m = image - \min(image)$ pour amener le minimum à 0
2. $image_s = K\left[\frac{image_m}{\max(image_m)}\right]$ → intensités entre 0 et K

OU:

- Mettre au max toutes les valeurs dépassant la plage possible → peut causer de la saturation

Moyennage (addition)

Débruitage

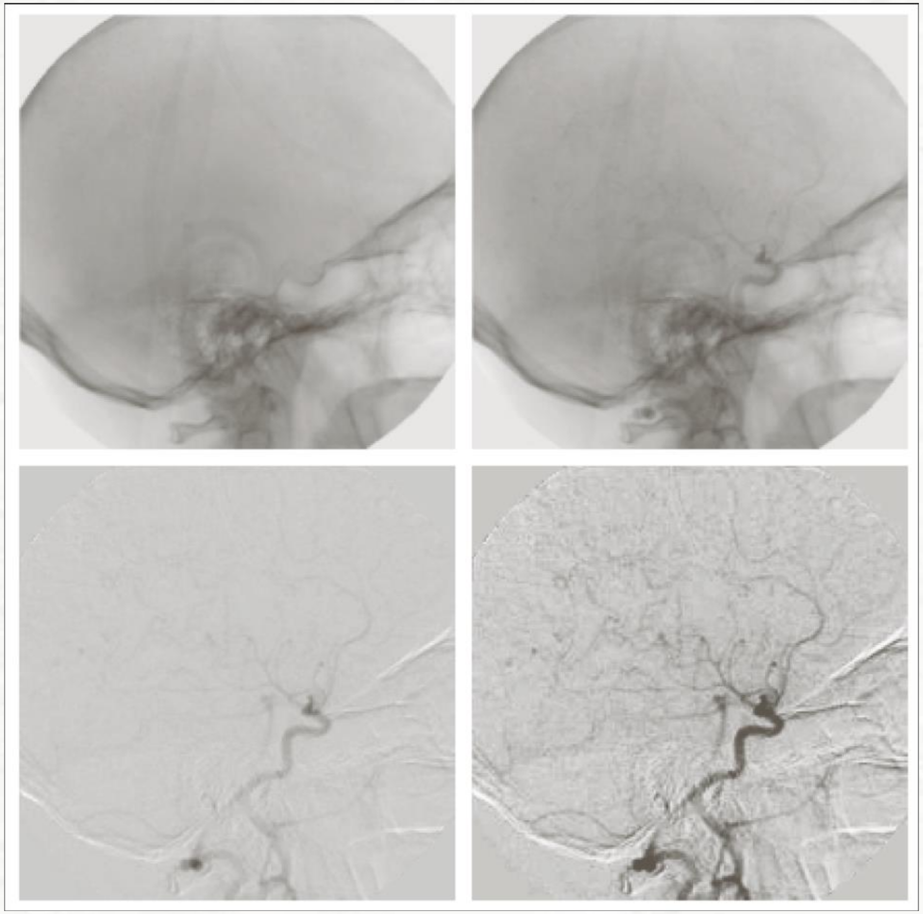


Paire de galaxies NGC3314

Soustraction

Diapo modifiée!

Imagerie *différentielle*



a . Image
b. radiographie avec agent de contraste
c. Différence entre (a) et (b) (soustraction)
d. différence réhaussée

Angiographie cérébrale

Multiplication ou division

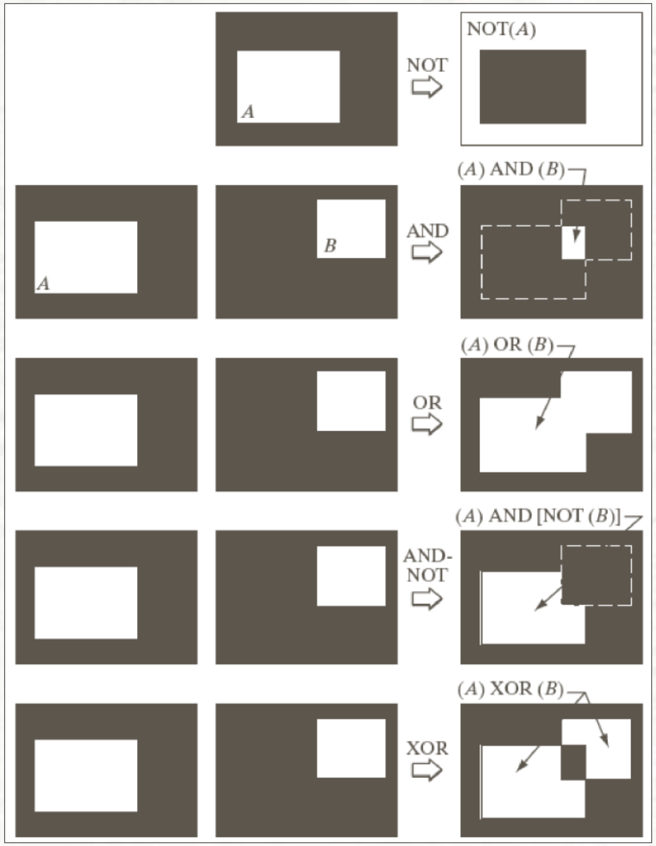
Correction d'éclairement

Microscopie électronique

Opérations logiques

Une ou deux images de même taille —> une image

Principales opérations logiques



Principales utilisations

- Utilisation de masques
- Rehaussement

Extension aux images non binaires

$f(x, y)$ représentée sur k bits, $L = 2^k - 1$

- Opérations « bit à bit »
- Créer des images binaires avec un seuillage

Notions élémentaires

1. Topologie sur une image
2. Notion d'opération
3. Opérations arithmétiques et logiques
4. Transformations géométriques
5. Transformations portant sur l'intensité

Transformations géométriques

Une image —> une image de taille possiblement différente

Principales caractéristiques

- Transformations portant sur les coordonnées : $(x, y) = T(v, w)$
- L'image transformée n'a pas nécessairement la même taille que l'image de départ.

Cas particulier important : transformations affines

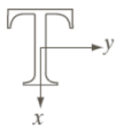
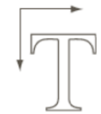
préserver les lignes et le parallélisme, mais pas nécessairement les distances et les angles

- $(x, y) = (v, w)T + (t_x, t_y)$; T : matrice 2 × 2, opération linéaire
- Formulation compacte

$$(x, y, 1) = (v, w, 1)\boldsymbol{T} \quad ; \quad \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{pmatrix}$$

Transformations géométriques usuelles

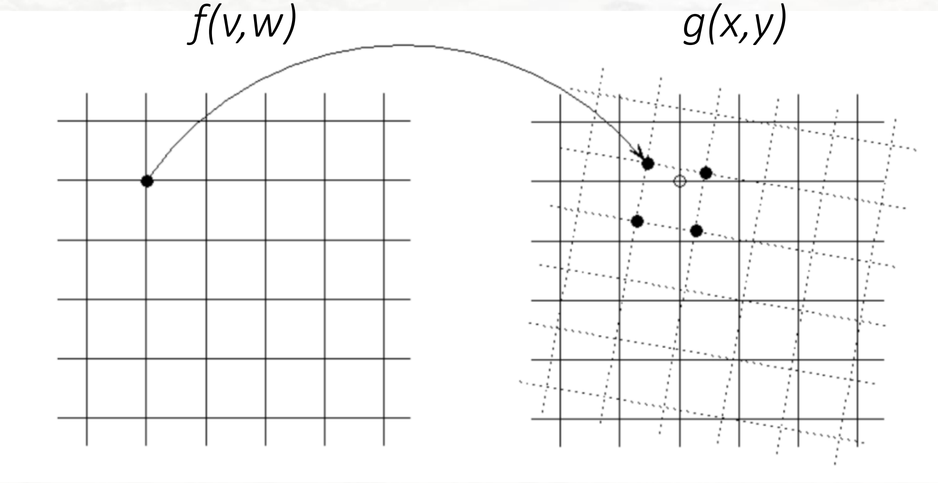
Principales transformations

Transformation Name	Affine Matrix, T	Coordinate Equations	Example
Identity	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = v$ $y = w$	
Scaling	$\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = c_x v$ $y = c_y w$	
Rotation	$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = v\cos\theta - w\sin\theta$ $y = v\cos\theta + w\sin\theta$	
Translation	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$	$x = v + t_x$ $y = w + t_y$	
Shear (vertical)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = v + s_v w$ $y = w$	
Shear (horizontal)	$\begin{bmatrix} 1 & s_h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x = v$ $y = s_h v + w$	

Mise en œuvre pratique (1)

Données du problème

- Transformation géométrique T : $\mathbb{R}^3$ —> $\mathbb{R}^3$
- Image de départ : $f\,(v\,,w)$ sur grille discrète
- Image transformée : $g\,(x\,,\,y)$ sur grille discrète



« Forward projection »

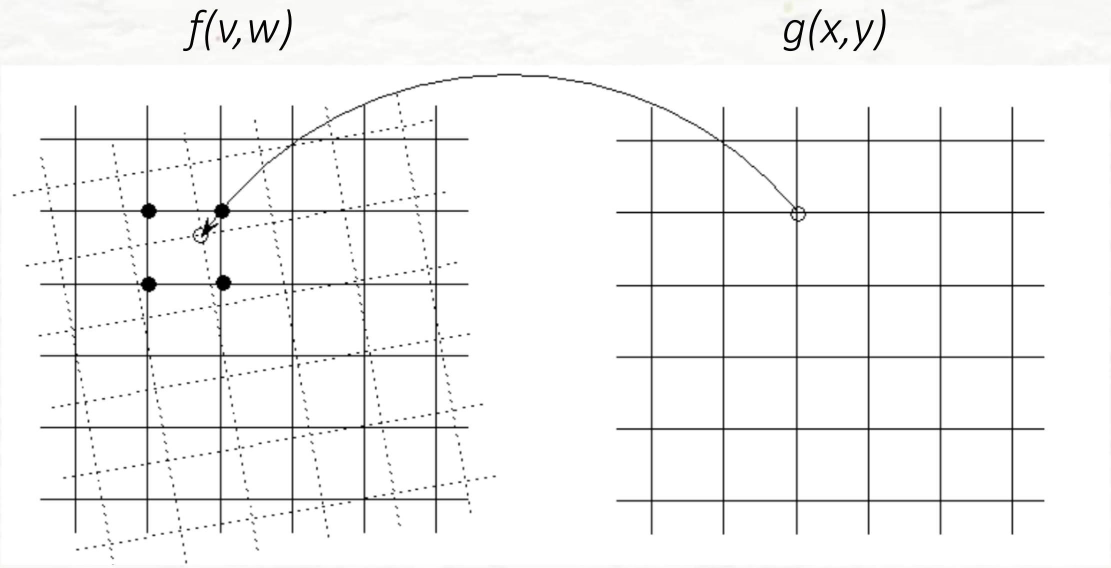
La recherche des points projetés les plus proches d'un point de grille donné
→ coûteux en termes de calcul

Nécessité d'interpoler pour assigner les nouvelles valeurs dans *g(x,y)*

Mise en œuvre pratique (2)

« Projection Inverse »

- La projection de la grille de *g(x,y)* dans le système de coordonnées de *f(v,w)*
- Maintient les valeurs connues de l'image, *f(v,w),* sur une grille régulière.
- Facile de trouver les points les plus proches pour chaque calcul d'interpolation.



Mise en œuvre pratique (2)

Étapes de l'interpolation

- On doit connaitre
  - les coordonnées $(v\,,w)$ dans l'image *de départ*
  - les coordonnées $(x\,,y)$ dans l'image *de transformée*

$$(x\,,\,y) = T(v\,,w)$$

- Effectuer l'interpolation dans l'image de départ → $f(v\,,\,w)$
- Affecter la valeur trouvée à l'image transformée : $g(x\,,\,y)$

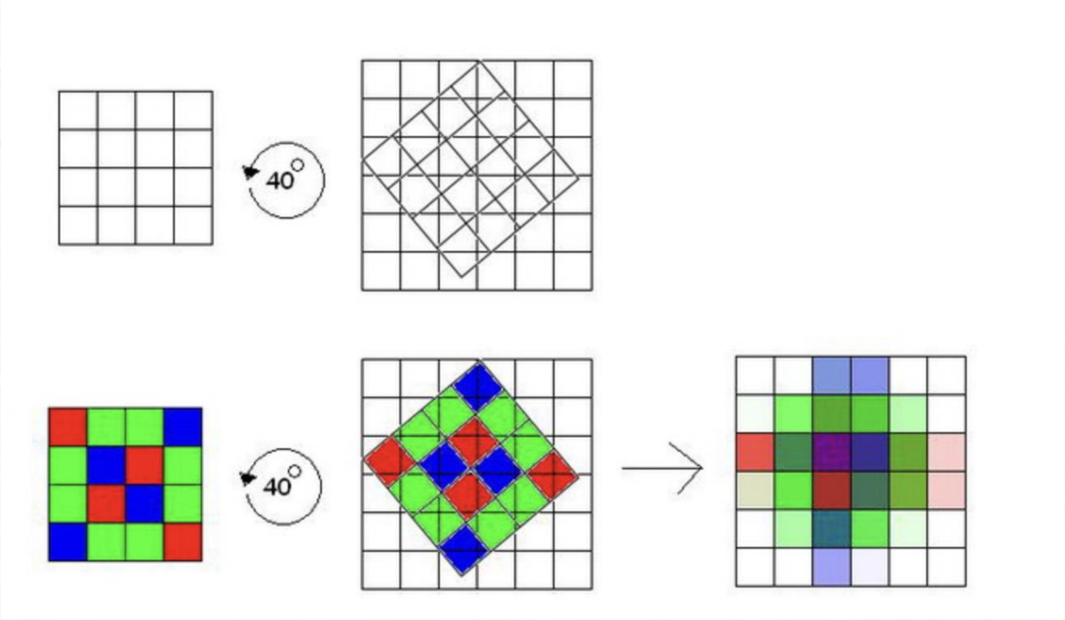
Interpolation: utiliser des données connues pour estimer des valeurs a d'autres endroits

Mise en œuvre pratique (2)

Types d'interpolation

- Plus proche voisin
- Interpolation bilinéaire (combinaison linéaire de quatre plus proches voisins)
- Interpolation bicubique (16 plus proches voisins)
- Formulation générale: $f(x, y) = \sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} a_{ij} v^i w^j$

bilinéaire: $I = J = 1$; bicubique : $I = J = 3$



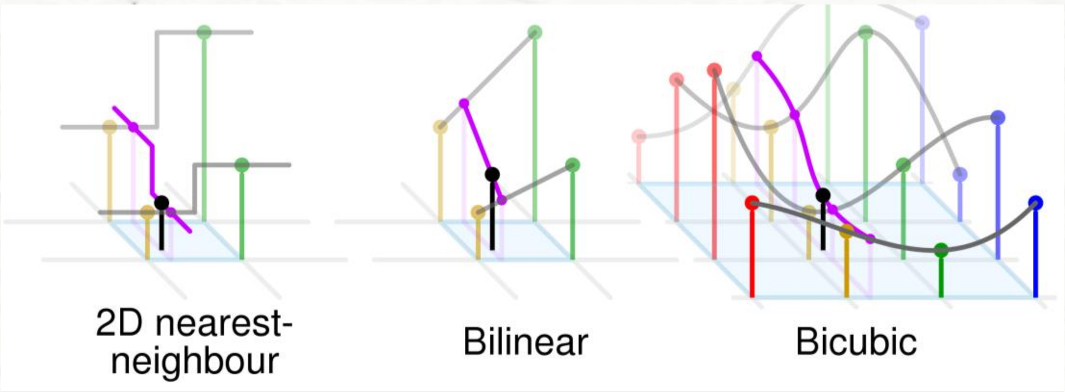
https://www.codeproject.com/Articles/12230/Anti-Aliased-Image-Rotation

Mise en œuvre pratique (2)

Types d'interpolation

- Plus proche voisin
- Interpolation bilinéaire (combinaison linéaire de quatre plus proches voisins)
- Interpolation bicubique (16 plus proches voisins)
- Formulation générale: $f(x, y) = \sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} a_{ij} v^i w^j$

  bilinéaire: $I = J = 1$; bicubique : $I = J = 3$



https://en.wikipedia.org/wiki/Nearest-neighbor_interpolation

https://support.cognex.com/

Interpolation : exemple

Changement de résolution : 1250 —> 150 dpi

Plus proche voisin   Bilinéaire   Bicubique

Notions élémentaires

1. Topologie sur une image
2. Notion d'opération
3. Opérations arithmétiques et logiques
4. Transformations géométriques
5. $\boxed{\text{Transformations portant sur l'intensité}}$

Transformations portant sur l'intensité

Une image —> une image de même taille

Types de transformations

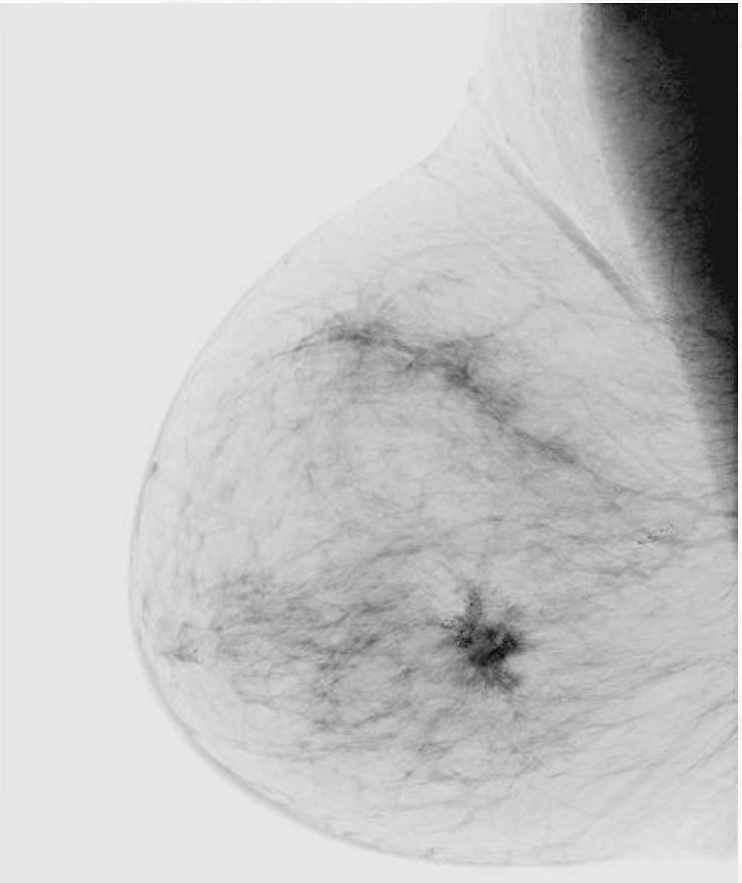
- Transformations portant sur les pixels « un à la fois »
- Transformations impliquant un voisinage
- Transformations impliquant l'ensemble de l'image

Transformations portant sur les pixels « un à la fois »

- $\forall(x, y) \ : \ g(x, y) = T\left(f(x, y)\right);$
- $\boldsymbol{T}$: Fonction scalaire quelconque. $T : \mathbb{R} \text{—>} \mathbb{R}$

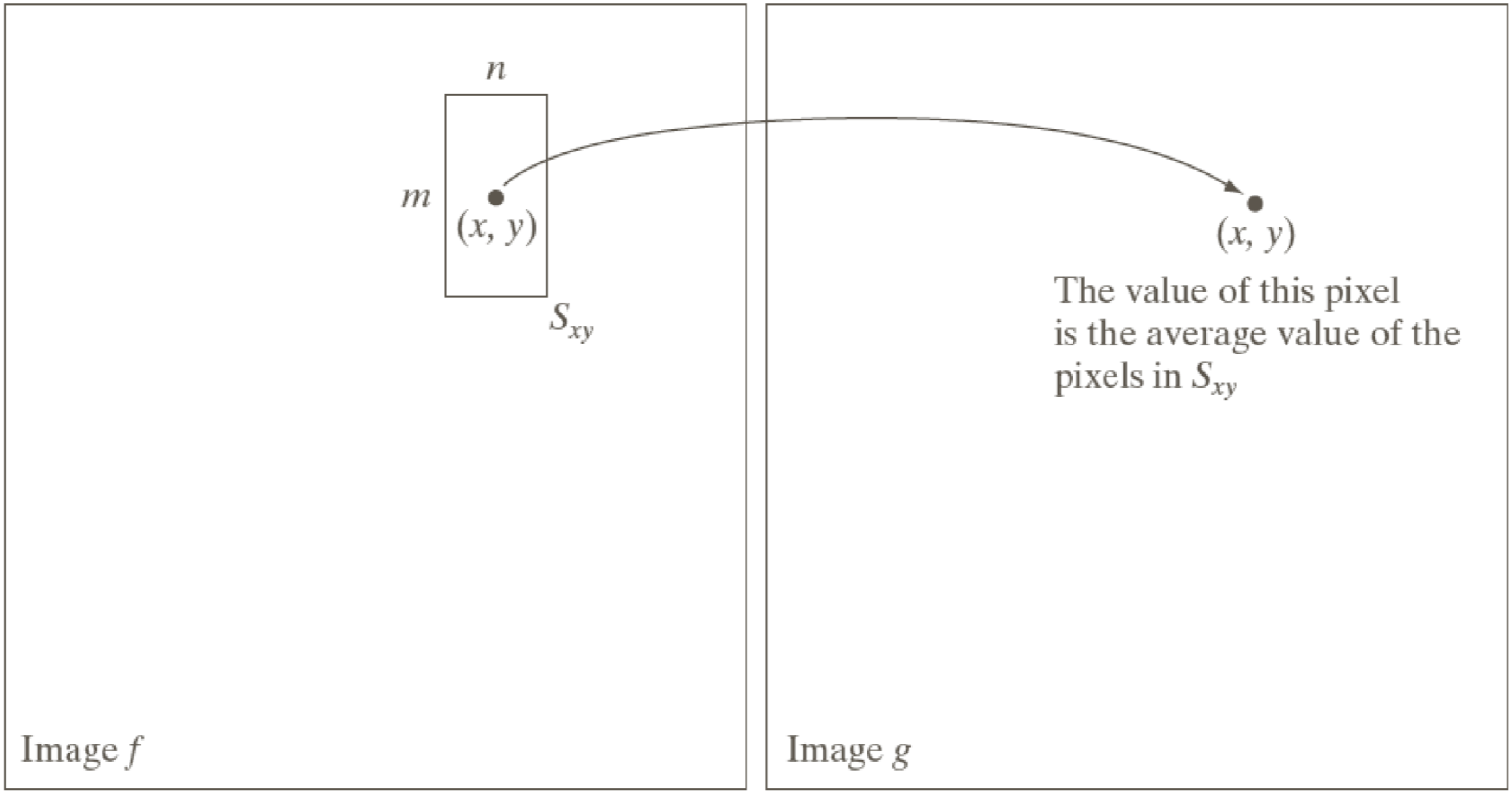
Transformations portant sur les pixels « un à la fois »

Exemple: négatif d'un mammogramme



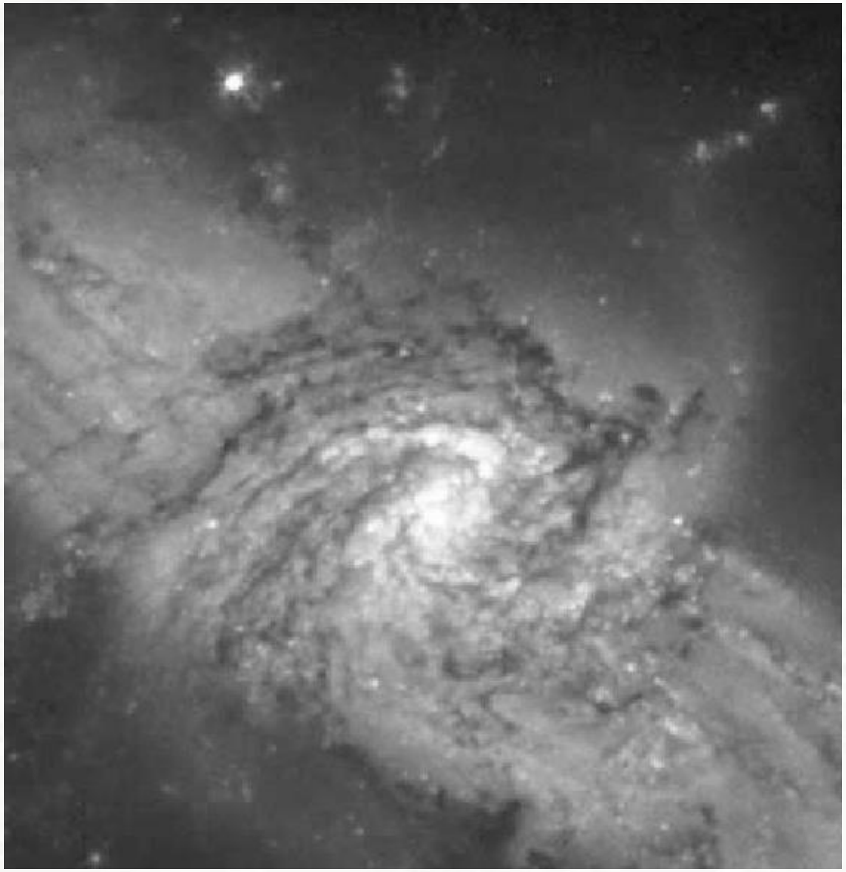
Transformations impliquant un voisinage

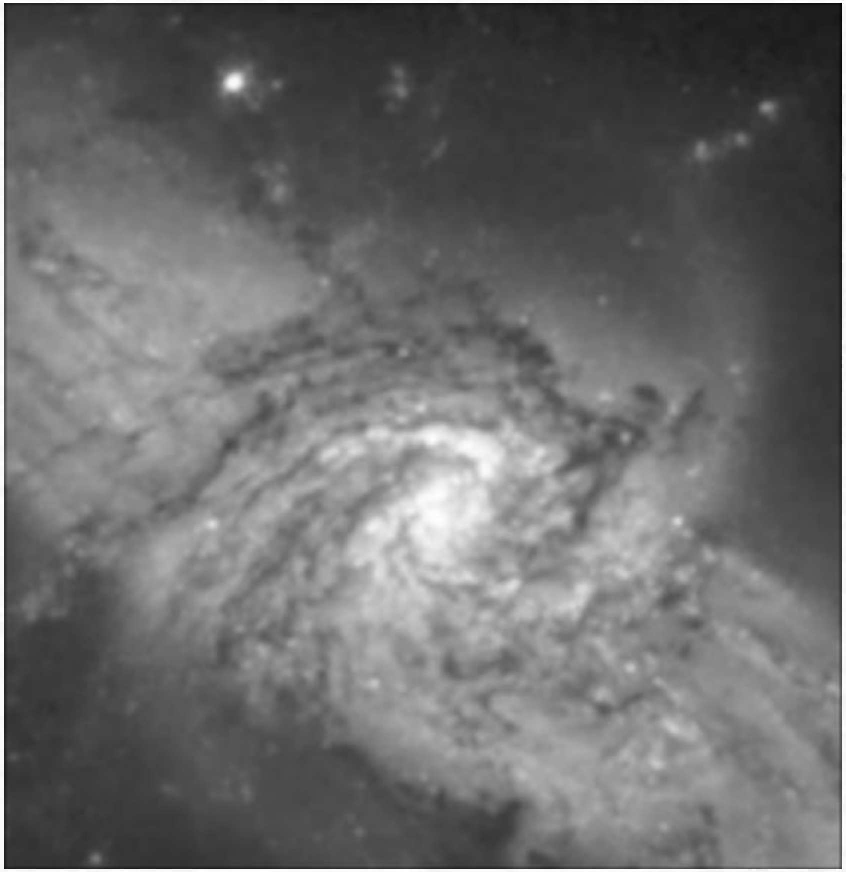
Principe



Transformations impliquant un voisinage

Exemple: moyennage *sur un voisinage*





Transformations impliquant l'ensemble de l'image

Transformations usuelles

- Transformations linéaires (convolution, projection, ...)
- « Transformées »
  - généralement : linéaires
  - généralement : discrétisation d'un opérateur intégral

Transformations linéaires : formulation générale

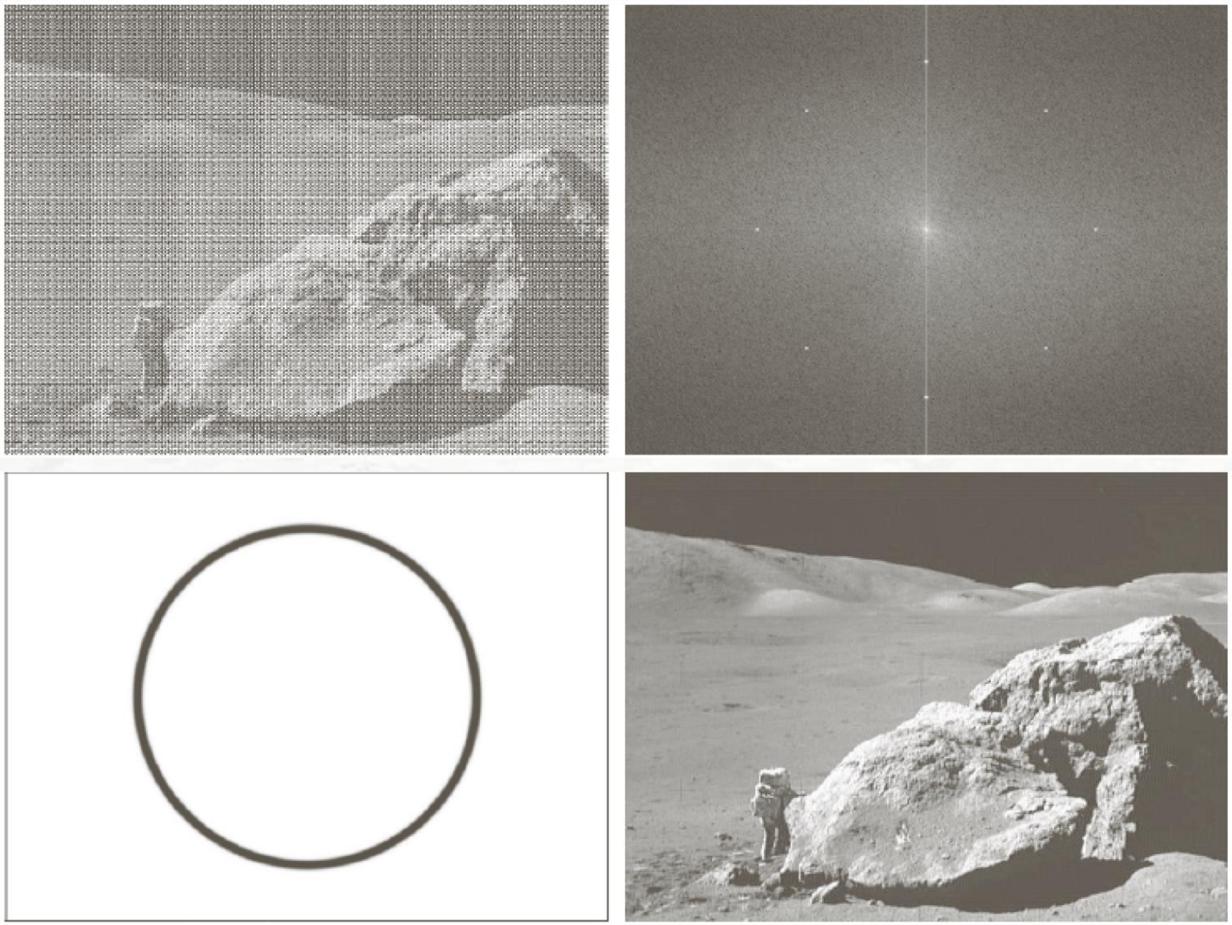
- Transformées linéaires : peuvent s'exprimer sous forme matricielle.
- Images f, g : rangées dans des vecteurs $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$
- Transformation : équation matricielle $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f}$

Remarques

- Les images f et g ne sont pas nécessairement de même taille
- Les images f et g ne sont pas nécessairement de même nature

Transformations impliquant l’ensemble de l’image

Utilisation de la transformée de Fourier (détramage)



Notions élémentaires

1. Topologie sur une image
2. Notion d’opération
3. Opérations arithmétiques et logiques
4. Transformations géométriques
5. Transformations portant sur l’intensité

Amélioration dans le domaine spatial

6. Transformations « pixel par pixel »

- Transformations élémentaires
- Modifications de l’histogramme

7. Transformations utilisant la notion de voisinage (filtrage)

- Notions de filtrage 2D
- Adoucissement (“*smoothing*”)
- Affinage (“*sharpening*”)

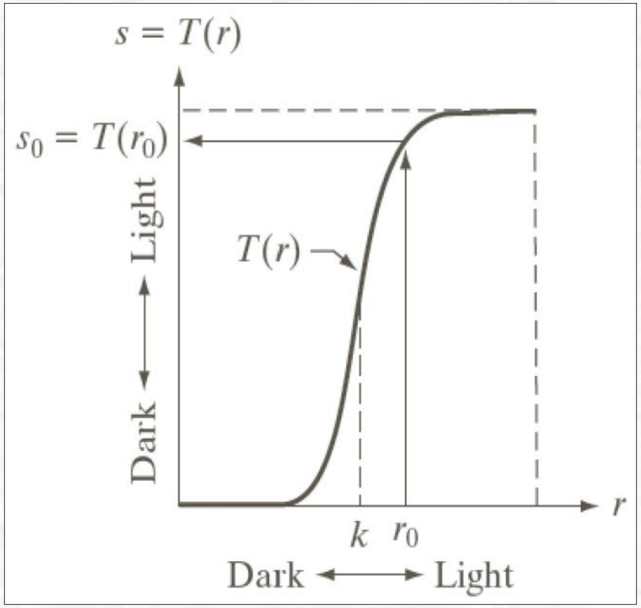
Transformations « pixel par pixel »

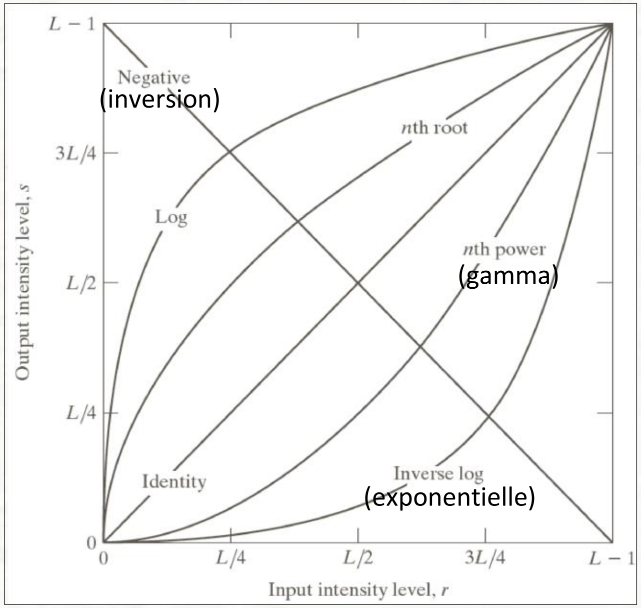
Rappel

- $g(x, y) = T\big(f\,(x, y)\big)$ appliquée à tous les pixels de l'image
- Choix de la fonction T ?

Transformations classiques

Principales transformations





- Augmentation de contraste
- Inversion
- Transformation gamma
- Transformation logarithmique
- Transformation exponentielle
- Transformations *ad hoc*

Transformations classiques

Objectifs

- Ramener les intensités d'intérêt au centre de la plage de niveaux de gris
- « Étaler » la gamme des intensités d'intérêt

Précaution utile

Mettre à l'échelle l'image sur l'intervalle [0 , 1]

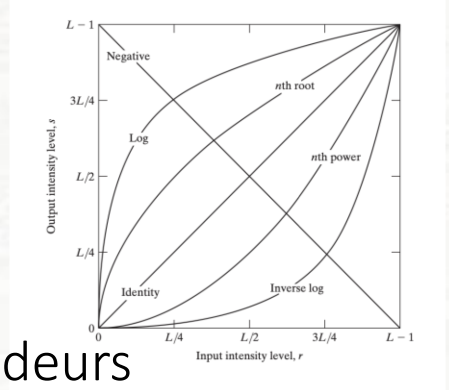
Principales transformations

- Inversion : $T(r) = 1 - r$
- Transformation gamma : $T(r) = r^{\gamma}$
- Transformation logarithmique : $T(r) = \ln(1 + r)/\ln(2)$
- Transformation exponentielle : $T(r) = e^{r \ln(2)} - 1$

Transformations classiques

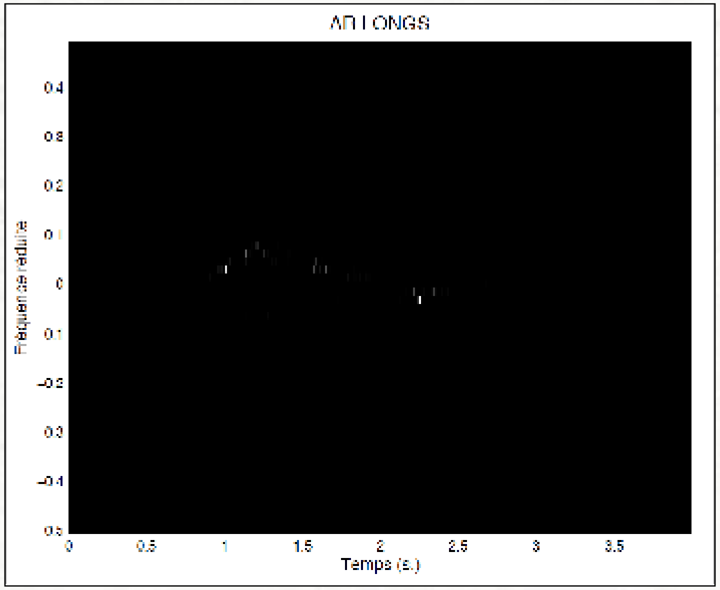
Justification

Transformation logarithmique

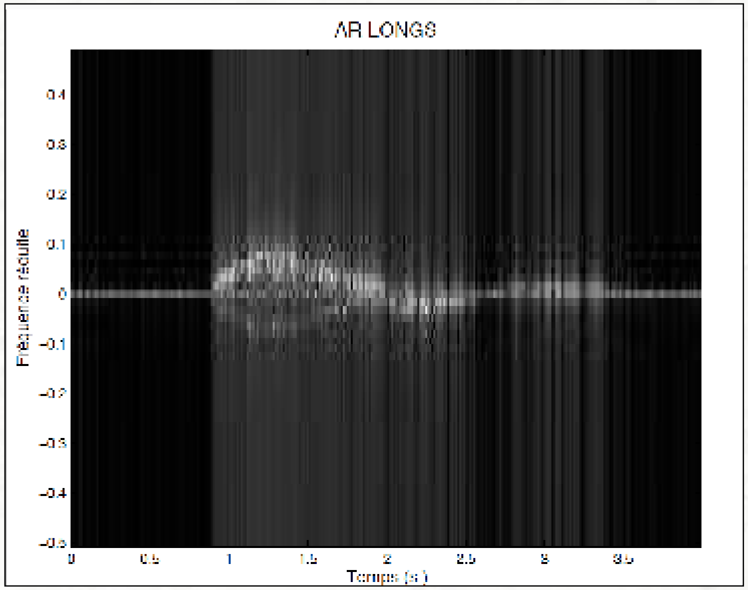


Certains traitements conduisent naturellement à des grandeurs exponentielles

Analyse spectrale du signal Doppler



Échelle linéaire

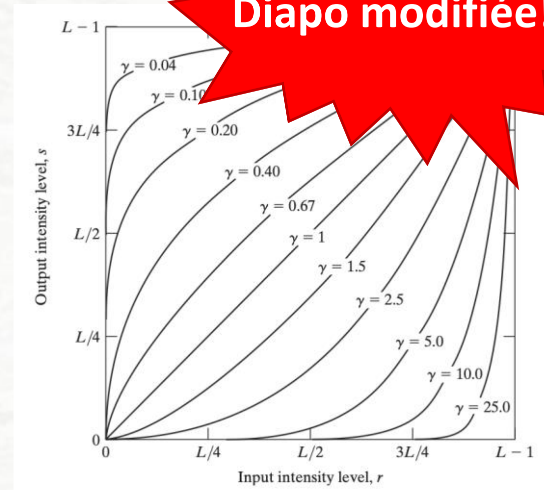


Échelle logarithmique

Transformations classiques

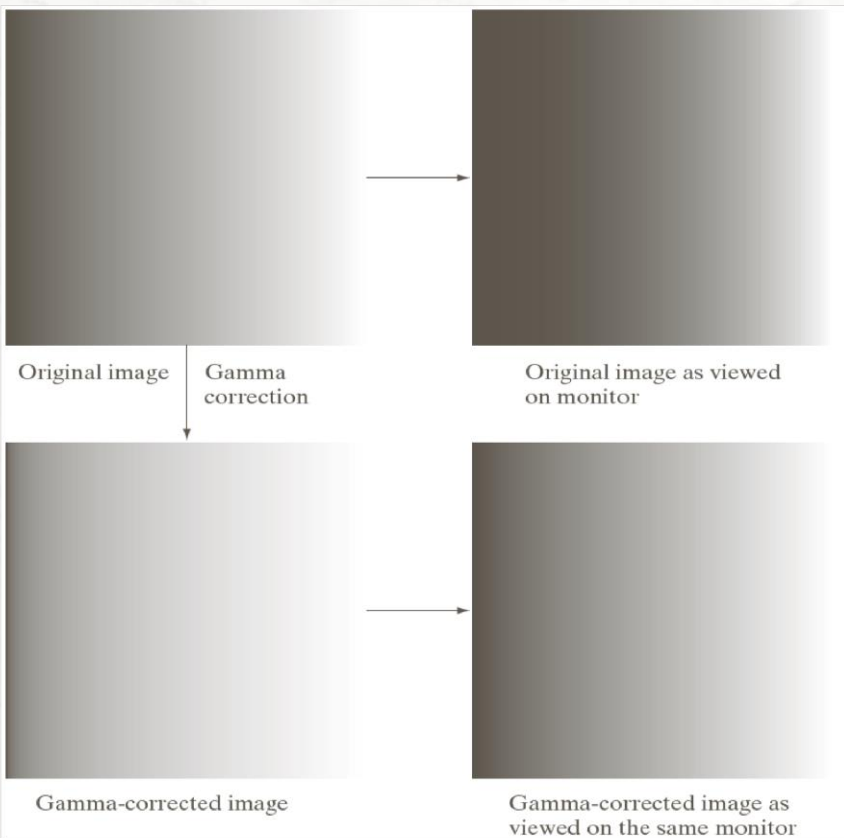
Justification

Diapo modifiée!



Transformation gamma

Origine: caractéristiques des moniteurs



Effets de γ:

•γ<1 (compression des hautes intensités) :

- Accentue les zones claires.
- Utile pour compenser des images sous-exposées.

•γ>1 (compression des basses intensités) :

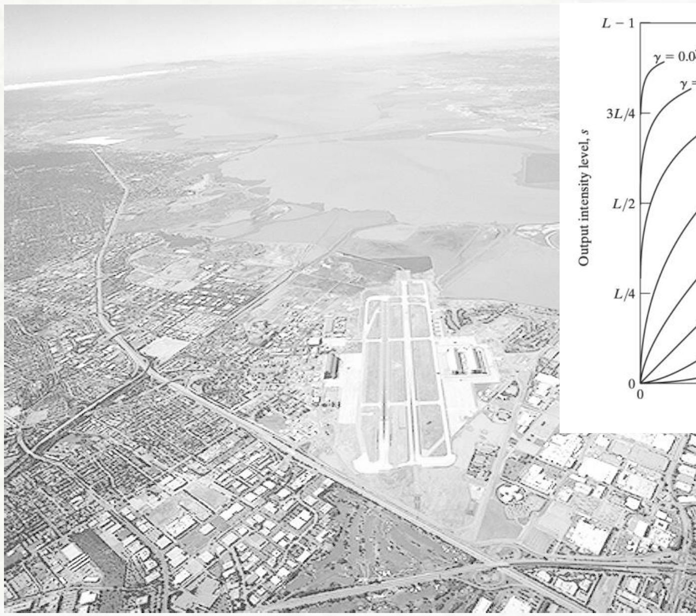
- Accentue les zones sombres.
- Utile pour compenser des images surexposées.

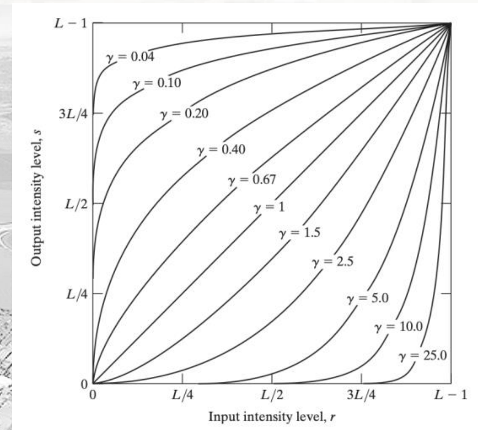
•γ=1 :

•Aucun changement (relation linéaire).

Transformation gamma

Exemple d'utilisation





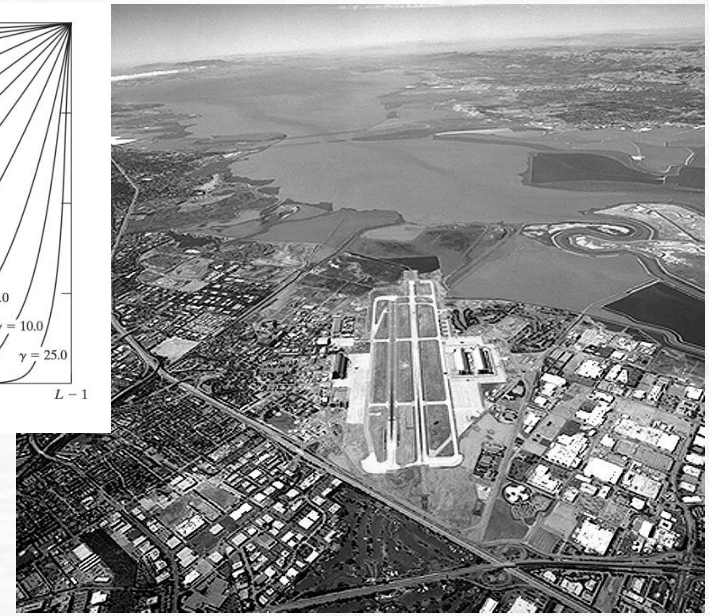


Image originale

Image transformée, $\gamma\ = 4$

slido

slido

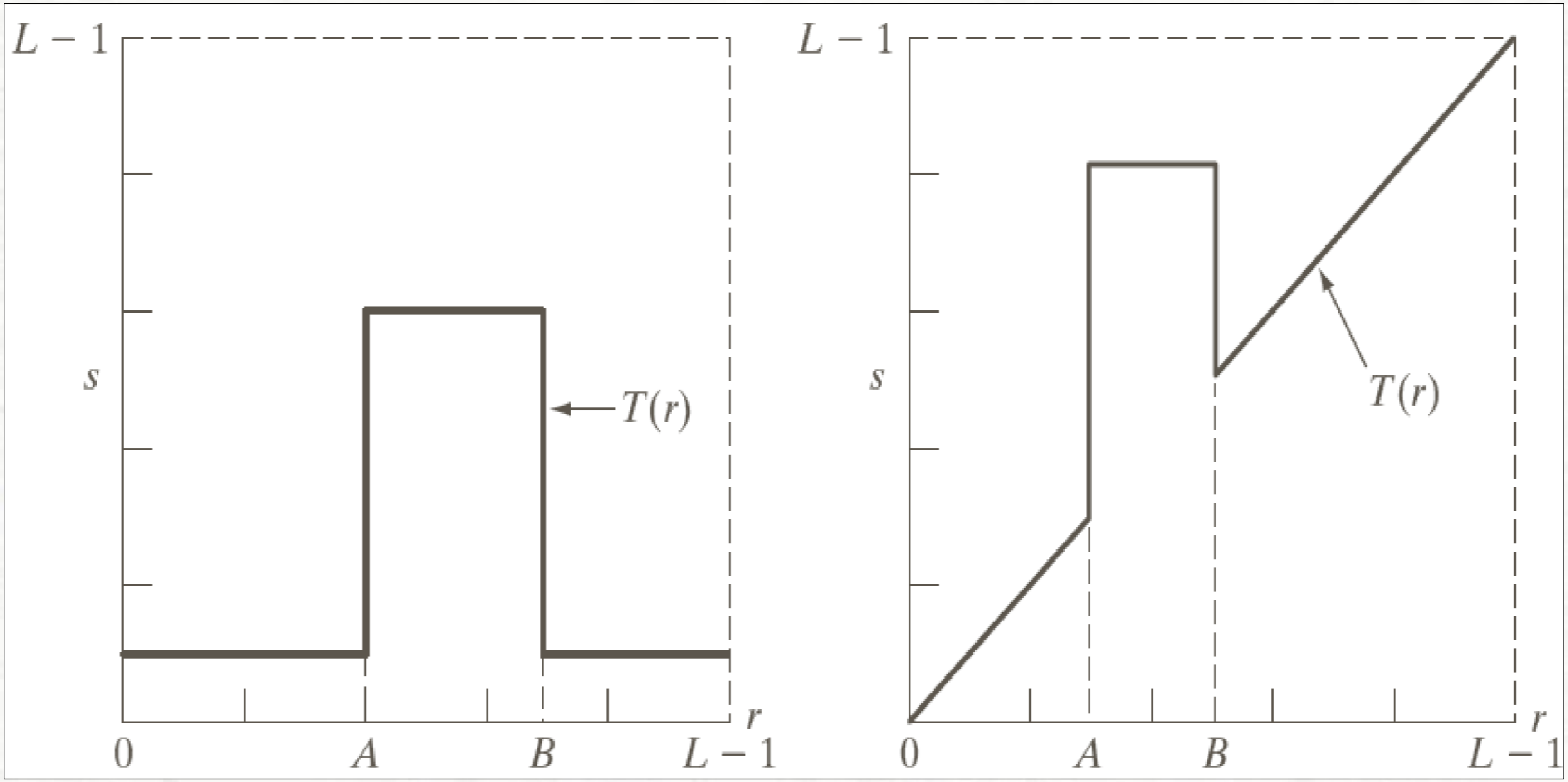
Please download and install the Slido app on all computers you use

Est-ce que la valeur de gamma devrait être plus grande ou plus petite que 1?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Transformations *ad hoc*

Mise en évidence de plages particulières de niveaux de gris



Transformations sur l'intensité

<u>Transformation *ad hoc:*</u> *"Bit plane slicing"*

- éliminer certains bits
- réduction du nombre de niveaux de quantification

<u>Dénominateur commun</u>

- Manipulation de l'histogramme
- Approche générale?

Histogramme d'une image

Définition

- Image de taille (M, N) définie sur L niveau r_k , $0 \leq k \leq L - 1$
- Histogramme : $p(r_k) = n_k / MN$; n_k : nombre de pixels de valeur r_k
- Interprétation : « distribution de probabilité » de la valeur des pixels

Histogramme et aspect de l'image

- Lien: https://github.com/evaalonsoortiz/ELE8812-demos
  - Leçon_2_Demo_Hist.ipynb

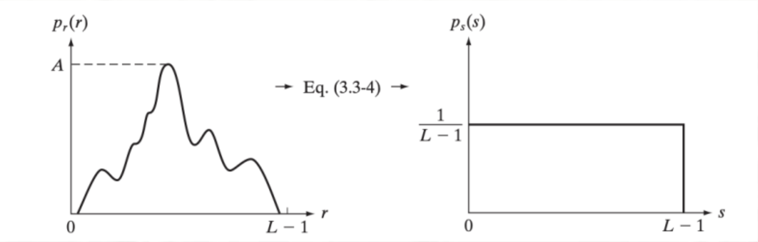
Caratéristiques désirables

- Couverture de tous les niveaux
- Distribution uniforme —> Égalisation d'histogramme

Égalisation d'histogramme

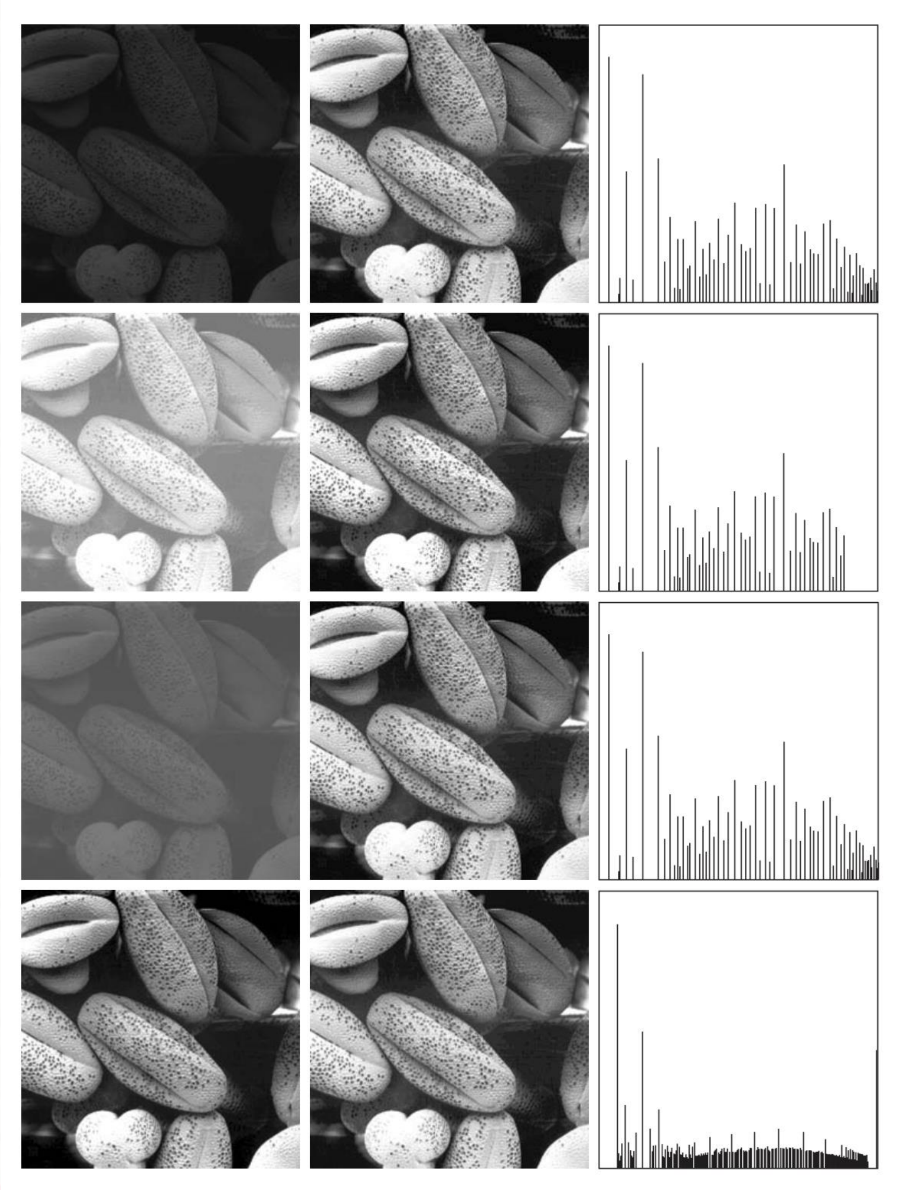
Principaux résultats

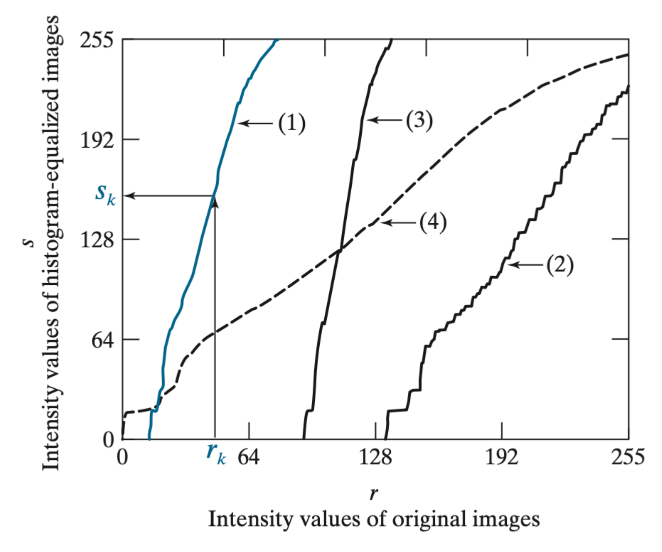
- Transformation $s = T(r)$ tel que l'histogramme de l'image transformée soit plat



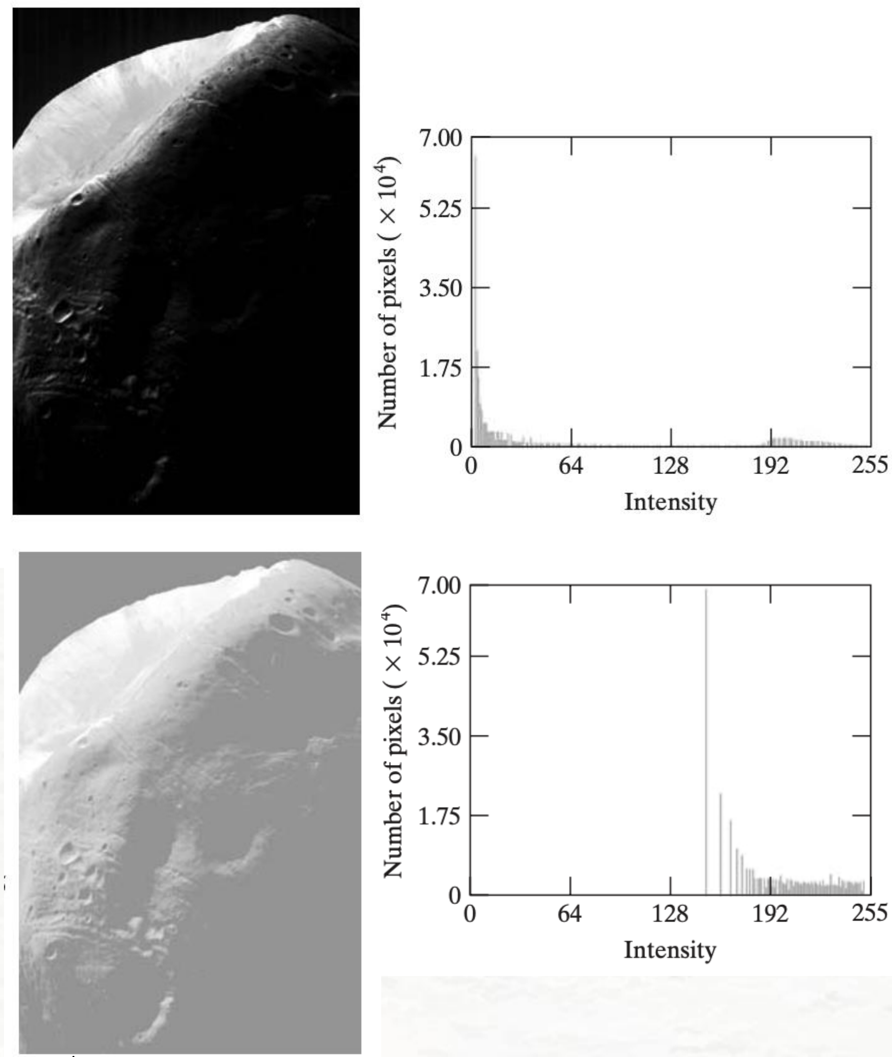
- Relation fondamentale : $p_S(s)ds = p_R(r)dr$
- Cadre continu : $s = T(r) = (\mathrm{L}-1)\int_0^r p_R(u)du$
- Cadre discret: $s_k = T(r_k) = \text{round}\left(\frac{L-1}{MN}\sum_{j=0}^{k} n_j\right)$

Égalisation d'histogramme





Égalisation d'histogramme



Spécification d'histogramme

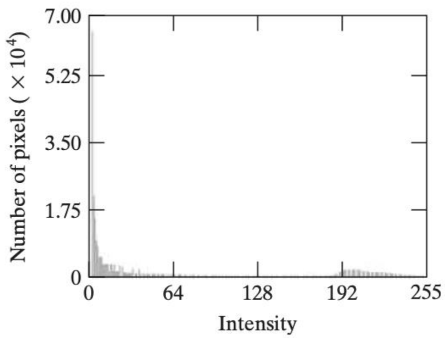
Démarche

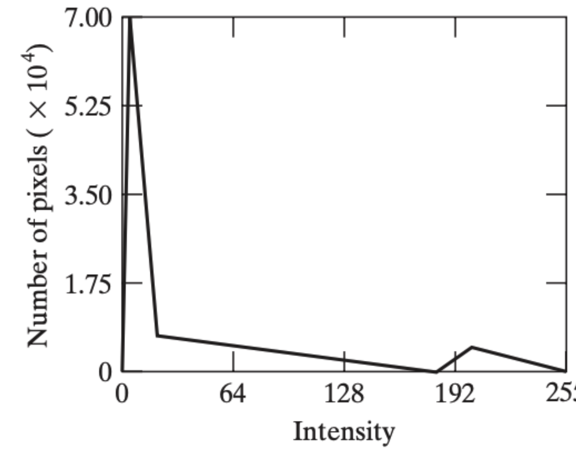
- $p_r(r)$: histogramme de l'image
- $p_z(z)$: histogramme désiré
- $s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)dw$ (histogramme non-uniforme)
- $G(z) = (L-1)\int_0^r p_z(t)dt = s$ (histogramme uniforme)
- $z = G^{-1}[T(r)] = G^{-1}(s)$
- Niveaux discrets: G non inversible. On choisit par convention le niveau le plus petit.

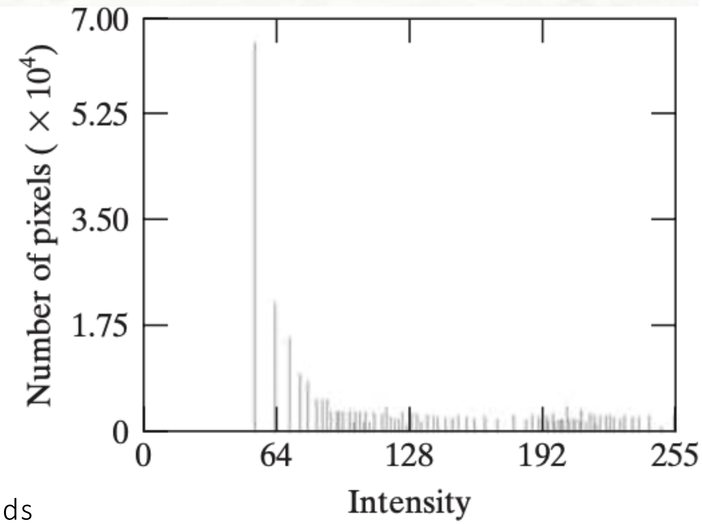
En pratique

- Délicat à manipuler
- Importance d'une bonne couverture de l'echelle de niveaux de gris
- Autres possibilités (traitements locaux).

Égalisation d’histogramme







Égalisation d’histogramme

Problème:

- Image avec 3 bits (L = 8), de taille 64 x 64

r_k	n_k
$r_0 = 0$	790
$r_1 = 1$	1023
$r_2 = 2$	850
$r_3 = 3$	656
$r_4 = 4$	329
$r_5 = 5$	245
$r_6 = 6$	122
$r_7 = 7$	81

slido

- Quelles sont les valeurs d’intensité correspondantes dans l’image obtenue par égalisation d’histogramme (arrondi au nombre entier suivant) ?
  - $s = T(r)$
  - $s_0 = ?, s_1 = ?, s_2 = ?, s_3 = ?, s_4 = ?, s_5 = ?, s_6 = ?, s_7 = ?$

slido

Please download and install the Slido app on all computers you use

Egalisation d'histogramme: s0=?, s1=?, s2=?, s3=?, s4=?, s5=?, s6=?, s7=?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Égalisation d'histogramme

Problème:

- Image avec 3 bits (L = 8), de taille 64 x 64

r_k	n_k
$r_0 = 0$	790
$r_1 = 1$	1023
$r_2 = 2$	850
$r_3 = 3$	656
$r_4 = 4$	329
$r_5 = 5$	245
$r_6 = 6$	122
$r_7 = 7$	81

slido

- Quelle sont les valeurs de la distribution de probabilité de s?
  - $p_s(0) = ?, p_s(1) = ?, p_s(2) = ?, p_s(3) = ?, p_s(4) = ?, p_s(5) = ?, p_s(6) = ?, p_s(7) = ?$

slido

Please download and install the Slido app on all computers you use

ps(0)=?, ps(1)=?, ps(2)=?, ps(3)=?, ps(4)=?, ps(5)=?, ps(6)=?, ps(7)=?,

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Amélioration dans le domaine spatial

6. **Transformations « pixel par pixel »**
   - Transformations élémentaires
   - Modifications de l'histogramme

7. **Transformations utilisant la notion de voisinage (filtrage)**
   - Notions de filtrage 2D
   - Adoucissement (“*smoothing*”)
   - Affinage (“*sharpening*”)

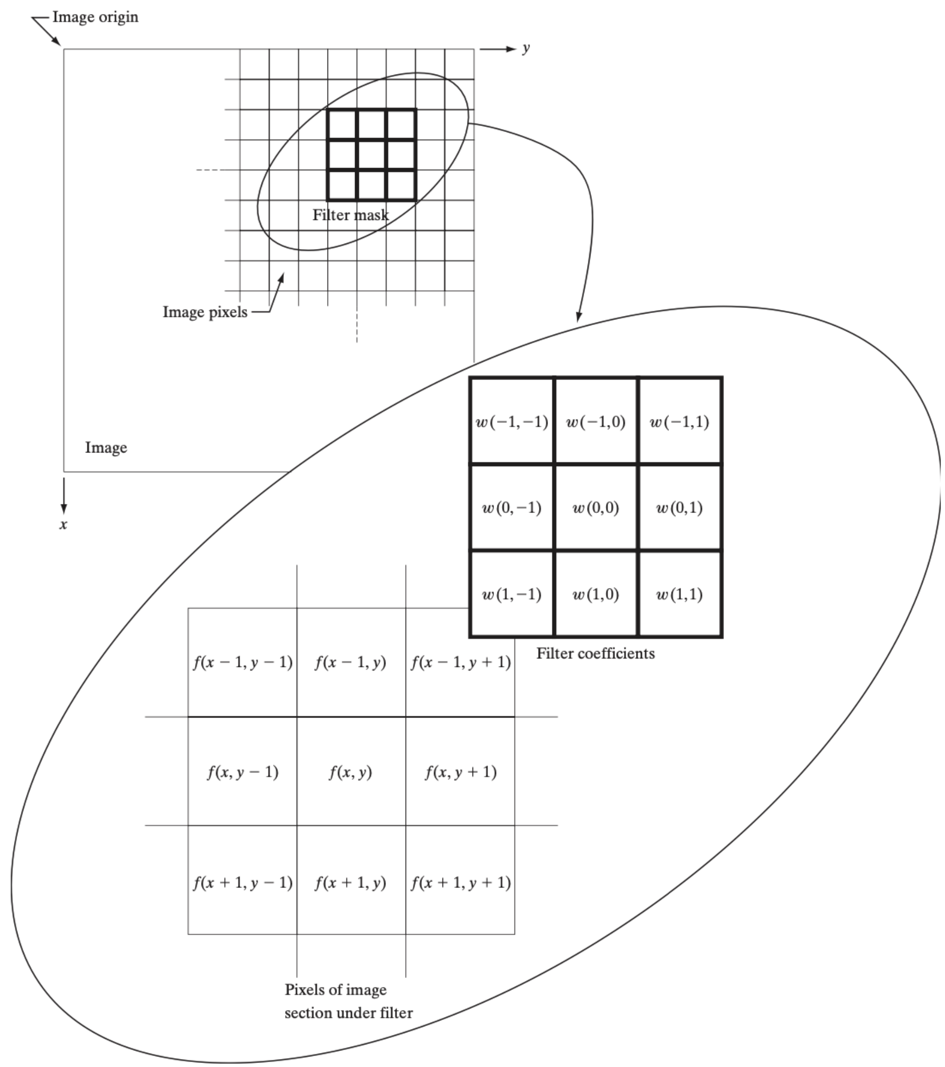
Notions de filtrage 2D

Filtrage :

passer, modifier ou rejeter certaines fréquences d'une image

Filtre spatial :

modifie une image en remplaçant la valeur de chaque pixel par une fonction qui acte sur le pixel est ses voisins



Notions de filtrage 2D

<u>Forme classique d'un filtre en traitement d'images</u>

- Choix d'un voisinage (d'une taille de fenêtre)
- Choix d'un opérateur (linéaire ou non) sur les éléments du voisinage
- Parcours de l'image

Notions de filtrage 2D

Ajouter les propriétés de la convolution

Convolution ou corrélation

- Corrélation : déplacement d'un filtre et calcul de la somme de la multiplication du filtre et l'image à chaque endroit (« *sliding sum of products* »)

$$w(x,y) \star f(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t)$$

- Convolution : même procédure, mais avec une rotation de 180^0 du filtre

$$w(x,y) \bigstar f(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x-s, y-t)$$

Convolution → filtrage linéaire spatiale

Adoucissement (“*smoothing*”)

Filtres linéaires

$$\frac{1}{9} \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \frac{1}{16} \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

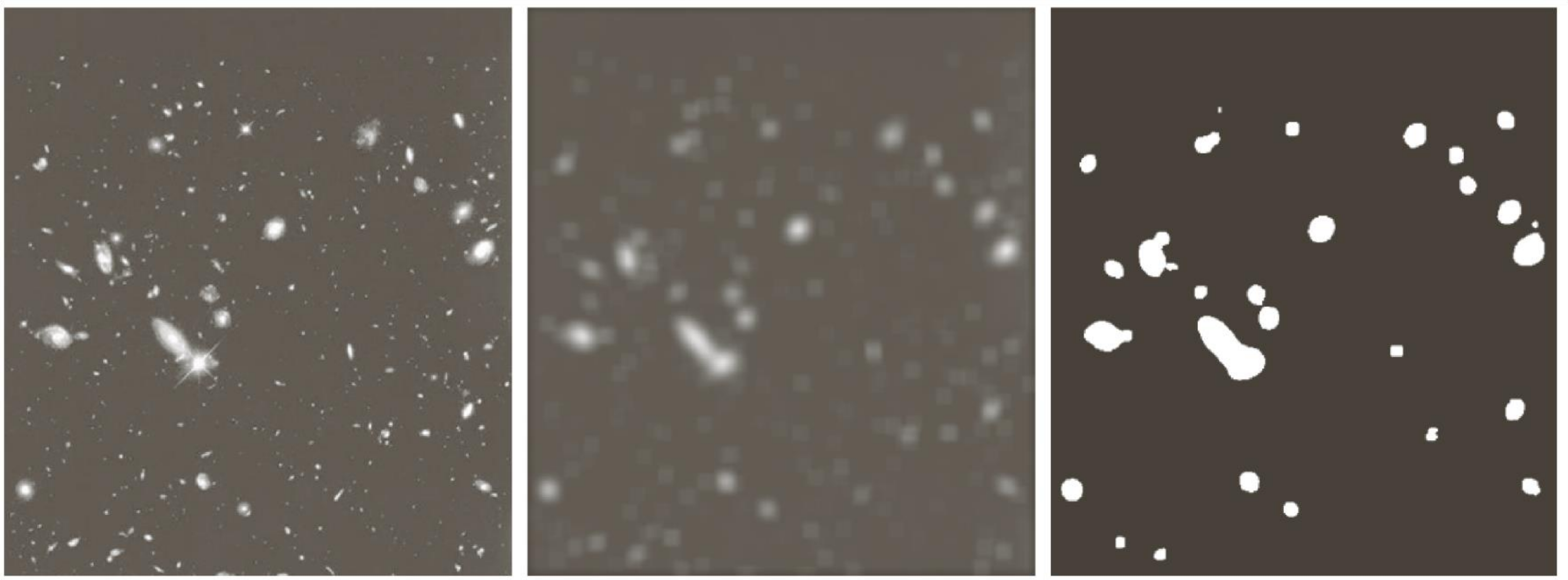
Moyenne Moyenne pondérée

Points ouverts

- Taille du voisinage
- Choix des coefficients (stratégie générale?)

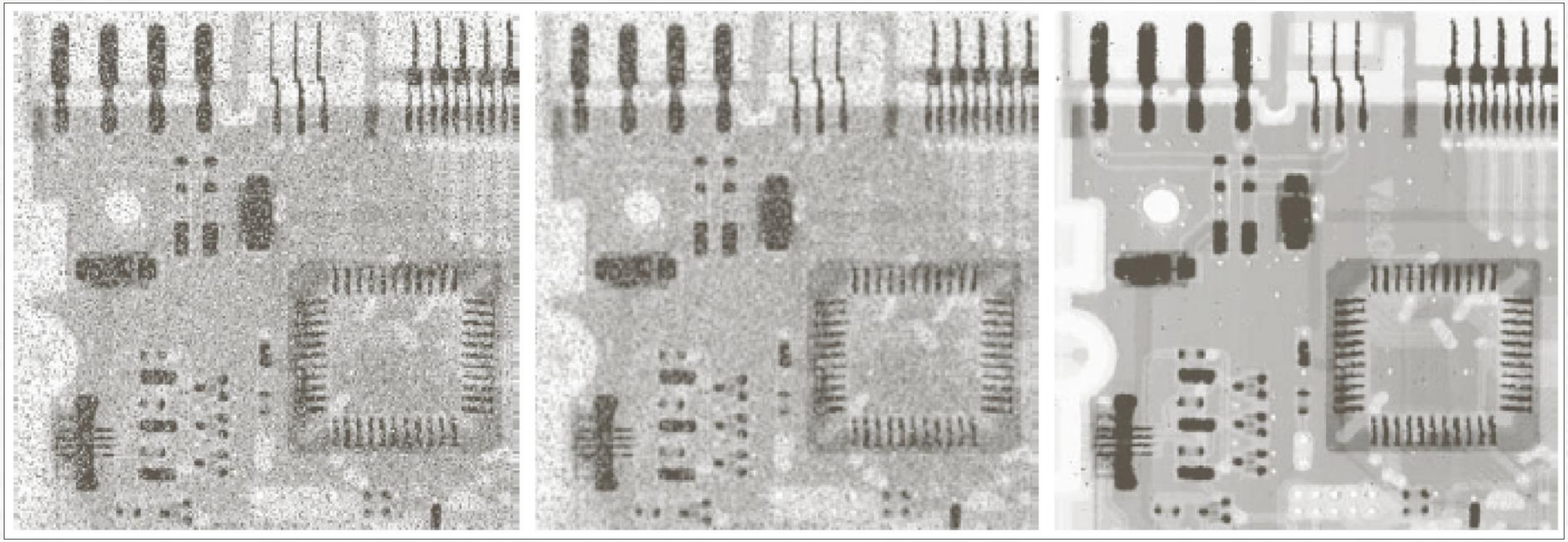
Adoucissement (“*smoothing*”)

Filtre linéaire : exemple



Adoucissement (“*smoothing*”)

Filtre non linéaire : filtre médian



- Efficace pour certains types de bruits (e.g., impulsionnel)
- Généralisations : filtres à percentile

Affinage (“*sharpening*”)

Rehaussement des contours

- Convolution
- Contours : mis en évidence par le laplacien
- Approximations discrètes du laplacien

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

1	1	1
1	−8	1
1	1	1

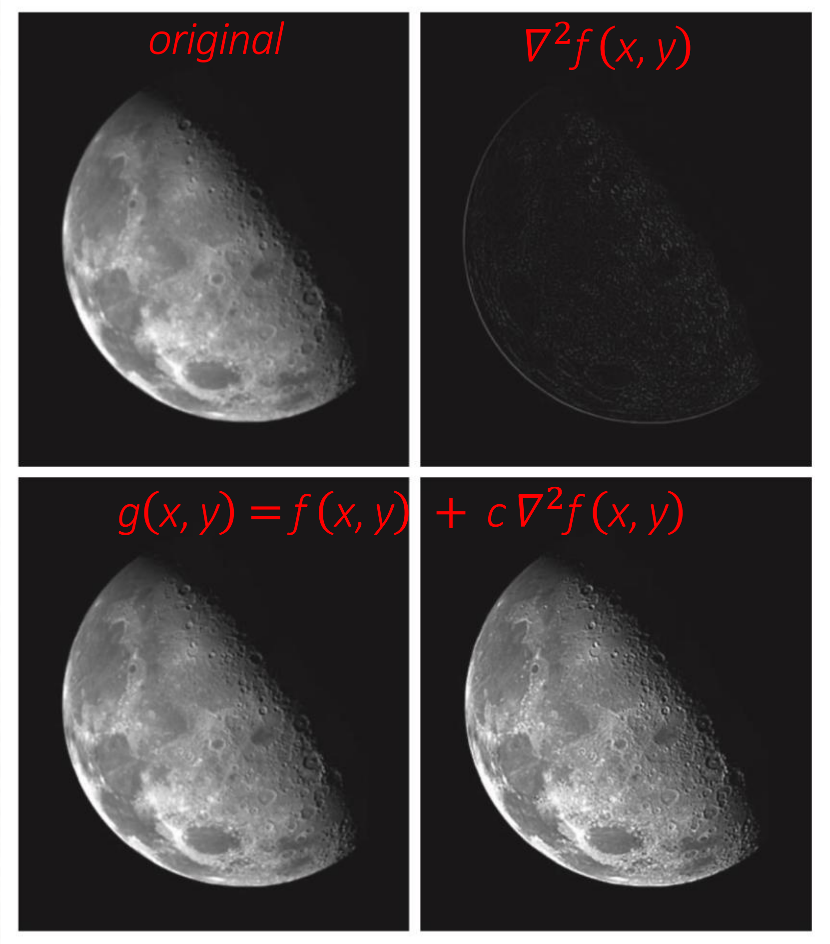
- Pour obtenir l’image rehaussée:

$$g(x, y) = f(x, y) + c\,\nabla^2 f(x, y)$$

Affinage ("*sharpening*")

Rehaussement des contours : exemple

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

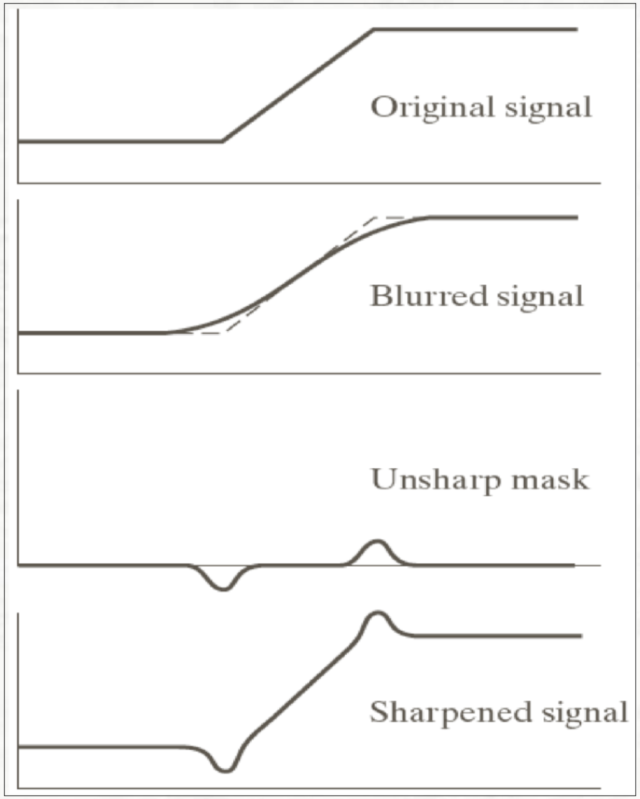


1	1	1
1	−8	1
1	1	1

Affinage (“*sharpening*”)

Masque flou

Principe



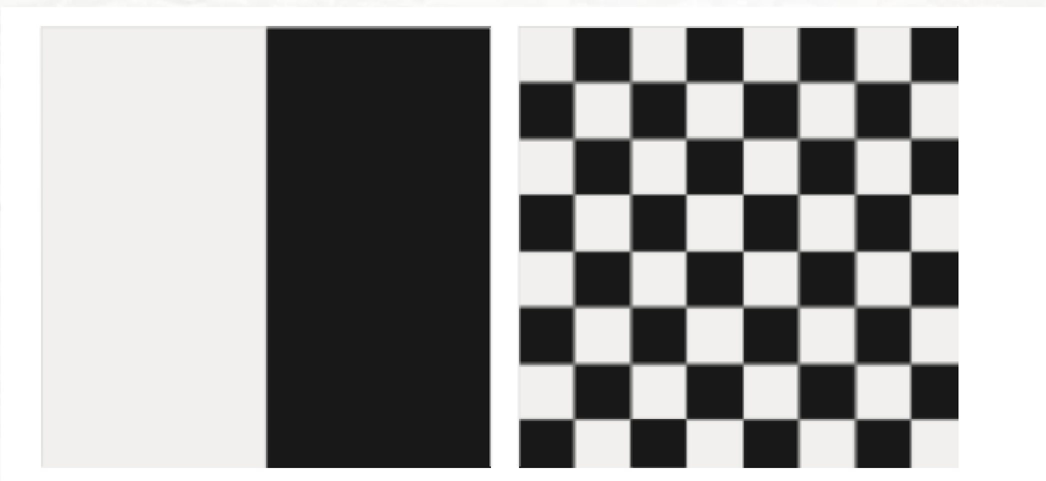
$$g_{\text{mask}}(x,y) = f(x,y) - \bar{f}(x,y)$$

$$g(x,y) = f(x,y) + k\,g_{\text{mask}}(x,y)$$

Exemple

Question

Les deux images présentées sont très différentes, mais leurs histogrammes sont identiques. Supposons que chaque image sera filtrée avec un filtre moyenneur de taille 3 x 3. Est-ce que les histogrammes des images filtrées seront pareils?



slido

Please download and install the Slido app on all computers you use

Les deux images présentées sont très différentes, mais leurs histogrammes sont identiques. Supposons que chaque image sera filtrée avec un filtre moyenneur de taille 3 x 3. Est-ce que les histogrammes des images filtrées seront pareils?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Améliorations dans le domaine spatial

Autres approches

Affinage

- Utilisation du gradient plutôt que du laplacien
- Plus délicat (plus de calculs)
- Problèmes d’anisotropie

Combinaison de traitements

- Indispensable en pratique