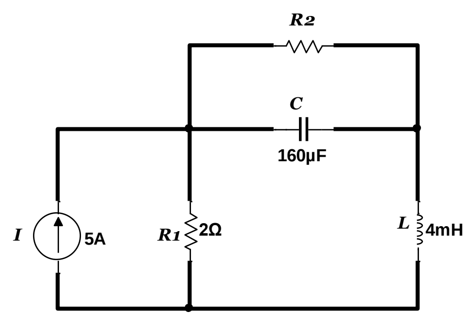
Corrigé Devoir 4 ELE 1409

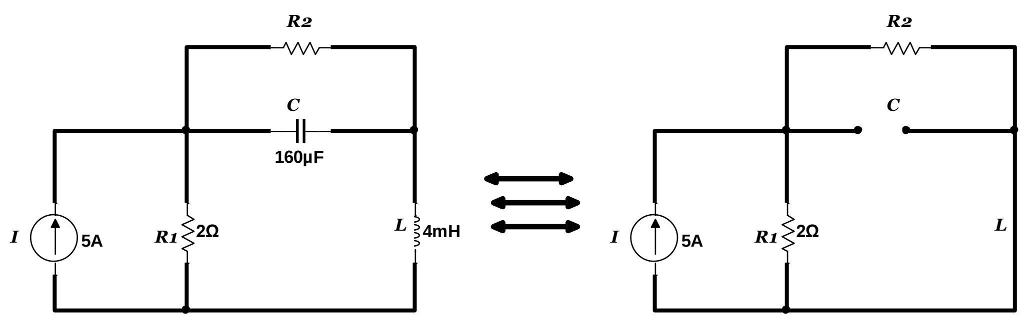
Question 1 (**2 points**)

Pour le circuit ci-dessous, calculer la valeur de la résistance R_2 pour laquelle l'énergie emmagasinée par le condensateur est égale à l'énergie emmagasinée par la bobine. On rappelle que le circuit est alimenté en courant continu.



Réponse

Pour une alimentation en courant continu, le circuit équivalent de ce montage est le suivant :



On rappelle également que l'énergie stockée par le condensateur et l'inductance sont respectivement définies comme suit :

$$\begin{cases} W_C = \dfrac{1}{2} C V_C^2 \\ W_L = \dfrac{1}{2} L I_L^2 \end{cases}$$

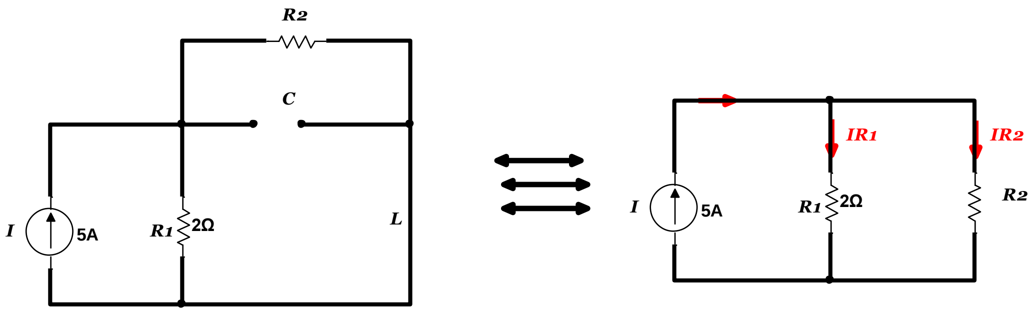
Avec le circuit équivalent, on identifie que :

- la tension aux bornes du condensateur est égale à celle aux bornes de la résistance R_2,
- le courant dans la bobine L est le même qui parcourt la résistance R_2.

Ainsi les formules de l'énergie stockée deviennent alors :

$$\begin{cases} W_C = \dfrac{1}{2} C V_{R_2}^2 \\ W_L = \dfrac{1}{2} L I_{R_2}^2 \end{cases} \quad (1)$$

Le circuit équivalent en régime continu permet d'établir la parcourt ci-dessous pour le courant :



Pour ce circuit, on peut écrire les relations suivantes :

- loi des nœuds

$$I = I_{R_1} + I_{R_2} \quad \Leftrightarrow \quad I_{R_1} = I - I_{R_2} \quad (2)$$

- loi des mailles

$$V_{R_1} = V_{R_2} \;\Leftrightarrow\; R_1.I_{R_1} = R_2.I_{R_2} \quad (3)$$

En substituant l'équation (2) dans l'équation (3), on obtient :

$$R_1.\left(I - I_{R_2}\right) = R_2.I_{R_2} \Leftrightarrow I_{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, I \quad \Leftrightarrow \quad I_{R_2} = \frac{10}{2 + R_2} \qquad (4)$$

En substituant cette expression de I_{R_2} dans l'équation (2), on obtient :

$$V_{R_2} = R_2.I_{R_2} = \frac{10.R_2}{2 + R_2} \qquad (5)$$

En considérant à présent les équations (4) et (5), les énergies stockées deviennent :

$$\begin{cases} W_C = \dfrac{1}{2} C \left(\dfrac{10.R_2}{2 + R_2}\right)^2 \\ W_L = \dfrac{1}{2} L \left(\dfrac{10}{2 + R_2}\right)^2 \end{cases}$$

Ainsi :

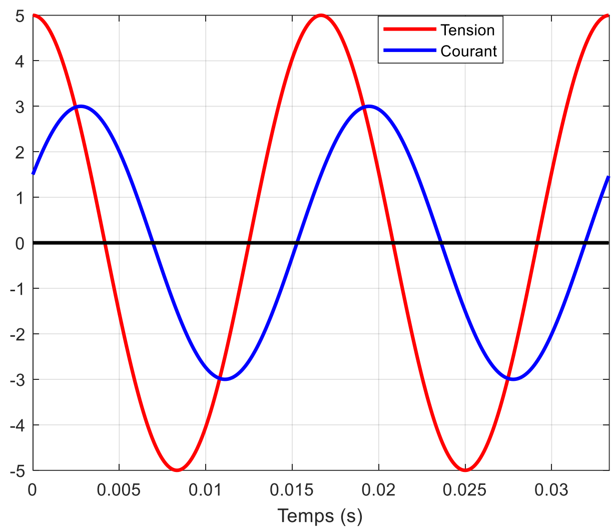
$$W_C = W_L \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} C \left(\frac{10.R_2}{2 + R_2}\right)^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{10}{2 + R_2}\right)^2 \Leftrightarrow 100.C.R_2^2 = 100L \Leftrightarrow R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

L'application numérique donne :

$$R_2 = \sqrt{\frac{4 \times 10^{-3}}{160 \times 10^{-6}}} = \boxed{\mathbf{5\ \Omega}}$$

Question 2 : (**1 point**)

Pour un dipôle donné, on relève avec un oscilloscope la tension et le courant et on obtient les oscillographes ci-dessous.



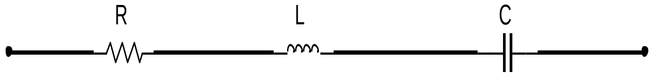
Calculer l'impédance de ce dipôle.

Réponse

$$Z = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{V}{I} = \frac{5/\sqrt{2}}{3/\sqrt{2}} = \boxed{1.667\ \Omega}$$

Question 3 (**1 point**)

Un dipôle est constitué de l'association en série des composants R, L et C. On donne R=110 Ω, L=1 H et C=16 μF. La fréquence est de 60 Hz.



Calculer la réactance capacitive de ce dipôle.

Réponse

$$X_C = -\frac{1}{C\omega} = -\frac{1}{16 \times 10^{-6} \times 377} = \boxed{-165.78\ \Omega}$$

Question 4 (**1 point**)

Quelle est la réactance inductive du dipôle de la question précédente ?

Réponse

$$X_L = L\omega = 1 \times 377 = \boxed{377\ \Omega}$$

Question 5 (**1 point**)

Quelle est l'impédance complexe du dipôle de la question 3 ?

Réponse

Lorsque les éléments sont en série, les impédances complexes s'additionnent; ce qui donne alors :

$$\overline{Z} = R + jX_L + jX_C = 110 + 377j - j165.78 = \boxed{110 + j211.22\ \Omega}$$

Question 6 (**1 point**) :

Que vaut l'impédance du dipôle de la question 3 ?

Réponse

Avec l'impédance complexe, on obtient :

$$\overline{Z} = \underbrace{110}_{\Downarrow\ R} + j\underbrace{211.22}_{\Downarrow\ X}\ \Omega \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{110^2 + 211.22^2} = \boxed{238.15\ \Omega}$$

Question 7 (**1 point**) :

Le dipôle de la question 3 est (choisir la bonne réponse):

- Globalement inductif,
- Globalement capacitif,
- Purement inductif,
- Purement capacitif,
- Purement résistif.

Réponse

Globalement inductif, ***car la partie réelle de l'impédance complexe est positive.***

Question 8 (**2 points**) :

Si on alimente à présent le dipôle de la question 3 par une tension sinusoïdale de fréquence 25 Hz plutôt. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont exactes?

- L'impédance ne change pas ;
- L'impédance augmente;
- L'impédance diminue;
- Le dipôle est inductif;
- Le dipôle est capacitif;

- Le dipôle est purement résistif.

Réponse

À 25 Hz, on aura $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 25 = 157{,}08 \text{ rad}/s$. Ce qui donne alors

$$\begin{cases} X_C = -\dfrac{1}{C\omega} = -\dfrac{1}{16 \times 10^{-6} \times 157{,}08} = -397.886\,\Omega \\ X_L = L\omega = 1 \times 157.08 = 157.08\,\Omega \end{cases}$$

L'impédance complexe devient :

$$\overline{Z} = R + jX_L + jX_C = 110 + j(157.08 - 397.886) = 110 - j240.806\,\Omega$$

$$\Rightarrow \mathrm{Z} = \sqrt{110^2 + (-240.806)^2} = 264.74\,\Omega$$

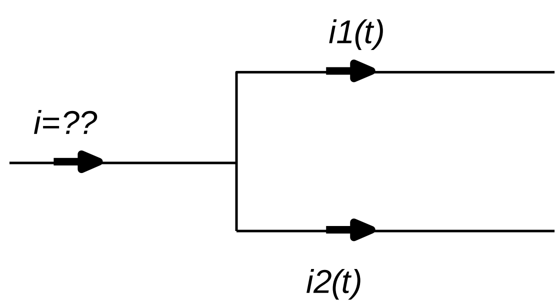
On peut alors tirer les conclusions suivantes :

L'impédance augmente et le dipôle devient capacitif.

Question 9 (**2 points**)

Deux récepteurs sont raccordés en parallèle. Quelle est la valeur efficace de l'intensité du courant dans le circuit principal si les courants partiels sont :

$$\begin{cases} i_1(t) = 6\sqrt{2}\cos(377t) \\ i_2(t) = 8\sqrt{2}\cos\left(377t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$



Réponse

Dans ce cas, les phaseurs associés à ces courants seront respectivement :

$$\begin{cases} i_1(t) = 6\sqrt{2}\cos(377t) \\ i_2(t) = 8\sqrt{2}\cos\left(377t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{I}_1 = 6\angle 0° = 6\ A \\ \overline{I}_2 = 8\angle\dfrac{\pi}{2} = 8\,j\ A \end{cases} \Rightarrow \overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 = 6 - 8j$$

$$= \underbrace{\sqrt{6^2 + 8^2}}_{\substack{\Downarrow \\ 10}} \angle \underbrace{\arctan\frac{8}{6}}_{\substack{\Downarrow \\ 53.13°}} \Rightarrow \boxed{I_{\text{eff}} = I = 10\ A}$$

Question 10 (**1 point**)

Un dipôle sous tension sinusoïdale de valeur efficace 230 V est traversé par un courant en retard de 30 ° dont l'intensité efficace est de 5.75 A. Quelle est l'impédance du dipôle ?

- Z=1322 Ω,
- Z=40 Ω,
- Z=7.67Ω
- Z=0.025 Ω.

Réponse

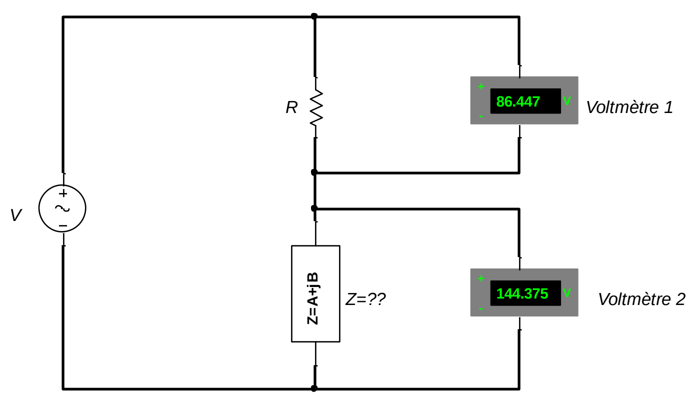
Connaissant les valeurs efficaces du courant et de la tension, on obtient :

$$V_{\text{eff}} = Z.I_{\text{eff}} \Rightarrow Z = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{230}{5.75} = \boxed{40\ \Omega}$$

Question 11 (**2 points**)

Pour le montage ci-dessous, la fréquence est de 60 Hz. On mesure une tension de 86.447 V aux bornes de la résistance et une tension de 144.375 V aux bornes de l'impédance inconnue. La résistance R vaut 3 Ω et le courant dans le circuit est en retard de 33.69 ° sur la tension de source. Les questions 11, 12, 13 et 14 sont dépendantes.

Quelle est la valeur efficace du courant dans le circuit ?



La loi d'Ohm aux bornes de la résistance permet d'obtenir :

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{86.447}{3} = \boxed{28.815\ A}$$

Question 12 (**1.5 point**)

En utilisant le circuit et les données de la question précédente, **calcul de la valeur de l'impédance inconnue Z.**

Le courant est le même dans le circuit, car les composants sont en série et on obtient alors :

$$Z = \frac{V_Z}{I_R} = \frac{144.375}{28.815} = \boxed{5.01\ \Omega}$$

Question 13 (**2 points**)

Pour le circuit et les données de la question précédente. Calcul de la valeur de la résistance de l'impédance complexe inconnue Z.

- Si R_{tot} est la résistance totale du circuit, on peut écrire que :

$$R_{\text{tot}} = 3 + R_Z \qquad (1)$$

Avec R_Z qui représente la résistance de l'impédance inconnue et $3\ \Omega$ est la valeur de la résistance R.

Si le courant est en retard sur la tension de source alors cela signifie que le circuit est **globalement inductif**. L'angle de l'impédance **totale sera positif**. Le déphasage est lié à l'angle de l'impédance équivalente et sa tangente vaut :

$$\tan\varphi = \frac{X_Z}{R_{\text{tot}}} \qquad (2)$$

En substituant (1) dans (2), on obtient :

$$\tan\varphi = \frac{X_Z}{3 + R_Z} \qquad (3)$$

Par ailleurs la réactance dans cette formule sera définie comme suit :

$$X_Z = \sqrt{Z^2 - R_Z^2} \qquad (4)$$

En substituant (4) dans (3), on obtient :

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{Z^2 - R_Z^2}}{3 + R_Z} \Rightarrow \tan\varphi \times (3 + R_Z) = \sqrt{Z^2 - R_Z^2}$$

Ce qui donne :

$$\left(\tan\varphi\,(3 + R_Z)\right)^2 = Z^2 - R_Z^2 \Rightarrow \tan^2(\varphi)(3 + R_Z)^2 = Z^2 - R_Z^2$$

$$\Rightarrow \tan^2(\varphi)(R_Z^2 + 6R_Z + 9) = Z^2 - R_Z^2$$

$$\Rightarrow R_Z^2(\tan^2(\varphi) + 1) + 6\tan^2(\varphi)R_Z + 9\tan^2(\varphi) - Z^2 = 0$$

De cette façon, on obtient une équation du second degré d'inconnue R_Z.

Pour $\varphi = 33.69°$, l'équation du second degré prend la forme :

$$1.444\ R_Z^2 + 2.666\ R_Z - 21.1 = 0$$

le discriminant de cette équation est tel que :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2.666^{\ 2} - 4 \times 1.444 \times (-21.1)} = 11.356$$

Ce qui donne alors la solution :

$$R_Z = \frac{-2.666 + 11.356}{2 \times (1.444)} \approx \boxed{3\ \Omega}$$

Question 14 (**1.5 point**)

Pour le circuit et les données de la question 13. Calcule de la valeur de la réactance de l'impédance complexe inconnue Z. On utilise pour cela l'équation (4) pour obtenir :

$$X_Z = \sqrt{Z^2 - R_Z^2} = \sqrt{(5.01)^2 - 3^2} \approx \boxed{4\ \Omega}$$