

MTH 8302 - Modèles de Régression et d'Analyse de Variance

Leçon 0: Rappel d'Algèbre Linéaire, d'Optimisation, de Probabilités, de Statistique et de Python

Polytechnique Montréal - Hiver 2025

Chiheb Trabelsi

January 29, 2025

POLYTECHNIQUE
MONTREAL

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE



Outline

- 1 Notation
- 2 Algèbre Linéaire
- 3 Optimization
- 4 Probabilité
- 5 Statistiques

Table des Matières

- 1 Notation
- 2 Algèbre Linéaire
- 3 Optimization
- 4 Probabilité
- 5 Statistiques

Constantes, Vecteurs et Matrices

Constantes, Vecteurs et Matrices

- **Les constantes** (représentées par des lettres minuscules en italique)
 - Notation : a, b, c .
 - Dimension : $a \in \mathbb{R}$, un nombre réel.
- **Les vecteurs** (représentés par des lettres minuscules en gras)
 - Notation: $\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$.
 - Dimension : $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, un vecteur réel de dimension n .
- **Les matrices** (représentées par des lettres majuscules en gras)
 - Notation : \mathbf{A}, \mathbf{X}
 - Dimension : $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, une matrice avec m lignes et n colonnes.
 - Matrices spéciales
 - **Matrice identité** : \mathbf{I} , où $\mathbf{I}_{ii} = 1$ et $\mathbf{I}_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.
 - **Matrice diagonale** : $\text{diag}(\mathbf{v})$, où seuls les éléments diagonaux sont non nuls.

Variables Aléatoires et Opérations de base sur les Matrices

Variables Aléatoires et Opérations de base sur les Matrices

- **Les variables aléatoires scalaires** (représentées par des lettres majuscules en italique)
 - Notation : X, Y, Z .
 - Dimension : $X \in \mathbb{R}$ est une variable aléatoire scalaire réelle.
 - Exemple : $Y = f(X) + \mathcal{E}$, une variable aléatoire Y dépend d'une transformation f de la variable aléatoire X et d'un terme d'erreur \mathcal{E} .
- **Opérations de base sur les matrices et symboles clés**
 - **Transpose** : \mathbf{A}^T , la transposée d'une matrice \mathbf{A} .
 - **Inverse** : \mathbf{A}^{-1} , l'inverse d'une matrice carrée \mathbf{A} , si elle existe.
 - **Produit scalaire** : $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \sum_i u_i v_i$, le produit scalaire des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} .
 - **Norme** : $\|\mathbf{v}\|$, la longueur ou la magnitude d'un vecteur.
 - **Trace** : $\text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_i \mathbf{A}_{ii}$, la somme des éléments diagonaux d'une matrice carrée \mathbf{A} .
 - **Déterminant** : $|\mathbf{A}|$ ou $\det(\mathbf{A})$, un scalaire qui indique le facteur d'échelle de la transformation décrite par \mathbf{A} .

Notation Spécifique à la Régression

Notation Spécifique à la Régression

• Notation spécifique à la régression

- \mathbf{X} : Matrice de conception de dimension $n \times (p + 1)$, où :
 - n est le nombre d'observations
 - p est le nombre de prédicteurs.
- \mathbf{y} : Vecteur des réponses de dimension n .
- $\boldsymbol{\beta}$: Vecteur des coefficients de dimension $(p + 1)$.
- $\boldsymbol{\mathcal{E}}$: Vecteur des erreurs de dimension n .
- $\hat{\boldsymbol{\beta}}$: L'estimateur du vecteur des coefficients $\boldsymbol{\beta}$.
 - Exemple : Estimateur des moindres carrés ordinaires (OLS, de l'anglais Ordinary Least squares)

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Notation Spécifique à la Régression

Ce qu'il Faut Retenir

- **Ce qu'il faut retenir**

- **Constantes** : Lettres minuscules en italique (par ex. a, b).
- **Vecteurs** : Lettres minuscules en gras (par ex. \mathbf{x}, \mathbf{y}).
- **Matrices** : Lettres majuscules en gras (par ex. \mathbf{X}, \mathbf{A}).
- **Variables aléatoires scalaires** : Lettres majuscules en italique (par ex. X, Y).

Table des Matières

- 1 Notation
- 2 Algèbre Linéaire
- 3 Optimization
- 4 Probabilité
- 5 Statistiques

Introduction : Pourquoi l'Algèbre Linéaire ?

Introduction : Pourquoi l'Algèbre Linéaire ?

- **Base mathématique** : L'algèbre linéaire constitue la base des concepts mathématiques utilisés pour :
 - Exprimer des modèles de régression.
 - Réduire la dimension de la matrice de conception \mathbf{X} :
 - Analyse en composantes principales (ACP).
 - Décomposition en valeurs singulières (SVD, de l'anglais Singular Value Decomposition)
 - En réseaux de neurones et pour l'optimisation des modèles.
 - etc.

Introduction : Pourquoi l'Algèbre Linéaire ?

- **Application: Représentations matricielles pour la modélisation**

- Considérons le modèle de régression linéaire simple:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \mathcal{E}$$

- En notation matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mathcal{E}}$$

où :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{E}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_n \end{bmatrix}$$

Introduction : Pourquoi l'Algèbre Linéaire ?

- **Application: Résolution des systèmes d'équations**

- Pour estimer β , nous résolvons :

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

- Exemple : Avec

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

on calcule l'estimateur de β :

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

- \Rightarrow L'algèbre linéaire permet **la modélisation et calcul efficace pour les données de haute dimension.**

Vecteurs et Espaces Vectoriels

Vecteurs

Vecteurs

- Un **vecteur** est une collection de nombres représentant :
 - Des points dans l'espace (par exemple, coordonnées en 2D ou 3D).
 - Des quantités avec une magnitude et une direction.
 - Des points de données (observations).
- **Représentation mathématique**

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \text{où } v_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Espace Vectoriels

Espace Vectoriel \mathbb{R}^n

Soient $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, et $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ des vecteurs de \mathbb{R}^n , et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

L'espace vectoriel \mathbb{R}^n est un ensemble de vecteurs où l'addition vectorielle et la multiplication scalaire respectent les propriétés suivantes :

- **Commutativité de la somme** : $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
- **Associativité de la somme** : $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
- **0 élément neutre pour la somme** : $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$.
- **Existence d'un inverse pour la somme** : $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Espace Vectoriel \mathbb{R}^n

- **1 est l'élément neutre pour le produit (par un scalaire) :**
 $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}.$
- **Associativité du produit (par un scalaire) :** $\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{u}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{u}.$
- **Distributivité du produit par rapport à la somme:**
 $\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}.$
- **Distributivité de la somme par rapport au produit :**
 $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{u}.$

Ces 8 propriétés définissent ce qu'est un espace vectoriel
 $\Rightarrow \mathbb{R}^n$ est un **espace vectoriel**.

Sous-Espace Vectoriel de \mathbb{R}^n

F est appelée un **sous-espace vectoriel** \mathbb{R}^n si F satisfait les propriétés suivantes :

- Le vecteur nul $\mathbf{0}$ appartient à F .
- La somme de deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in F$ appartient également à F ($\mathbf{u} + \mathbf{v} \in F$).
- Le produit d'un vecteur $u \in F$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ appartient à F ($\lambda \cdot \mathbf{u} \in F$).

Ces propriétés garantissent que F est fermé pour les opérations de somme vectorielle et de multiplication scalaire, et donc que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Opérations sur les Vecteurs

Opérations de Base sur les Vecteurs

Opérations de Base sur les Vecteurs

- **Addition**

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}.$$

- **Multiplication Scalaire**

$$\alpha \mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{bmatrix}.$$

- **Produit Scalaire**

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Opérations de Base sur les Vecteurs: Exemples Numériques

Considérons les vecteurs suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 2.$$

- **Addition**

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 1 \\ -2 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- **Multiplication Scalaire**

$$\alpha \mathbf{v} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

- **Produit Scalaire**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = (3 \cdot 1) + (-2 \cdot 4) = 3 - 8 = -5.$$

Opérations de Base sur les Vecteurs : Code Python

```
import numpy as np

# Définir les vecteurs
u = np.array([1, 2])
v = np.array([3, 4])

# Addition
print("Addition de vecteurs :", u + v)

# Multiplication scalaire
alpha = 2
print("Multiplication scalaire :", alpha * u)

# Produit scalaire
print("Produit scalaire :", np.dot(u, v))
```

Résultats:

```
Addition de vecteurs : [4 6]
Multiplication scalaire : [2 4]
Produit scalaire : 11
```

Produit Extérieur (Outer Product)

Produit Extérieur (Outer Product)

- Produit Extérieur (Outer Product)
 - Soient $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (pas nécessairement de la même taille), leur **produit extérieur** \mathbf{xy}^T est une matrice de dimensions $m \times n$ dont les entrées sont données par :

$$(\mathbf{xy}^T)_{ij} = x_i y_j.$$

Matriciellement, cela s'écrit :

$$\mathbf{xy}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m y_1 & x_m y_2 & \cdots & x_m y_n \end{bmatrix}.$$

Produit Extérieur (Outer Product)

• Exemple d'utilisation

Considérons $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ comme un vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1. Si nous prenons une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ où chaque colonne est égale à un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, le produit extérieur permet de représenter cette matrice :

$$\mathbf{A} = \mathbf{x}\mathbf{1}^T.$$

Matriciellement, cela s'écrit :

$$\mathbf{x}\mathbf{1}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m & x_m & \cdots & x_m \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}}.$$

Produit Extérieur (Outer Product) : Code Python

```
import numpy as np

# Définir les vecteurs
x = np.array([2, 3, 4]) # Vecteur x
ones = np.ones(5)      # Vecteur de 1 avec 5 éléments

# Calcul du produit extérieur
outer_product = np.outer(x, ones)

# Affichage des résultats
print("Vecteur x :", x)
print("Vecteur de 1 :", ones)
print("Produit extérieur :")
print(outer_product)
```

Résultats:

```
Vecteur x : [2 3 4]
Vecteur de 1 : [1. 1. 1. 1. 1.]
Produit extérieur :
[[2. 2. 2. 2. 2.]
 [3. 3. 3. 3. 3.]
 [4. 4. 4. 4. 4.]]
```

Norme d'un Vecteur

Norme d'un Vecteur

- **Définition** : La norme d'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, notée par $\|\mathbf{v}\|$, est une mesure de sa longueur dans l'espace vectoriel. Par exemple, la norme Euclidienne ℓ_2 d'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

- **Propriétés** :
 - $\|\mathbf{v}\| \geq 0$, avec $\|\mathbf{v}\| = 0$ si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
 - $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (inégalité triangulaire).

Normes ℓ_p

- Les normes ℓ_p sont définies par :

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

- **Exemples de normes ℓ_p** (Exemple Numérique, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$) :

- **Norme ℓ_1 (Manhattan) :**

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad \Rightarrow \|\mathbf{v}\|_1 = |3| + |4| = 7.$$

- **Norme ℓ_2 (Euclidienne) :**

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad \Rightarrow \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Norme l_∞ (Infinie) et Code Python pour les Normes

- La norme l_∞ est définie par :

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|. \quad \Rightarrow \|\mathbf{v}\|_\infty = \max(|3|, |4|) = 4.$$

```
import numpy as np
# Définir le vecteur
v = np.array([3, 4])
# Calculer les normes
euclidean_norm = np.linalg.norm(v, ord=2)
manhattan_norm = np.linalg.norm(v, ord=1)
infinity_norm = np.linalg.norm(v, ord=np.inf)
# Afficher les résultats
print("Vecteur:", v)
print("Norme Euclidienne:", euclidean_norm)
print("Norme Manhattan:", manhattan_norm)
print("Norme infinie:", infinity_norm)
```

Résultats:

```
Vecteur: [3 4]
Norme Euclidienne: 5.0
Norme Manhattan: 7.0
Norme infinie: 4.0
```

Visualisation des Normes l_1 , l_2 et l_∞

- Les normes l_1 , l_2 , et l_∞ peuvent être visualisées sous forme de sphères unités (ensemble des points $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tels que $\|\mathbf{x}\| = 1$) :
 - La norme l_1 privilégie les déplacements alignés avec les axes, ce qui se traduit par un losange.
 - La norme l_2 , la plus courante, mesure les distances euclidiennes. La sphère d'unité est lisse et circulaire, représentant un poids égal dans toutes les directions (cercle).
 - La norme l_∞ prend la valeur maximale des composantes, donnant lieu à un carré.

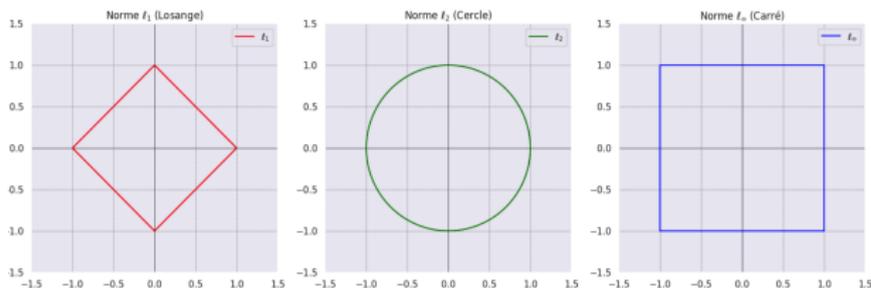


Figure: Représentation des normes l_1 (losange), l_2 (cercle), et l_∞ (carré).

Intuition des Normes : Norme ℓ_1 (Norme Manhattan)

- **Norme ℓ_1 (Norme Manhattan) :**
 - **Interprétation :** Mesure la distance comme si l'on se déplaçait à travers un réseau orthogonal, comme les rues d'une ville (Manhattan).
 - **Application :** Utilisée dans le modèle de régression Lasso pour exprimer la régularisation L_1 . Elle permet d'obtenir des paramètres éparses.
 - **Propriété :** Robuste aux données éparses (sparse data), elle encourage les solutions où de nombreux paramètres sont nuls. Elle effectue une sélection des caractéristiques en éliminant celles qui contribuent le moins au modèle.

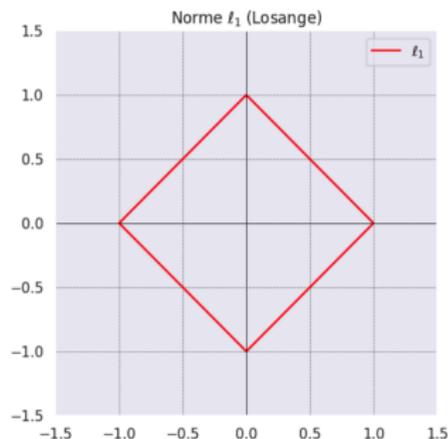


Figure: Norme ℓ_1 : Sphère unité (forme de losange)

Intuition des Normes : Norme ℓ_2 (Norme Euclidienne)

• Norme ℓ_2 (Norme Euclidienne) :

- **Interprétation** : mesure la distance droite (ou longueur) entre deux points dans un espace euclidien. C'est la norme classique que l'on utilise intuitivement pour mesurer une distance.
- **Application** : Utilisée dans la régression Ridge utilisée pour exprimer régularisation L_2 pour pénaliser les valeurs extrêmes des estimateurs.
- **Propriété** : Utilisée pour la régularisation L_2 , elle ne réalise pas de sélection de caractéristiques, mais équilibre les contributions de toutes les caractéristiques en les réduisant proportionnellement.

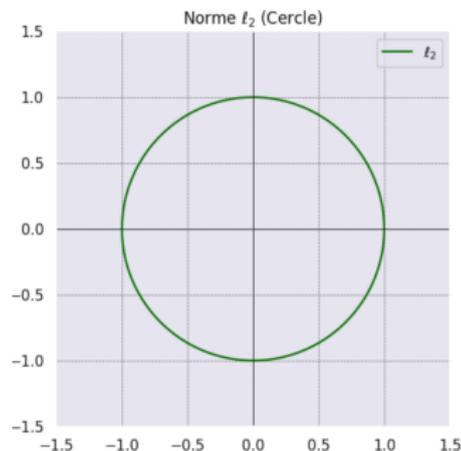


Figure: Norme ℓ_2 : Sphère unité (forme de cercle)

Intuition des Normes : Norme l_∞

- **Norme l_∞ (Norme infinie) :**
 - **Interprétation :** La norme l_∞ mesure la plus grande valeur absolue parmi les éléments d'un vecteur. Elle reflète l'impact maximal d'un seul élément.
 - **Application :** Utile lorsqu'on veut minimiser ou contrôler le plus grand écart ou erreur dans un ensemble de données.
 - **Exemple :** Utilisée en optimisation des pires cas (worst-case optimization).
 - **Note:** Utile dans les contextes où des valeurs extrêmes peuvent entraîner des problèmes.

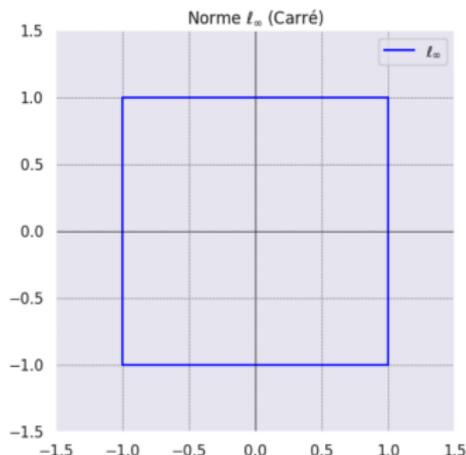


Figure: Norme l_∞ : Sphère unité (forme de carré)

Opérations sur les Matrices

Addition de Matrices

Addition de Matrices

- **Addition de Matrices** : Soient \mathbf{A} et \mathbf{B} deux matrices de même dimension $\mathbb{R}^{m \times n}$. \mathbf{A} et \mathbf{B} peuvent être alors additionnées tel que :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad \text{où } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

- **Propriétés** :

- **Commutativité** : $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
- **Associativité** : $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$.
- **Élément neutre $\mathbf{0}$** , (la matrice nulle): $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$.
- **Inverse** : Chaque matrice \mathbf{A} a une matrice opposée $-\mathbf{A}$ telle que :

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

- **Clôture** : Si \mathbf{A} et \mathbf{B} ont la même dimension $m \times n$, alors $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est aussi de dimension $m \times n$.

Addition de Matrices : Exemple Numérique

Considérons les matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

- **Addition :**

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}.$$

Addition de Matrices : Code Python

```
import numpy as np

# Définir les matrices
A = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])
B = np.array([[7, 8, 9], [10, 11, 12]])

# Addition de matrices
C = A + B
print("Addition de matrices:\n", C)
```

Résultat :

```
Addition de matrices:
[[ 8 10 12]
 [14 16 18]]
```

Multiplication Scalaire des Matrices

Multiplication Scalaire des Matrices

- **Multiplication Scalaire** : Un scalaire α multiplie chaque élément de la matrice \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A}, \quad \text{où } b_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

- **Propriétés** :

- **Distributivité** : $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ et $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$.
- **Associativité** : $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$.
- **Élément neutre** : $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- **Propriété du zéro** : $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{0}$ est une matrice nulle de même dimension que \mathbf{A} .
- **Clôture** : Si \mathbf{A} est une matrice et α est un scalaire, alors $\alpha\mathbf{A}$ est une matrice de mêmes dimensions que \mathbf{A} .

Multiplication Scalaire des Matrices : Exemple Numérique

Considérons la matrice suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

- **Multiplication Scalaire :**

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{A}, \quad \text{où } b_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Par exemple, si $\alpha = 3$, alors :

$$\mathbf{B} = 3 \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}.$$

Multiplication Scalaire des Matrices : Code Python

```
import numpy as np

# Définir la matrice
A = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])

# Scalaire
alpha = 3

# Multiplication scalaire
B = alpha * A
print("Multiplication scalaire de la matrice:\n", B)
```

Résultat :

```
Multiplication scalaire de la matrice:
[[ 3  6  9]
 [12 15 18]]
```

Produit Matrice-Vecteur

Produit Matrice-Vecteur

- **Produit Matrice-Vecteur:** Le produit d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ avec un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ donne un vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, tel que :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

- Chaque élément y_i du vecteur résultat \mathbf{y} est égal au produit scalaire de la i -ème ligne de \mathbf{A} avec \mathbf{x} :

$$y_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}.$$

- **Représentation par colonnes :** En écrivant \mathbf{A} en termes de ses colonnes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, nous avons :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Ici, le produit est une *combinaison linéaire* des colonnes de \mathbf{A} , pondérée par les éléments de \mathbf{x} .

Produit Matrice-Vecteur : Exemple Numérique

- Soient la matrice \mathbf{A} et le vecteur \mathbf{x} suivants :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Le produit $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ est donné par :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Produit Matrice-Vecteur: Code Python

```
import numpy as np

# Définir la matrice A et le vecteur x
A = np.arange(1,10,1).reshape((3,3))
x = np.array([1, 0, -1])

# Calculer le produit matrice-vecteur
y = np.dot(A, x)

# Afficher les résultats
print("Matrice A :\n", A)
print("Vecteur x :", x)
print("Produit Matrice-Vecteur (y = A x) :", y)
```

Résultats:

Matrice A :

```
[[1 2 3]
 [4 5 6]
 [7 8 9]]
```

Vecteur x : [1 0 -1]

Produit Matrice-Vecteur (y = A x) : [-2 -2 -2]

Produit Matrice-Matrice

Produit Matrice-Matrice

- **Produit Matrice-Matrice:** Soient deux matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, leur produit est une matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ telle que chaque élément c_{ij} de \mathbf{C} est donné par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

- $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ peut aussi être vu comme une combinaison linéaire des colonnes de \mathbf{B} pondérées par les lignes de \mathbf{A} .
- Les matrices sont définies comme suit :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}.$$

Produit Matrice-Matrice : Exemple Numérique

- Le produit $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ est donné par :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kp} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{kp} \end{bmatrix}.$$

- Considérons les matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

- Le produit $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ est donné par :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 10 \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 9 & 5 \cdot 8 + 6 \cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{bmatrix}.$$

Produit Matrice-Matrice : Code Python

```
import numpy as np
# Définir les matrices A et B
A = np.arange(1,7).reshape((3,2))
B = np.arange(7,11).reshape((2,2))
# Calculer le produit matrice-matrice
C = np.dot(A, B)
# Afficher les résultats
print("Matrice A :\n", A)
print("Matrice B :\n", B)
print("Produit Matrice-Matrice (C = A x B) :\n", C)
```

Résultats:

Matrice A :

```
[[1 2]
 [3 4]
 [5 6]]
```

Matrice B :

```
[[7 8]
 [9 10]]
```

Produit Matrice-Matrice (C = A x B) :

```
[[18 28]
 [57 64]
 [89 100]]
```

La Matrice Identité et les Matrices Diagonales

La Matrice Identité

- **Définition** : La matrice identité $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice carrée telle que :

$$(\mathbf{I}_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}, \quad \mathbf{I} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}}.$$

- **Propriété fondamentale** :

$$\mathbf{I}_n \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}, \quad \text{pour toute matrice } \mathbf{A}.$$

Les Matrices Diagonales

- **Définition** : Une matrice diagonale $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice carrée où tous les éléments hors de la diagonale principale sont nuls :

$$(\mathbf{D})_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{d}) = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

La Matrice Identité et Matrices Diagonales : Code Python

```
import numpy as np

# Matrice Identité
I = np.eye(3)
print("Matrice Identité :\n", I)

# Matrice Diagonale
d = [3, 5, 7]
D = np.diag(d)
print("Matrice Diagonale :\n", D)
```

Résultats:

```
Matrice Identité :
[[1. 0. 0.]
 [0. 1. 0.]
 [0. 0. 1.]]
Matrice Diagonale :
[[3 0 0]
 [0 5 0]
 [0 0 7]]
```

Transposée d'une Matrice

Transposée d'une Matrice

- Définition** : La transposée d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est notée \mathbf{A}^T . Elle est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de \mathbf{A} tel que $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$:

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{A}_{ji}.$$

- Exemple** :

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}}_{m \text{ colonnes}}, \quad \mathbf{A}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}}.$$

Transposée d'une Matrice : Exemple Numérique

- **Propriétés :**

- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}.$

- $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$

- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ et $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T.$

- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$

- Considérons la matrice suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

La transposée est donnée par :

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Transposée d'une Matrice : Code Python

```
import numpy as np

# Définir la matrice
A = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])

# Calculer la transposée
A_transpose = A.T

print("Matrice originale :\n", A)
print("Transposée de la matrice :\n", A_transpose)
```

Résultats:

Matrice originale :

```
[[1 2 3]
 [4 5 6]]
```

Transposée de la matrice :

```
[[1 4]
 [2 5]
 [3 6]]
```

Matrices Symétriques

Matrices Symétriques

- **Définition** : Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique si elle est égale à sa transposée :

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}.$$

- **Propriétés** :

- Les éléments d'une matrice symétrique sont symétriques par rapport à la diagonale principale :

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j.$$

- Pour toute matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{B}^T$ est symétrique.
- La somme de deux matrices symétriques est symétrique.

- **Exemple** :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique car $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j .

Matrices Symétriques : Code Python

```
import numpy as np

# Définir une matrice symétrique
A = np.array([[1, 2, 3],
              [2, 4, 5],
              [3, 5, 6]])

# Vérifier si la matrice est symétrique
is_symmetric = np.allclose(A, A.T)
print("Matrice A:\n", A)
print("A est-elle symétrique?:", is_symmetric)
```

Résultats:

```
Matrice A:
[[1 2 3]
 [2 4 5]
 [3 5 6]]
A est-elle symétrique?: True
```

Trace d'une Matrice

Trace d'une matrice

- **Définition** : La trace d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la somme des éléments de sa diagonale principale :

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- **Exemple** :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Trace d'une Matrice

• Propriétés:

- Pour $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}^T)$.
- Pour $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$.
- Pour $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\text{tr}(\alpha \mathbf{A}) = \alpha \text{tr}(\mathbf{A})$.
- Pour \mathbf{A}, \mathbf{B} telles que \mathbf{AB} est une matrice carrée, $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$.
- Pour $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ telles que \mathbf{ABC} est une matrice carrée :

$$\text{tr}(\mathbf{ABC}) = \text{tr}(\mathbf{BCA}) = \text{tr}(\mathbf{CAB}),$$

et ainsi de suite pour le produit de plusieurs matrices.

- $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{AB}^T) = \text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{BA}^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$.
 \Rightarrow Produit matriciel de Hadamard (élément par élément)

Trace d'une Matrice : Exemple Numérique

- Considérons la matrice suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

- La trace de \mathbf{A} est la somme des éléments de la diagonale principale :

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = 1 + 5 + 9 = 15.$$

Trace d'une Matrice : Code Python

```
import numpy as np

# Définir la matrice
A = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6],
              [7, 8, 9]])

# Calculer la trace
trace_A = np.trace(A)

# Afficher le résultat
print("La trace de la matrice A est :", trace_A)
```

Résultat :

La trace de la matrice A est : 15

Le Déterminant d'une Matrice

Le Déterminant d'une Matrice

- **Définition** : Le déterminant d'une matrice carrée \mathbf{A} , noté $|\mathbf{A}|$ ou $\det(\mathbf{A})$, est une fonction scalaire des éléments de \mathbf{A} . Il indique le facteur d'échelle de la transformation décrite par \mathbf{A} .

- **Formule récursive** :

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{\setminus i, \setminus j})$$

- **Note** :

- j est un entier tel que $j \in \{1, \dots, n\}$.
- $\mathbf{A}_{\setminus i, \setminus j}$ est la matrice obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de \mathbf{A} .

Le Déterminant d'une Matrice

- **Formule récursive :**

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{\setminus i, \setminus j})$$

- **Note :**

- j est un entier tel que $j \in \{1, \dots, n\}$.
- $\mathbf{A}_{\setminus i, \setminus j}$ est la matrice obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de \mathbf{A} .

- **Calcul du déterminant pour les matrices 1×1 et 2×2 :**

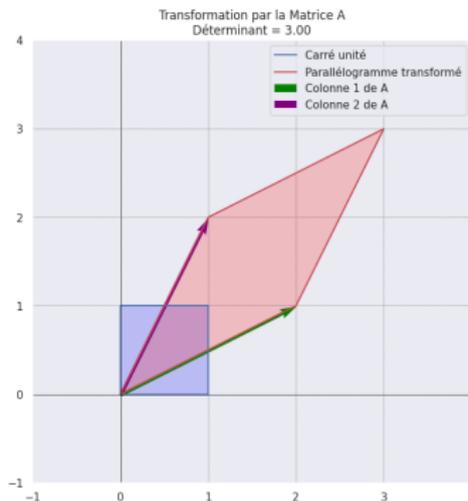
$$|a_{11}| = a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- **Formule pour une matrice 3×3 :**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - eg).$$

Le Déterminant d'une Matrice: Interprétation Géométrique

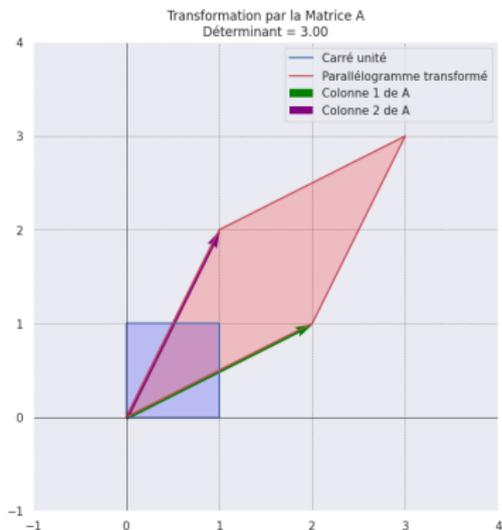
- Pour $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(\mathbf{A})$ décrit le facteur d'échelle de la transformation linéaire définie par \mathbf{A} .
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\det(\mathbf{A})$ correspond à l'aire signée du parallélogramme formé par les colonnes de \mathbf{A} . Par exemple, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$



Le Déterminant d'une Matrice: Interprétation Géométrique

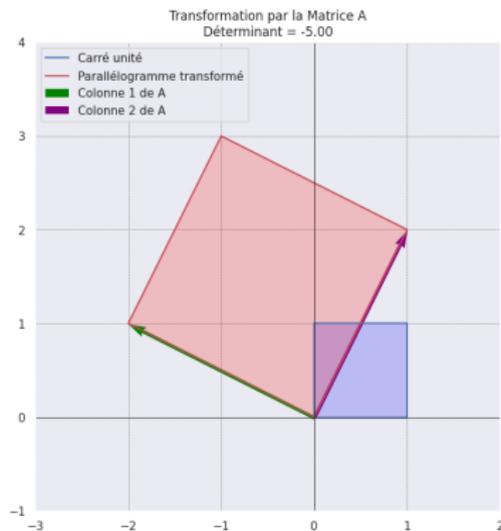
- Si $\det(\mathbf{A}) > 0$ l'orientation est conservée.

- Par exemple, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 3$



Le Déterminant d'une Matrice: Interprétation Géométrique

- Si $\det(\mathbf{A}) < 0$ l'orientation est inversée.
- Par exemple, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = -5$



Le Déterminant d'une Matrice: Interprétation Géométrique

- Si $\det(\mathbf{A}) = 0$ cela signifie que la matrice "aplatie" la transformation en une dimension inférieure.
 - Par exemple, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$



Calcul du Déterminant avec Python

```
import numpy as np

# Matrice 2 * 2
A = np.array([[4, 3],
              [6, 3]])

# Calcul du déterminant
det_A = np.linalg.det(A)
print(f"Déterminant de A : {det_A:.2f}")

# Matrice 3 * 3
B = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6],
              [7, 8, 9]])

# Calcul du déterminant
det_B = np.linalg.det(B)
print(f"Déterminant de B : {det_B:.2f}")
```

Résultat :

Déterminant de A : -6.00
 Déterminant de B : 0.00

Norme de Frobenius pour les Matrices

Norme de Frobenius pour les Matrices

- **Définition** : La norme de Frobenius $\|\mathbf{A}\|_F$ pour une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est définie comme la racine carrée de la somme des carrés de tous les éléments de la matrice :

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

- **Expression avec la trace** : La norme de Frobenius peut également être exprimée à l'aide de la trace :

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}.$$

- **Propriétés** :

- $\|\mathbf{A}\|_F \geq 0$, et $\|\mathbf{A}\|_F = 0$ si et seulement si $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.
- $\|\alpha \mathbf{A}\|_F = |\alpha| \|\mathbf{A}\|_F$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_F + \|\mathbf{B}\|_F$ (inégalité triangulaire).

Norme de Frobenius : Exemple Numérique

- Soit la matrice suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

La norme de Frobenius est donnée par :

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{91}.$$

- Avec la trace, on peut aussi calculer :

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}.$$

Norme de Frobenius : Intuition

- **Norme de Frobenius (pour les matrices) :**
 - **Interprétation :** La norme de Frobenius est analogue à la norme ℓ_2 , mais pour les matrices.
 - **Application :** Souvent utilisée pour quantifier les erreurs ou les différences entre matrices, comme dans les problèmes de factorisation de matrices ou d'approximation.
 - **Exemple :** La norme de Frobenius peut évaluer l'écart entre une matrice estimée et une matrice réelle dans les problèmes de minimisation.

Norme de Frobenius : Code Python

```
import numpy as np

# Définir la matrice
A = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6]])

# Calculer la norme de Frobenius
frobenius_norm = np.linalg.norm(A, 'fro')

# Afficher le résultat
print("Matrice A :\n", A)
print("Norme de Frobenius : {:.4f}".format(frobenius_norm))
```

Résultat :

```
Matrice A :
[[1 2 3]
 [4 5 6]]
Norme de Frobenius : 9.5394
```

Indépendance Linéaire et Rang d'une Matrice

Indépendance Linéaire

- **Définition :**

- Un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^m$ est dit **(linéairement) indépendant** si aucun vecteur ne peut être représenté comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Inversement, si un vecteur de l'ensemble peut être représenté comme une combinaison linéaire des autres vecteurs, alors les vecteurs sont dits **(linéairement) dépendants**.
- Autrement dit, si :

$$\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{x}_i$$

pour certains scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, alors les vecteurs $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ sont linéairement dépendants ; sinon, ils sont linéairement indépendants.

Indépendance Linéaire

- **Définition** : Soient $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ des vecteurs de l'espace vectoriel \mathbb{R}^m . L'ensemble $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ est dit :

- **Linéairement indépendant** si la seule combinaison linéaire nulle,

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

est celle où $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

- **Linéairement dépendant** s'il existe des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, dont au moins un est non nul, tel que

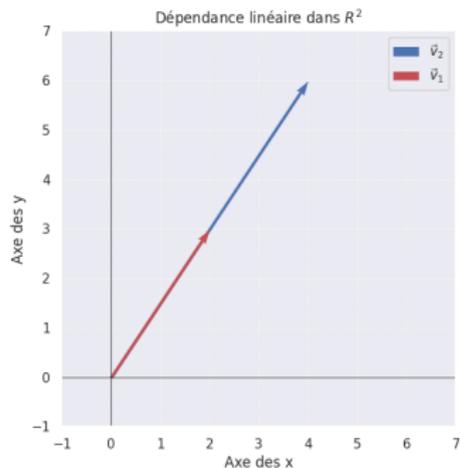
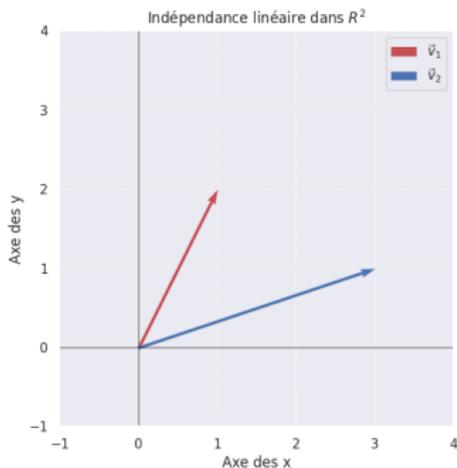
$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

- **Propriétés** : Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (une matrice carrée).
 - Si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, les colonnes (ou lignes) de \mathbf{A} sont **linéairement indépendantes**.
 - Si $\det(\mathbf{A}) = 0$, les colonnes (ou lignes) de \mathbf{A} sont **linéairement dépendantes**.

Indépendance Linéaire : Interprétation Géométrique

● Interprétation Géométrique :

- Dans \mathbb{R}^2 : Des vecteurs linéairement indépendants ne sont pas sur la même droite.
- Dans \mathbb{R}^n : Des vecteurs linéairement indépendants ne sont pas sur le même hyperplan.



Rang d'une Matrice

- **Définition :** Le **rang** d'une matrice A est le nombre maximal de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes de A .
- **Propriétés :**
 - Pour $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rang}(A) \leq \min(m, n)$.
 Si $\text{rang}(A) = \min(m, n)$, alors A est dite **de plein rang**.
 - Pour $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$.
 - Pour $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B))$.
 - Pour $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rang}(A + B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$.
- **Propriétés liées au Déterminant:**
 - Pour $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Si $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = n$ (càd, les colonnes et les lignes de A sont linéairement indépendantes).
 - Si $\det(A) = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) < n$ (càd, la matrice possède des colonnes (ou lignes) linéairement dépendantes).

Indépendance Linéaire et Rang : Exemple Numérique

- **Exemple 1 : Dépendance Linéaire**

Par exemple, les vecteurs :

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement dépendants car :

$$\mathbf{x}_3 = -2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2.$$

- **Exemple 2 : Indépendance Linéaire**

Par contre, les vecteurs :

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Aucune combinaison linéaire des deux premiers vecteurs ne peut donner le troisième vecteur.
- **Le rang de la matrice formée par ces vecteurs est égal à 3.**

Indépendance Linéaire et Rang : Base d'un Espace Vect

- **Définition** : Soient $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ des vecteurs de l'espace vectoriel V . L'ensemble $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ constitue une **base** de l'espace vectoriel V si l'ensemble satisfait les propriétés suivantes :
 - $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ **engendre** V (tout vecteur de V peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base).
 - $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ Est **linéairement indépendant**.
- **Propriétés clés** :
 - Tout vecteur de V peut être exprimé de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base.
 - Le nombre de vecteurs dans une base est la **dimension** de V .
 - Par ex., $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ tel que :

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

est une base de \mathbb{R}^3 .

Indépendance Linéaire et Rang : Cas d'Utilisation

- **Résolution de Systèmes Linéaires :**
 - Solution unique si $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{nombre de colonnes}$.
 - Solutions infinies ou aucune si $\text{rang}(\mathbf{A}) < \text{nombre de colonnes}$.
- **Compression de Données :**
 - L'ACP (Analyse en Composantes Principales) utilise le rang pour identifier les dimensions significatives.
- **Application en Statistiques :**
 - Identification des relations de dépendance entre variables explicatives dans un modèle de régression.

Indépendance Linéaire et Rang : Code Python

```
import numpy as np

# Définir une matrice
A = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6],
              [7, 8, 9]])

# Calculer le rang
rang = np.linalg.matrix_rank(A)
print(f"Le rang de la matrice est : {rang}")

# Vérifier l'indépendance linéaire des colonnes
def verifier_independance_lineaire(matrice):
    rang = np.linalg.matrix_rank(matrice)
    return rang == min(matrice.shape[0], matrice.shape[1])

independance = verifier_independance_lineaire(A)
print(f"Les colonnes sont-elles linéairement indépendantes ? {independance}")
```

Résultats:

Le rang de la matrice est : 2
 Les colonnes sont-elles linéairement indépendantes ? False

Inverse d'une Matrice

Inverse d'une Matrice

- **Définition :** L'inverse d'une matrice carrée \mathbf{A} de dimension $n \times n$, notée \mathbf{A}^{-1} , est une matrice telle que :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

où \mathbf{I}_n est la matrice identité de dimension n .

- **Conditions d'existence :**
 - Une matrice \mathbf{A} possède une inverse si, et seulement si, elle est inversible.
 - Une matrice est inversible si son déterminant est non nul : $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Inverse d'une Matrice

- **Calcul de l'inverse :**

- Pour une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tel que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \text{où } \det(\mathbf{A}) = ad - bc.$$

- Pour une matrice $n \times n$ (avec $n > 2$), on peut utiliser la méthode des cofacteurs:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{adj}(\mathbf{A}),$$

où $\text{adj}(\mathbf{A})$ est la matrice adjointe avec:

$\text{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}^T$ tel que \mathbf{C} est la matrice de cofacteurs de \mathbf{A} :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{A}_{\setminus i, \setminus j})$$

- **Note :** Des méthodes de décomposition comme la décomposition LU ou QR sont utilisées par les logiciels numériques.

Inverse d'une Matrice

• Propriétés:

- Si \mathbf{A} inversible \Rightarrow alors son inverse est unique.
- Si \mathbf{A} et \mathbf{B} inversibles $\Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ est également inversible tel que:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}.$$

- Si \mathbf{A} est inversible $\Rightarrow \mathbf{A}^T$ est également inversible, avec :

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$

- Si \mathbf{A} inversible \Rightarrow pour tout entier positif k , on a :

$$(\mathbf{A}^k)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^k.$$

- Si \mathbf{A} est inversible $\Rightarrow (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
- Si \mathbf{A} et \mathbf{B} 2 matrices et \mathbf{A} inversible $\Rightarrow \text{tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})$.
- Si \mathbf{A} est une matrice inversible $\Rightarrow \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

Inverse d'une Matrice

• Propriétés:

- $\text{diag}(\mathbf{v})^{-1} = \text{diag} \left(\left[\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \dots, \frac{1}{v_n} \right]^T \right)$
- Si \mathbf{A} est de la forme bloc-diagonale : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$, $\Rightarrow \mathbf{A}$ est inversible si et seulement si \mathbf{B} et \mathbf{C} sont inversibles, avec :

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}.$$

• Interprétation Géométrique et Intuition:

- \mathbf{A}^{-1} , représente une transformation qui "annule" l'effet de la transformation linéaire représentée par \mathbf{A} .
- Si \mathbf{A} transforme un espace en un autre, \mathbf{A}^{-1} nous permet de revenir à l'espace initial.
- Les lignes de \mathbf{A}^{-1} peuvent être interprétées comme les vecteurs de base de l'espace d'origine exprimés en termes de l'espace transformé.

Inverse d'une matrice : Exemple Numérique

- **Problème** : Résolution de système linéaire :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \text{où} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

- **Trouver l'inverse de A** :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{A}) = (2)(3) - (1)(1) = 6 - 1 = 5,$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

- **Calcul de $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$** :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Inverse d'une Matrice : Code python

```
import numpy as np

# Définir la matrice A et le vecteur b
A = np.array([[2, 1],
              [1, 3]])
b = np.array([5, 7])

# Calculer l'inverse de A
A_inv = np.linalg.inv(A)

# Résoudre pour x
x = np.dot(A_inv, b)

# Afficher le résultat
print("Vecteur solution x:", x)
```

Résultat :

Vecteur solution x: [3. 2.]

Orthogonalité d'une Matrice

Orthogonalité d'une Matrice

- **Définition** : Une matrice carrée $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite orthogonale si elle satisfait :

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_n,$$

- **Propriétés** :

- Les colonnes (et les lignes) d'une matrice orthogonale \mathbf{Q} sont orthonormées :

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- Une orthogonale préserve la norme euclidienne des vecteurs :

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2.$$

- $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$.
 - Les matrices orthogonales propres ($\det(\mathbf{Q}) = 1$) représentent des **rotations**.
 - Les matrices orthogonales impropres ($\det(\mathbf{Q}) = -1$) combinent une **réflexion avec une rotation éventuelle**.
- L'inverse d'une orthogonale est sa transposée : $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$.

Orthogonalité d'une Matrice

Exemples :

- La matrice identité \mathbf{I}_n est orthogonale.
- Une matrice de rotation en 2D :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

est orthogonale.

- La matrice de permutation des axes de coordonnées est orthogonale.

Par exemple, dans \mathbb{R}^4 ,
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Applications :

- Réduction dimensionnelle (ex. : décomposition en valeurs singulières, PCA) utilisées en compression des données.
- Transformations dans les espaces euclidiens (ex. : rotations, changements de base) utilisées beaucoup dans les applications graphiques

Orthogonalité d'une Matrice : Interprétation Géométrique

- **Distances** : Pour tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, la transformation par une matrice orthogonale \mathbf{Q} satisfait :

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2.$$

Cela signifie que la longueur des vecteurs reste inchangée.

- **Angles** : Le produit scalaire est préservé :

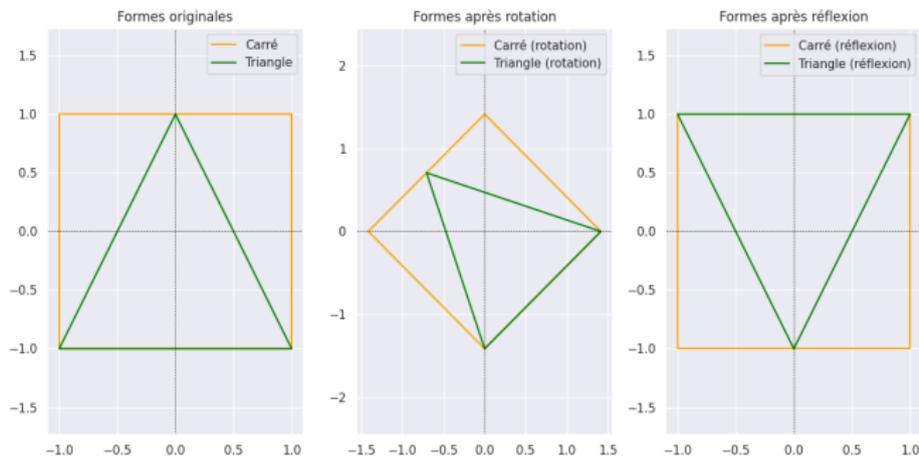
$$(\mathbf{Q}\mathbf{u})^T(\mathbf{Q}\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{I}_n\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}.$$

Comme le produit scalaire définit le cosinus de l'angle entre les vecteurs, les angles entre les vecteurs sont conservés :

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2}.$$

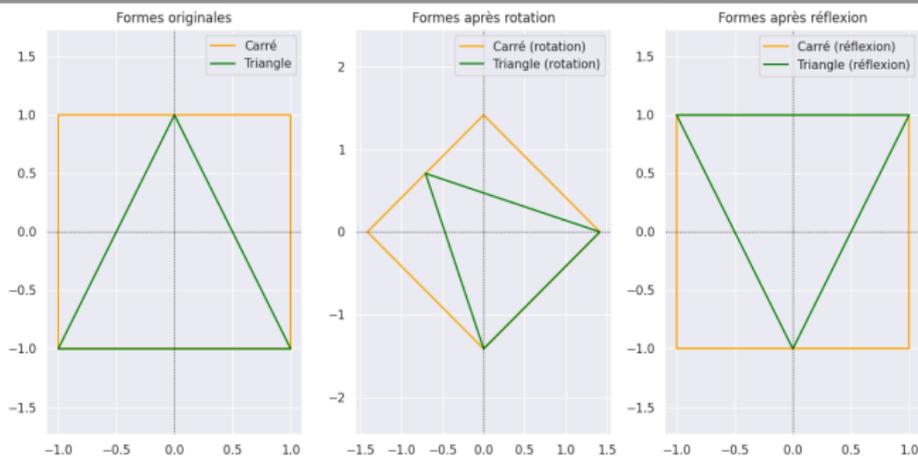
- **Préservation des Formes** : Les formes dans \mathbb{R}^n ne sont pas déformées. Une sphère reste une sphère, et un cube reste un cube, bien que leur orientation puisse changer.

Orthogonalité d'une Matrice : Interprétation Géométrique



- Effet de la rotation :** $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix}$ Les formes (carré et triangle) conservent leur géométrie (angles et distances) mais changent d'orientation en raison de la rotation de 45° .

Orthogonalité d'une Matrice : Interprétation Géométrique



● Effet de la réflexion :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Effet de la réflexion : Les formes (carré et triangle) sont reflétées par rapport à l'axe y , préservant leur géométrie tout en inversant leur orientation.

Orthogonalité d'une Matrice : Exemple Numérique

- Considérons une matrice de rotation en 2D avec un angle de $\theta = \pi/4$ (45°) :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}.$$

- Vérifions les propriétés d'orthogonalité :
 - **Produit avec sa transposée** : $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_2$, donc la matrice est orthogonale.
 - **Préservation de la norme** : Pour un vecteur $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, la norme du vecteur transformé reste inchangée :

$$\|\mathbf{R}\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2 = 1.$$

- **Vérifions cela avec Python.**

Orthogonalité d'une Matrice : Code Python

```
import numpy as np
# Exemple : Matrice de rotation en 2D
theta = np.pi / 4 # Angle de 45 degrés
R = np.array([[np.cos(theta), -np.sin(theta)],
              [np.sin(theta), np.cos(theta)]])
# Vérification de l'orthogonalité
# R.T @ R est équivalent à np.dot(R.T, R)
orthogonal_check = np.allclose(R.T @ R, np.eye(2))
print("Matrice R :")
print(R)
print(f"La matrice R est-elle orthogonale ? {'Oui' if orthogonal_check else 'Non'}")
# Norme préservée
v = np.array([1, 0])
transformed_v = R @ v
original_norm = np.linalg.norm(v)
transformed_norm = np.linalg.norm(transformed_v)
print(f"Norme du vecteur original : {original_norm:.2f}")
print(f"Norme du vecteur transformé : {transformed_norm:.2f}")
```

Résultat :

Matrice R :

```
[[ 0.70710678 -0.70710678]
 [ 0.70710678  0.70710678]]
```

La matrice R est-elle orthogonale ? Oui

Norme du vecteur original : 1.00

Valeurs et Vecteurs Propres

Valeurs et Vecteurs Propres

- **Définition :** Pour une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelé une **valeur propre** et un vecteur non nul $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est appelé un **vecteur propre** associé à λ , s'ils satisfont :

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

- **Interprétation Géométrique :**
 - Le vecteur propre \mathbf{v} représente une direction qui reste inchangée (mais peut être mise à l'échelle) par la transformation \mathbf{A} .
 - La valeur propre λ représente le facteur d'échelle dans cette direction.

Valeurs et Vecteurs Propres

- **Valeurs propres** : Résoudre l'équation caractéristique :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0,$$

où \mathbf{I} est la matrice identité. Les racines de ce polynôme sont les valeurs propres.

- **Vecteurs propres** : Pour chaque valeur propre λ , résoudre :

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Ce système d'équations donne les vecteurs propres associés à λ .

- **Échelle** : La valeur propre λ indique comment le vecteur propre est mis à l'échelle :
 - $\lambda > 1$: étirement.
 - $0 < \lambda < 1$: compression.
 - $\lambda = 1$: aucune mise à l'échelle.
 - $\lambda = 0$: écrasement au vecteur nul.
 - $\lambda < 0$: réflexion et mise à l'échelle.

Valeurs et Vecteurs Propres : Exemples

Matrices de Réflexion :

- Exemple : Une matrice avec ses valeurs et vecteurs propres :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -1.$$

Matrices de Rotation :

- Exemple : La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

- Valeurs propres complexes :

$$\lambda = e^{i\theta}, \quad \lambda = e^{-i\theta}.$$

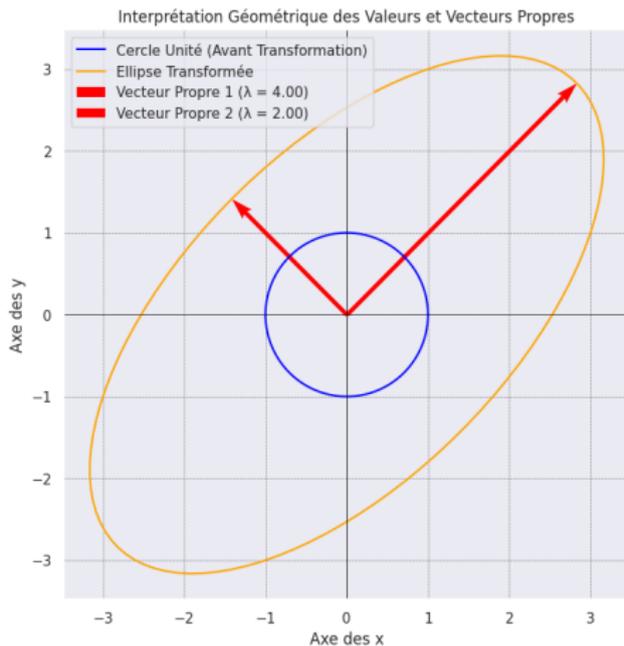
- Interprétation : Cette matrice effectue une rotation des vecteurs d'un angle θ dans \mathbb{R}^2 .

Valeurs et Vecteurs Propres : Interprétation Géométrique

- **Matrice de Transformation, valeurs et vecteurs propres:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2.$$

- **Interprétation Géométrique :**
 - Le cercle unité (en bleu) est transformé en une ellipse (en orange) par \mathbf{A} .
 - Les vecteurs propres (en rouge) indiquent les directions invariantes.
 - les valeurs propres (λ) déterminent l'échelle le long de ces directions.



Propriétés des Valeurs et Vecteurs Propres

- La somme des valeurs propres est égale à la trace de la matrice :

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

- Le produit des valeurs propres est égal au déterminant de la matrice :

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

- **Valeurs Propres Nulles** : Si $\lambda = 0$ est une valeur propre, alors la matrice en question est singulière (non inversible).
- **Indépendance Linéaire** : Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.
- **Pour une matrice symétrique** ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$) :
 - Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
 - Les valeurs propres sont toujours réelles.

Valeurs et Vecteurs Propres : Propriétés

- **Pour une matrice anti-symétrique** ($\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$), les valeurs propres sont purement imaginaires ou nulles.
- **Pour une matrice diagonale** $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{v})$, les valeurs propres sont les diagonaux (les éléments de \mathbf{v}) et les vecteurs propres sont les vecteurs unitaires de la base standard.
- **pour la matrice Identité** \mathbf{I}_n Les valeurs propres sont les éléments diagonaux et tout vecteur de \mathbb{R}^n non nul est un vecteur propre.
- **Pour une matrice orthogonale** ($\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$), Les valeurs propres ont une valeur absolue égale à 1 ($\lambda = \pm 1$) ou des valeurs complexes sur le cercle unité ($|\lambda| = 1$). Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Valeurs et Vecteurs Propres : Cas d'Utilisation

- **Analyse en Composantes Principales (ACP) :**
 - Les vecteurs propres représentent les directions principales de la variance des données.
 - Les valeurs propres mesurent la variance le long de ces directions.
- **Systèmes Dynamiques :**
 - Les valeurs propres déterminent la stabilité des points d'équilibre.
 - Valeurs propres positives : croissance, négatives : décroissance.
- **Mécanique Quantique :**
 - Les valeurs propres représentent des quantités mesurables, comme les niveaux d'énergie.
 - Les vecteurs propres représentent les états correspondants.
- **Élasticité et Déformation :**
 - Les valeurs propres décrivent les contraintes principales (stress) dans les matériaux.
 - Les vecteurs propres indiquent les directions principales associées.

Valeurs et Vecteurs Propres : Code Python

```
import numpy as np
from numpy.linalg import eig
# Exemple : Définir une matrice
A = np.array([[3, 1],
              [1, 3]])
# Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres
eigenvalues, eigenvectors = eig(A)
print("Matrice A:")
print(A)
# Valeurs propres
print("Valeurs propres:")
print(eigenvalues)
# Vecteurs propres
print("Vecteurs propres:")
print(eigenvectors)
```

Résultats :

Matrice A:

```
[[3 1]
 [1 3]]
```

Valeurs propres:

```
[4. 2.]
```

Vecteurs propres:

```
[[ 0.70710678 -0.70710678]
 [ 0.70710678  0.70710678]]
```

Valeurs et Vecteurs Propres : Code Python

```
# Vérification :  $A * v = \lambda * v$  pour chaque vecteur propre
for i in range(len(eigenvalues)):
    v = eigenvectors[:, i]
    lambda_v = eigenvalues[i] * v
    Av = np.dot(A, v)
    print(f"Vérification pour lambda = {eigenvalues[i]:.2f}:")
    print("A * v =", Av)
    print("lambda * v =", lambda_v)
    print("Égalité :", np.allclose(Av, lambda_v))
```

Résultats :

```
Vérification pour lambda = 4.00:
A * v = [2.82842712  2.82842712]
lambda * v = [2.82842712  2.82842712]
Égalité : True
Vérification pour lambda = 2.00:
A * v = [-1.41421356  1.41421356]
lambda * v = [-1.41421356  1.41421356]
Égalité : True
```

Décomposition en Éléments Propres

Décomposition en Éléments Propres

Définition :

- La décomposition en valeurs propres d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ consiste à exprimer \mathbf{A} comme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1},$$

où :

- $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\boldsymbol{\lambda})$ est la matrice diagonale des valeurs propres de \mathbf{A} .
- \mathbf{P} est une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de \mathbf{A} .
- Cela est possible si \mathbf{A} possède n vecteurs propres linéairement indépendants.

Décomposition en Éléments Propres

- **Calcul de l'inverse :**

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{P}^{-1},$$

où $\mathbf{\Lambda}$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de \mathbf{A} et $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ est obtenue en inversant chaque valeur propre sur la diagonale de $\mathbf{\Lambda}$.

- **Calcul des Puissances :**

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1},$$

où $\mathbf{\Lambda}^k$ est la matrice diagonale avec les valeurs propres élevées à la puissance k .

- **Exponentielle de Matrice :**

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{P}^{-1},$$

où $e^{\mathbf{\Lambda}}$ applique l'exponentielle à chaque valeur propre.

Décomposition en Éléments Propres

Propriétés des Matrices Symétriques :

- $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ (matrice symétrique).
- La décomposition est toujours possible pour les matrices symétriques puisque les vecteurs propres sont orthogonaux $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$.
- Décomposition en valeurs propres :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T,$$

où :

- $\mathbf{\Lambda}$ est diagonale avec les valeurs propres réelles.
- \mathbf{Q} est orthogonale ($\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}$).

Décomposition en Éléments Propres

Propriétés des Matrices Orthogonales :

- $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ (matrice orthogonale).
- La décomposition est toujours possible pour les matrices orthogonales puisque les vecteurs propres toujours distincts et orthogonaux
- Décomposition en valeurs propres :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^T,$$

où :

- $\mathbf{\Lambda}$ contient les valeurs propres $|\lambda_i| = 1$.
- \mathbf{P} est une matrice orthogonale.

Décomposition en Éléments Propres

Exemple d'une Matrice Orthogonale :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Décomposition en Valeurs Propres :

- Valeurs Propres :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T, \text{ où tel que } \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \text{ et } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

Interprétation :

- \mathbf{Q} représente une rotation de 90° dans le sens anti-horaire dans \mathbb{R}^2 .
- Les valeurs propres $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$ indiquent une transformation complexe sur le cercle unité.
- Les vecteurs propres associés définissent des directions invariantes sous la transformation.

Décomposition en Élément Propres : Code Python

```
import numpy as np
# Définir la matrice
A = np.array([[4, 1],
              [1, 4]])

# Décomposition en valeurs propres
eigenvalues, eigenvectors = np.linalg.eig(A)

# Matrice diagonale des valeurs propres
Lambda = np.diag(eigenvalues)

# Vérifier la décomposition
P = eigenvectors
P_inv = np.linalg.inv(P)
A_reconstructed = P @ Lambda @ P_inv
```

Décomposition en Élément Propres : Code Python

```
# Afficher les résultats
print("Matrice originale A:", A)
print("Valeurs propres:", eigenvalues)
print("Vecteurs propres (colonnes de P):", P)
print("Matrice diagonale Lambda (valeurs propres):", Lambda)
print("Matrice inverse de P:", P_inv)
print("Matrice reconstruite (A_reconstructed):", A_reconstructed)
```

Résultats :

```
Matrice originale A: [[4 1]
 [1 4]]
Valeurs propres: [5. 3.]
Vecteurs propres (colonnes de P): [[ 0.70710678 -0.70710678]
 [ 0.70710678  0.70710678]]
Matrice diagonale Lambda (valeurs propres): [[5. 0.]
 [0. 3.]]
Matrice inverse de P: [[ 0.70710678  0.70710678]
 [-0.70710678  0.70710678]]
Matrice reconstruite (A_reconstructed): [[4. 1.]
 [1. 4.]]
```

Formes Quadratiques et Matrices Semi-Définies Positives

Formes Quadratiques et Matrices SDP

- Une matrice \mathbf{A} est **semi-définie positive** (SDP) si et seulement si :

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

- Une matrice \mathbf{A} est **semi-définie positive** si toutes les valeurs propres de \mathbf{A} sont positives :

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{pour tout } i.$$

- Les valeurs propres de \mathbf{A} déterminent la forme de la surface.
- Les vecteurs propres de \mathbf{A} représentent les directions principales (axes).

Formes Quadratiques et Matrices SDP

Pour une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, la forme quadratique :

$$q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

décrit une surface dans \mathbb{R}^3 .

Cas principaux :

- Matrice SDP : parabolôide elliptique (valeurs propres ≥ 0).
- Matrice indéfinie : surface en forme de selle (valeurs propres mixtes).
- Matrice SDN : parabolôide elliptique inversé (valeurs propres ≤ 0).

Formes Quadratiques et SDP : Exemples Numériques

Exemple 1 : Matrice SDP

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Valeurs propres : $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ ($\lambda_i \geq 0$).
- Forme quadratique : $q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 \geq 0$.

Exemple 2 : Matrice Indéfinie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Valeurs propres : $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$ (signes mixtes).
- Forme quadratique : $q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2$.
- Surface : Forme de selle.

Formes Quadratiques et SDP : Interprétation Géométrique

- Les formes quadratiques définissent la courbure des surfaces :
 - **Matrice SDP** : Paraboloïde elliptique ouvert vers le haut.
 - **Matrice SDN** : Paraboloïde elliptique ouvert vers le bas.
 - **Matrice Indéfinie** : Surface en forme de selle.

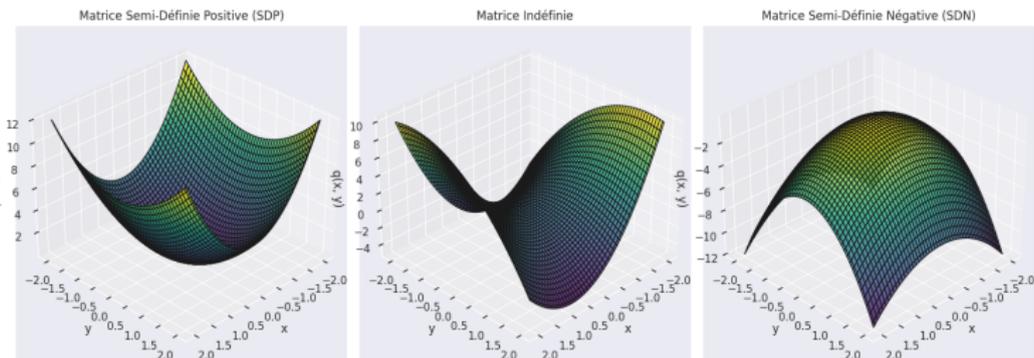


Figure: Interprétation géométrique des formes quadratiques.

Formes Quadratiques et SDP : Code Python

```
import numpy as np

# Définir la matrice A et le vecteur x
A = np.array([[2, 1],
              [1, 3]])
x = np.array([1, 2])

# Calcul de la forme quadratique
q = x.T @ A @ x

print("Matrice A:")
print(A)
print("Vecteur x:")
print(x)
print("Valeur de la forme quadratique q(x):", q)
```

Résultat :

Matrice A:

```
[[2 1]
 [1 3]]
```

Vecteur x:

```
[1 2]
```

Valeur de la forme quadratique q(x): 12

Formes Quadratiques et SDP : Cas d'Utilisation

- **Optimisation :**

- $q(\mathbf{x})$ est centrale dans les problèmes d'optimisation, car elle décrit souvent la fonction objective (par exemple, dans la programmation quadratique)

- **Physique et ingénierie :**

- Décrire l'énergie et la stabilité des systèmes physiques.

- **Apprentissage automatique :**

- Utilisées dans les noyaux pour les SVM et l'ACP.

- **Systemes dynamiques :**

- Les fonctions de Lyapunov basées sur les matrices SDP garantissent la stabilité.

Calcul Matriciel

Le Gradient et la Matrice Jacobienne

Gradient et Jacobienne

- **Gradient** : Le gradient d'une fonction scalaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par rapport au vecteur $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ est :

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

- Le gradient pointe dans la direction de la plus grande augmentation de f .
- **Jacobienne** : Pour une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, la matrice Jacobienne est définie comme :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Le Gradient d'une Fonction à Plusieurs Variables

Gradient : Exemple Numérique

- Le gradient d'une fonction scalaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par rapport au vecteur $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ est :

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T.$$

- Pour l'exemple du gradient**, Considérons la fonction scalaire :

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 3x_1x_2 - 4x_2^2.$$

- Son gradient est donné par :

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 - 8x_2 \end{bmatrix}.$$

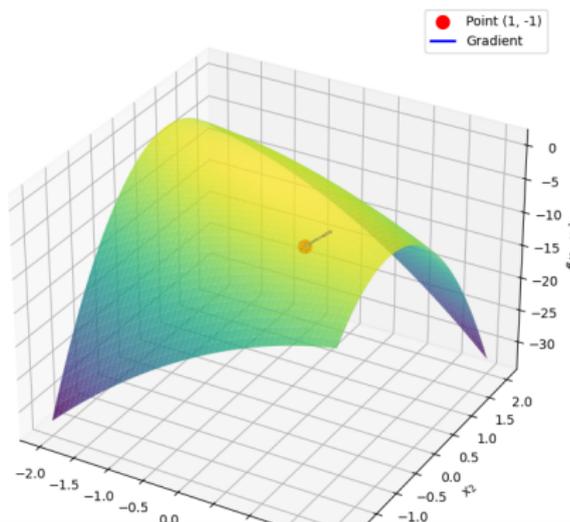
- En $(x_1, x_2) = (1, -1)$, le gradient est :

$$\nabla f(1, -1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Gradient : Interprétation Géométrique

- La figure ci-dessous illustre la surface concave définie par $f(x_1, x_2)$, ainsi que le gradient ∇f en $(x_1, x_2) = (1, -1)$.
- Le gradient (vecteur bleu) pointe dans la direction de la plus grande augmentation de f .

Illustration 3D du Gradient de $f(x_1, x_2)$ (Surface Concave)



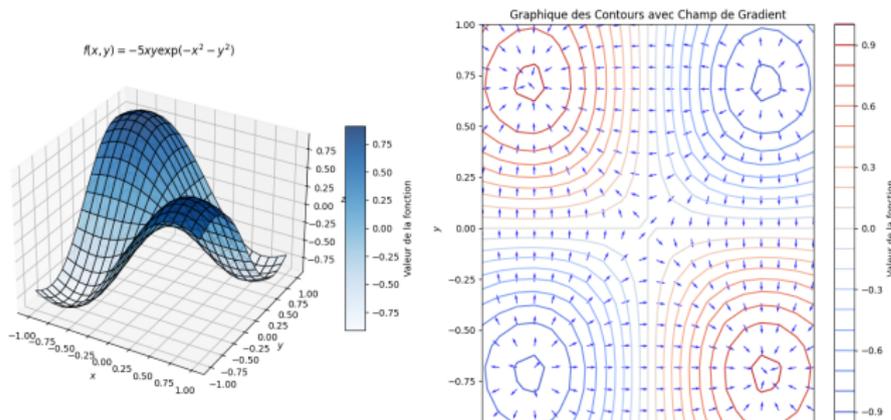
Gradient : Interprétation Géométrique

- Pour des fins de visualisation, considérons la fonction :

$$f(x_1, x_2) = -5x_1x_2 \exp(-x_1^2 - x_2^2)$$

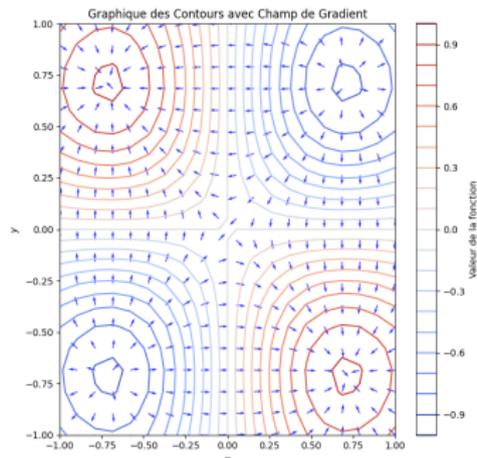
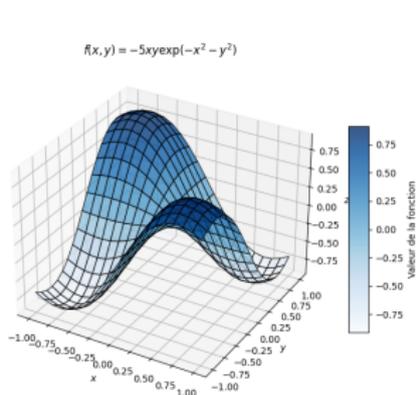
- Expression du gradient :

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_2(1 - 2x_1^2) \exp(-x_1^2 - x_2^2) \\ -5x_1(1 - 2x_2^2) \exp(-x_1^2 - x_2^2) \end{bmatrix}.$$



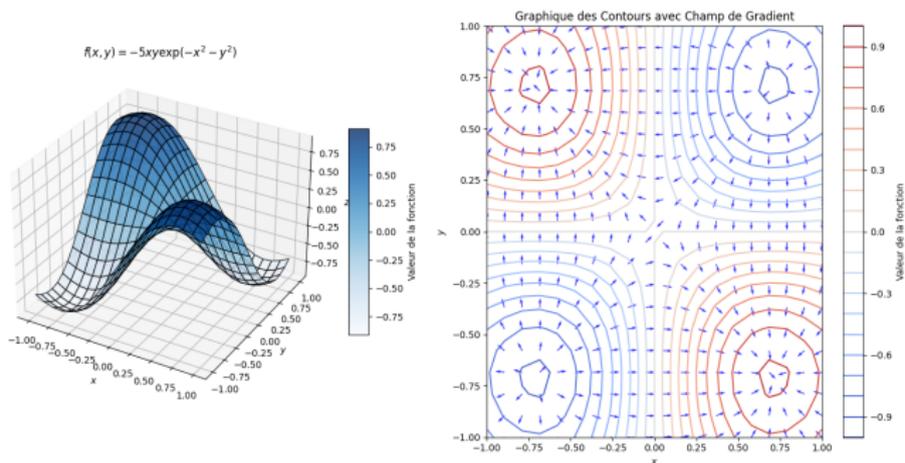
Gradient : Interprétation Géométrique

- Le gradient $\nabla f(x_1, x_2)$ pointe dans la direction de l'augmentation la plus rapide de la fonction scalaire $f(x_1, x_2)$ au point donné.
- Inversement, $-\nabla f(x_1, x_2)$ pointe dans la direction de la plus grande diminution.



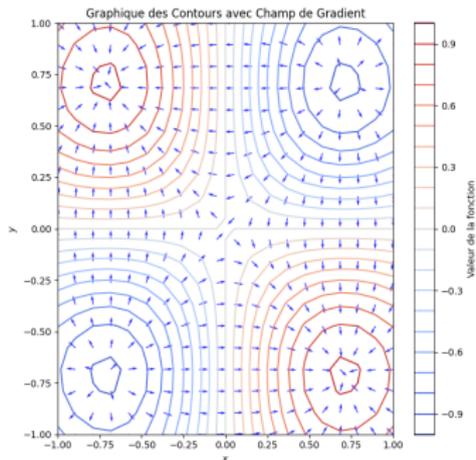
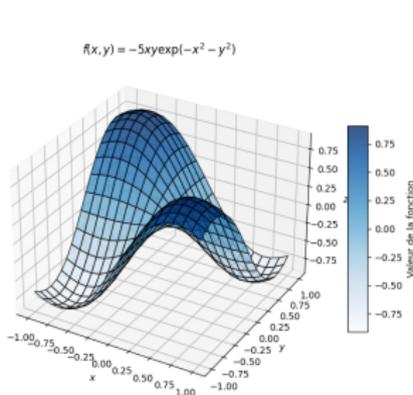
Gradient : Interprétation Géométrique

- Le gradient est toujours **orthogonal** (perpendiculaire) aux courbes de niveau (ou contours) de $f(x_1, x_2)$.
- Si l'on trace les contours de $f(x_1, x_2)$, les vecteurs du gradient intersecteront ces courbes à angle droit.



Gradient : Interprétation Géométrique

- La magnitude $\|\nabla f(x_1, x_2)\|$ représente la rapidité du changement de f dans la direction du gradient.
- Une grande magnitude indique une pente raide.
- Une petite magnitude implique une surface plus plate.



Gradient : Code Python

```

from sympy import symbols, diff

# 1. Define symbolic variables
x, y = symbols('x y')

# 2. Define the scalar function
f = -x**2 - 3*x*y - 4*y**2

# 3. Compute the gradient symbolically
grad_f = [diff(f, var) for var in (x, y)]

# Display the gradient
print(f"Gradient: {grad_f}")

# 4. Evaluate the gradient at (1, -1)
point = {x: 1, y: -1}
evaluated_grad = [grad.subs(point) for grad in grad_f]
print(f"Gradient at {point}: {evaluated_grad}")
    
```

Résultat :

```

Gradient: [-2*x - 3*y, -3*x - 8*y]
Gradient at {x: 1, y: -1}: [1, 5]
    
```

La Matrice Jacobienne

La Matrice Jacobienne

- **Jacobienne** : Pour une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, la matrice Jacobienne est définie comme :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

- La Jacobienne représente une **approximation linéaire** de comment \mathbf{f} transforme les points dans l'espace d'entrée.
 - **Transformation linéaire locale** : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.
- **Déterminant de la Jacobienne** :
 - Mesure l'effet local sur les surfaces ou les volumes.
 - **Interprétation** :
 - $\det(\mathbf{J}) > 0$: La transformation conserve l'orientation.
 - $\det(\mathbf{J}) < 0$: La transformation inverse l'orientation.
 - $|\det(\mathbf{J})|$: Indique l'expansion ou la contraction locale.

La Matrice Jacobienne : Exemple Numérique

- **Fonction considérée :**

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{bmatrix}.$$

- **Expression de la Jacobienne :**

$$\mathbf{J}_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -1 \\ 1 & 2x_2 \end{bmatrix}.$$

- **Calcul du déterminant de la Jacobienne :**

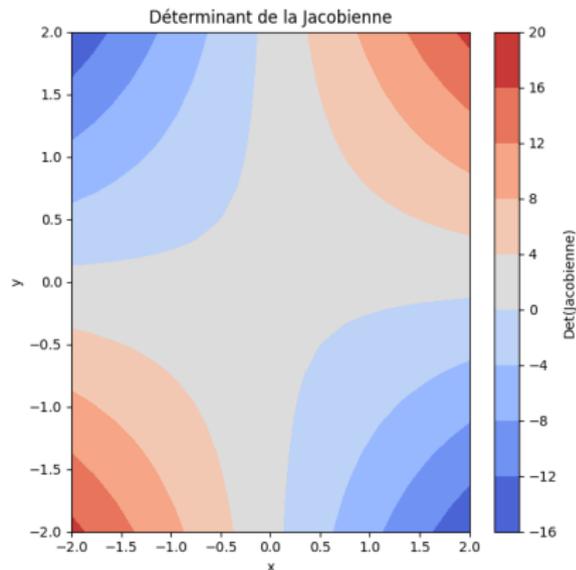
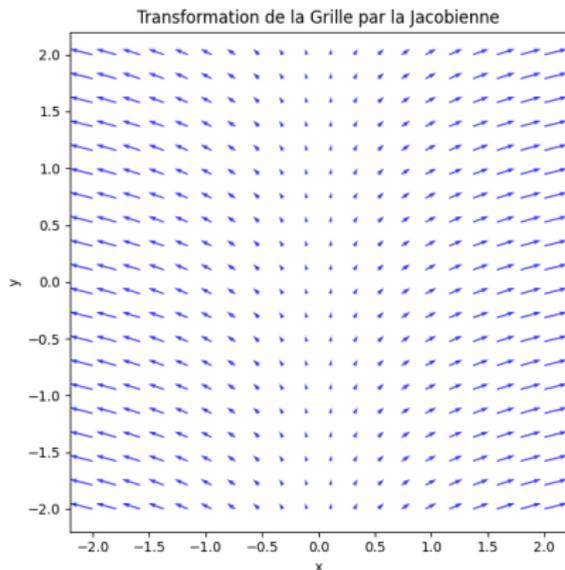
$$\det(\mathbf{J}) = \det \begin{vmatrix} 2x_1 & -1 \\ 1 & 2x_2 \end{vmatrix} = 4x_1x_2 + 1.$$

- En $(x_1, x_2) = (1, 1)$:

$$\mathbf{J}_f(1, 1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \det(\mathbf{J}) = 5.$$

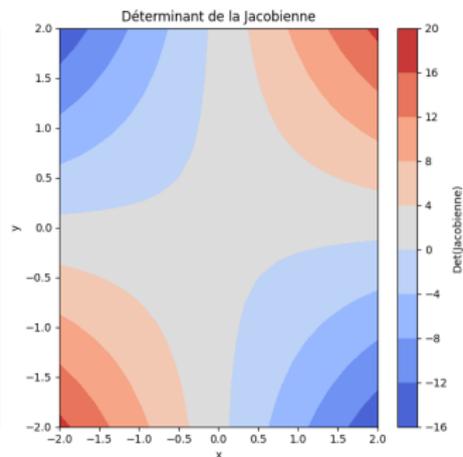
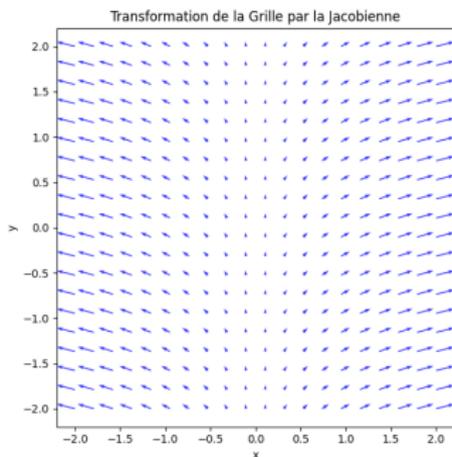
La Matrice Jacobienne : Interprétation Géométrique

- La figure ci-dessous illustre :
 - À gauche : La transformation d'une grille régulière par la Jacobienne.
 - À droite : Le déterminant de la Jacobienne en chaque point.



La Matrice Jacobienne : Interprétation Géométrique

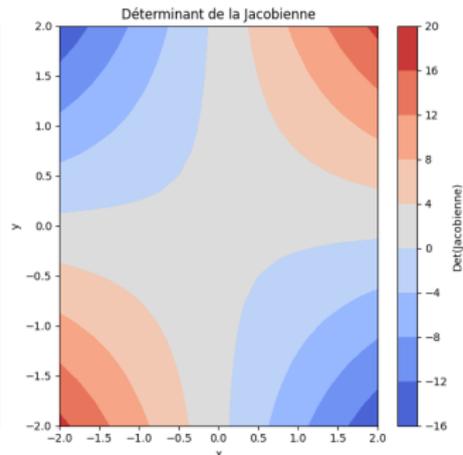
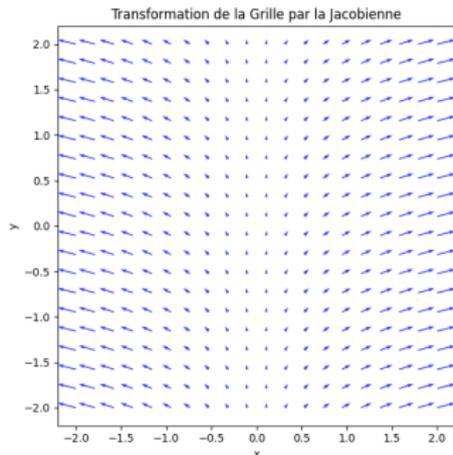
- La figure ci-dessous illustre :
 - Le champ de gradient dans un graphe des contours.
 - La direction orthogonale des vecteurs de gradient par rapport aux contours de $f(x_1, x_2)$.
 - Comment la Jacobienne capture la mise à l'échelle et les directions locales.



La Matrice Jacobienne : Interprétation Géométrique

● Transformation locale de l'espace :

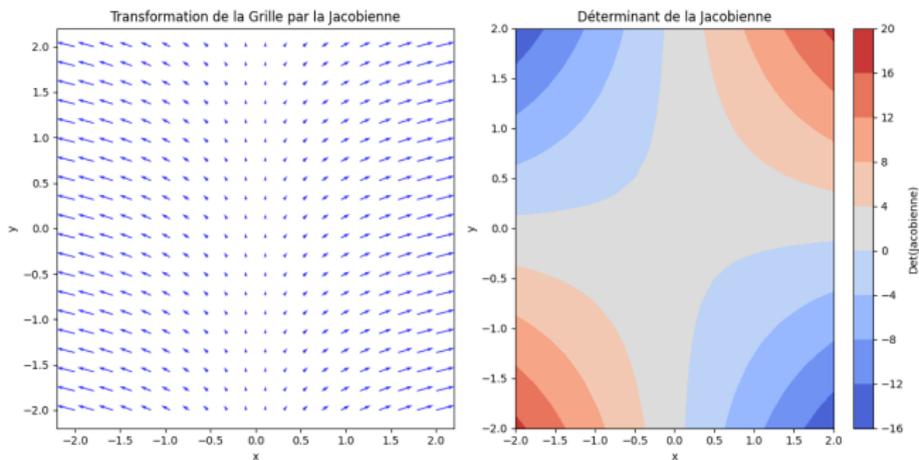
- La matrice Jacobienne représente une **approximation linéaire** de la manière dont la fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ transforme les points dans l'espace d'entrée.
- Par exemple, dans \mathbb{R}^2 , la Jacobienne détermine comment les petites régions autour d'un point sont étirées, comprimées ou tournées.



La Matrice Jacobienne : Interprétation Géométrique

- **Directions et mise à l'échelle :**

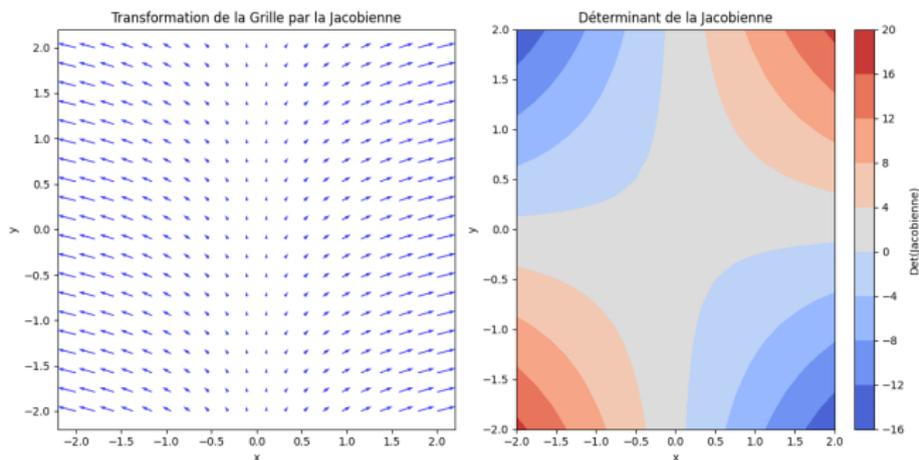
- Les lignes de la Jacobienne décrivent le **gradient de chaque composante de sortie** $f_i(x_1, x_2)$.
- Ces gradients indiquent la direction de la plus grande augmentation pour chaque composante de la fonction.



La Matrice Jacobienne : Interprétation Géométrique

- **Lien avec le champ de gradient :**

- Pour les fonctions scalaires $f(x_1, x_2)$, la Jacobienne se réduit au gradient $\nabla f(x_1, x_2)$, qui décrit comment le champ scalaire évolue localement.



La Matrice Jacobienne : Cas d'Utilisation

La Jacobienne est essentielle car elle :

- **Adapte les éléments de volume ou de surface** lors de transformations de variables.
- **Assure la conservation des probabilités** dans les changements de variables pour les distributions.
- **Quantifie les effets locaux** d'une transformation sur les volumes ou densités.

En intégration multivariable et en probabilités, la Jacobienne et son déterminant sont donc indispensables pour garantir que les résultats soient corrects dans le nouvel espace transformé.

La Matrice Jacobienne : Code Python

```

from sympy import symbols, Matrix

# 1. Define symbolic variables
x, y = symbols('x y')

# 2. Define the vector-valued function
f_vector = Matrix([x**2 - y, x + y**2])

# 3. Compute the Jacobian matrix symbolically
jacobian_matrix = f_vector.jacobian([x, y])

# Display the Jacobian matrix
print(f"Jacobian matrix:\n{jacobian_matrix}")

# 4. Evaluate the Jacobian at (1, 1)
point = {x: 1, y: 1}
evaluated_jacobian = jacobian_matrix.subs(point)
print(f"Jacobian matrix at {point}:\n{evaluated_jacobian}")

```

Résultat :

```

Jacobian matrix:
[[2*x, -1]
 [1, 2*y]]
Jacobian matrix at {x: 1, y: 1}:
[[2, -1]
 [1, 2]]

```

La Matrice Hessienne

La Matrice Hessienne

- **Hessienne** : Pour une fonction scalaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la matrice Hessienne est définie comme la matrice des dérivées secondes :

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

- La matrice Hessienne représente la **courbure locale** de la fonction f .
 - Si \mathbf{H} est définie positive, f a un **minimum local**.
 - Si \mathbf{H} est définie négative, f a un **maximum local**.
 - Si \mathbf{H} a des valeurs propres positives et négatives, f a un **point selle**.
- **Approximation quadratique** : La Hessienne permet d'approximer $f(\mathbf{x})$ localement autour d'un point \mathbf{x}_0 :

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Matrice Hessienne : Propriétés

- **Symétrie** : La matrice Hessienne est **symétrique** pour les fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque les dérivées partielles secondes mixtes sont continues :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

- **Semi-définie positive pour les fonctions convexes** : Si f est une fonction **convexe**, alors la matrice Hessienne \mathbf{H}_f est **semi-définie positive** :

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H}_f \mathbf{v} \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Si $f(x)$ est **strictement convexe**, alors \mathbf{H}_f est **définie positive** :

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H}_f \mathbf{v} > 0, \quad \forall \mathbf{v} \neq 0.$$

Matrice Hessienne : Propriétés

- **Semi-définie négative pour les fonctions concaves** : Si f est une fonction **concave**, alors \mathbf{H}_f est **semi-définie négative** :

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H}_f \mathbf{v} \leq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Si $f(x)$ est **strictement concave**, alors \mathbf{H}_f est **définie négative** :

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H}_f \mathbf{v} < 0, \quad \forall \mathbf{v} \neq 0.$$

- **Valeurs propres et courbure** : Les valeurs propres de la matrice Hessienne décrivent la courbure locale de la fonction :
 - Si les valeurs propres sont **positives**, f possède un **minimum local**.
 - Si les valeurs propres sont **négatives**, f possède un **maximum local**.
 - Si les valeurs propres sont **mixtes**, f possède un **point selle**.

Matrice Hessienne : Propriétés

- **Forme quadratique** : Pour des petites perturbations $\Delta \mathbf{x}$ proches d'un point \mathbf{x} , l'expansion de Taylor au second ordre inclut la Hessienne :

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H}_f \Delta \mathbf{x}.$$

Le terme $\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}$ décrit comment $f(\mathbf{x})$ se courbe localement autour de \mathbf{x} .

- **Analyse des points critiques** : Au niveau d'un point critique ($\nabla f(\mathbf{x}) = 0$) :
 - Minimum : \mathbf{H}_f est définie positive.
 - Maximum : \mathbf{H}_f est définie négative.
 - Point selle : \mathbf{H}_f a des valeurs propres de signes opposés.

Matrice Hessienne : Propriétés

- **Invariance par l'échelle des vecteurs propres** : Les vecteurs propres de la Hessienne indiquent les directions principales de la courbure, indépendamment de l'échelle.
- **Semi-définie positive dans les moindres carrés** : Dans les problèmes de régression des moindres carrés, la Hessienne de la fonction objectif est toujours **symétrique et semi-définie positive**.
 - \Rightarrow Il suffit donc de trouver le point critique où $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ pour trouver la solution minimale (Minimum).

La Matrice Hessienne : Exemple Numérique

- **Fonction considérée :**

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2.$$

- **Expression de la Hessienne :**

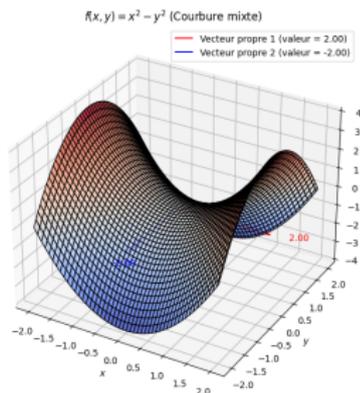
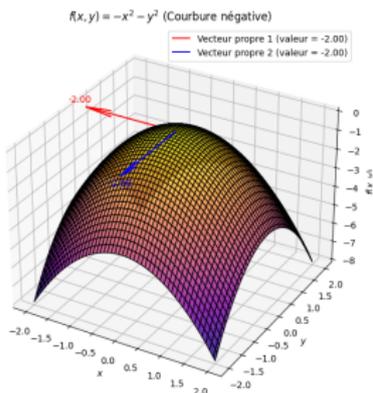
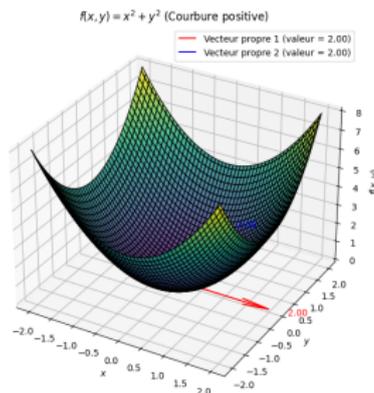
$$\mathbf{H}_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

- En $(x_1, x_2) = (1, 2)$, la matrice Hessienne reste constante :

$$\mathbf{H}_f(1, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

La Matrice Hessienne : Interprétation Géométrique

- La matrice Hessienne capture la courbure locale de $f(\mathbf{x})$.
- **Points critiques et Hessienne :**
 - Minimum local : Courbure positive ($\mathbf{H} \geq 0$ (SDP)).
 - Maximum local : Courbure négative ($\mathbf{H} \leq 0$ (SDN)).
 - Point selle : Courbure mixte (\mathbf{H} indéfinie).



La Matrice Hessienne : Code Python

```

from sympy import symbols, hessian

# 1. Define symbolic variables
x1, x2 = symbols('x1 x2')

# 2. Define the scalar function
f = x1**2 + 3*x1*x2 + 2*x2**2

# 3. Compute the Hessian matrix symbolically
hessian_matrix = hessian(f, (x1, x2))

# Display the Hessian matrix
print(f"Hessian matrix:\n{hessian_matrix}")

# 4. Evaluate the Hessian at (1, 2)
point = {x1: 1, x2: 2}
evaluated_hessian = hessian_matrix.subs(point)
print(f"Hessian matrix at {point}:\n{evaluated_hessian}")

```

Résultat :

```

Hessian matrix:
[[2, 3]
 [3, 4]]
Hessian matrix at {x1: 1, x2: 2}:
[[2, 3]
 [3, 4]]

```

Dérivées Matricielles

Dérivées Matricielles : Notation

- Dans le calcul matriciel, deux notations principales sont utilisées pour représenter les dérivées matricielles :
 - la notation de numérateur.
 - la notation de dénominateur.
- **Notation de numérateur** : La dérivée d'un scalaire y par rapport à un vecteur $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ est écrite (dans la notation de numérateur) comme suit :

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right].$$

- La dérivée d'un scalaire par rapport à un vecteur \mathbf{x} est donc la transposée du gradient :

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)^T.$$

Dérivées Matricielles : Notation

- **Notation de dénominateur** : La dérivée d'un scalaire y par rapport à un vecteur \mathbf{x} est écrite (dans la notation de dénominateur) comme suit :

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right).$$

- Dans cette notation, la dérivée d'un scalaire par rapport à un vecteur est simplement le gradient sans transposition :

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Dérivées Matricielles : Types

Nous allons utiliser la notation de numérateur pour les dérivées matricielles. Les six types de dérivées impliquant des scalaires, des vecteurs et des matrices peuvent être organisés comme suit. Ces dérivées apparaissent lorsque l'on considère les relations entre ces objets mathématiques et leurs composantes.

Table: Types de Dérivées Matricielles

Types	Scalaire (y)	Vecteur (y)	Matrice (y)
Scalaire (x)	$\frac{\partial y}{\partial x}$	$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}$	$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x}$
Vecteur (\mathbf{x})	$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}$	$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$	-
Matrice (\mathbf{X})	$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{X}}$	-	-

Dérivées Matricielles : Types

- **Scalaire-à-Scalaire** ($\frac{\partial y}{\partial x}$) : La dérivée classique d'une fonction scalaire par rapport à une variable scalaire.
 - y est un scalaire de taille 1×1 ,
 - x est un scalaire de taille 1×1 .
 - **Dimension de** $\frac{\partial y}{\partial x}$: Scalaire (1×1).
- **Scalaire-à-Vecteur** ($\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}$) :
 - y est un scalaire de taille 1×1 ,
 - \mathbf{x} est un vecteur de taille $n \times 1$.
 - **Dimension de** $\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}$: Vecteur ligne (Transposée du gradient) ($1 \times n$).
- **Scalaire-à-Matrice** ($\frac{\partial y}{\partial \mathbf{X}}$) : Gradient matriciel, souvent utilisé dans les problèmes d'optimisation avec des variables matricielles.
 - y est un scalaire de taille 1×1 ,
 - \mathbf{X} est une matrice de taille $m \times n$.
 - **Dimension de** $\frac{\partial y}{\partial \mathbf{X}}$: lignes et colonnes interchangées ($n \times m$).

Dérivées Matricielles : Types

- **Vecteur-à-Scalaire** ($\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}$) : Une dérivée décrivant comment chaque composante d'un vecteur dépend d'un scalaire.
 - \mathbf{y} est un vecteur de taille $m \times 1$.
 - **Dimension de** $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}$: Vecteur ($m \times 1$).
- **Vecteur-à-Vecteur** ($\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$) : La matrice Jacobienne, où chaque élément représente une dérivée partielle d'une composante du vecteur par rapport à une variable vectorielle.
 - \mathbf{y} est un vecteur de taille $m \times 1$,
 - \mathbf{x} est un vecteur de taille $n \times 1$.
 - **Dimension de** $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$: Matrice ($m \times n$).
- **Matrice-à-Scalaire** ($\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x}$) : Une dérivée de la même dimension que la matrice \mathbf{Y} .
 - \mathbf{Y} est une matrice de taille $m \times n$.
 - **Dimension de** $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x}$: Matrice ($m \times n$).

Dérivées Matricielles : Types

- **Dérivée d'une matrice par rapport à un vecteur :**

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{v}} \Rightarrow \text{Dimension : } (m \cdot n) \times p.$$

- **Dérivée d'un vecteur par rapport à une matrice :**

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{M}} \Rightarrow \text{Dimension : } p \times (m \cdot n).$$

- **Dérivée d'une matrice par rapport à une matrice :**

$$\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \mathbf{M}_2} \Rightarrow \text{Dimension : } (m_1 \cdot n_1) \times (m_2 \cdot n_2).$$

- Ces résultats correspondent à des **tenseurs de différents rangs et on en n'aura besoin dans notre cours.**

Dérivées Matricielles : Calcul

- La dérivée d'un vecteur **a** **par rapport à un scalaire** x est un vecteur dont les composantes sont données par :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \right)_i = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x} \right).$$

- Une définition analogue existe pour la dérivée d'un scalaire ou d'un vecteur **par rapport à un autre vecteur** où les composantes sont données par :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{a}} \right)_i = \frac{\partial x}{\partial a_i}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{b}} \right)_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial b_j}.$$

- **Comment obtenir la formule d'une dérivée matricielle ?**

Exemple : $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{a}) .$

Dérivées Matricielles : Calcul

- **Calculons** : $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{a})$, où nous avons:
 - \mathbf{x} est un vecteur colonne de taille $n \times 1$,
 - \mathbf{a} est un vecteur colonne de taille $n \times 1$.
 - \Rightarrow Dérivée Scalaire-à-Vecteur \Rightarrow Dim $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{a})$ est de $1 \times n$
- **Étape 1 : Expansion de l'expression en termes de scalaires** :
 - Pour $\mathbf{x}^T \mathbf{a}$: $\mathbf{x}^T \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n x_i a_i$,
 - où x_i et a_i sont les composantes respectives de \mathbf{x} et \mathbf{a} .
- **Étape 2 : Calcul de la dérivée de l'expression en termes de scalaires.**
- **Étape 3 : Réécrire la dérivée calculée en notation matricielle ou vectorielle (Si c'est possible).**

ÉDérivées Matricielles : Calcul

- La dérivée d'une fonction scalaire $f(\mathbf{x})$ par rapport à un vecteur \mathbf{x} est un vecteur dont la i -ème composante est :

$$\left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_i = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}.$$

- **Calcul :** $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n x_i a_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{x}^T \mathbf{a}) = a_i.$
- Donc, la dérivée est :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{a}) = [a_1, a_2, \dots, a_n] = \mathbf{a}^T.$$

- **De même pour.** $\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} (\mathbf{a}^T \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T$

Dérivées Matricielles : Calcul

- **Calculons** : $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{Ax})$, où nous avons :
 - \mathbf{A} est une matrice de taille $m \times n$,
 - \mathbf{x} est un vecteur colonne de taille $n \times 1$.
 - \Rightarrow Dérivée Vecteur-à-Vecteur \Rightarrow Dim de $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{Ax})$: $m \times n$
- **Étape 1 : Expansion de l'expression en termes de scalaires** :
 - \mathbf{Ax} produit un vecteur colonne de taille $m \times 1$,
 - L'élément i -ième de \mathbf{Ax} est donné par :

$$(\mathbf{Ax})_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j,$$

où A_{ij} est l'élément de la i -ième ligne et j -ième colonne de \mathbf{A} , et x_j est le j -ième composant de \mathbf{x} .

- **Étape 2 : Calcul des dérivées en termes de scalaires.**
- **Étape 3 : Réécrire les dérivées en notation matricielle.**

Dérivées Matricielles : Calcul

- **Expansion scalaire** : pour calculer $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{Ax})$

$$(\mathbf{Ax})_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j.$$

- **Calcul de la dérivée** :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Ax}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{ik} = \frac{\partial (\mathbf{Ax})_i}{\partial x_k} = A_{ik}.$$

- Cette dérivée est une matrice de taille $m \times n \Rightarrow$ c'est la matrice \mathbf{A} .
- **Résultat matriciel** : La dérivée complète est donnée par :

$$\frac{\partial (\mathbf{Ax})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}.$$

Dérivées Matricielles : Calcul

- **Calculons** : $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{a}^\top \mathbf{X} \mathbf{b})$, où nous avons :
 - \mathbf{X} est une matrice de taille $n \times n$,
 - \mathbf{a} et \mathbf{b} sont des vecteurs colonne de taille $n \times 1$. \Rightarrow Dérivée de Scalaire-à-Matrice \Rightarrow Dim est de $n \times n$
- **Étape 1 : Expansion de l'expression en termes de scalaires** :
 - $\mathbf{a}^\top \mathbf{X} \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i X_{ij} b_j$,
 - où a_i , b_j , et X_{ij} sont les composantes respectives de \mathbf{a} , \mathbf{b} , et \mathbf{X} .
- **Étape 2 : Calcul de la dérivée de l'expression en termes de scalaires.**
- **Étape 3 : Réécrire la dérivée calculée en notation matricielle (si possible).**

Dérivées Matricielles : Calcul

- La dérivée d'une fonction scalaire $f(\mathbf{X})$ par rapport à une matrice \mathbf{X} donne une matrice, dont l'élément (i, j) est :

$$\left[\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right]_{ij} = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial X_{ij}}.$$

- Calcul :**

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{X} \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i X_{ij} b_j.$$

- En dérivant par rapport à X_{ij} , seul le terme contenant X_{ij} reste :

$$\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial X_{ij}} = a_i b_j.$$

- La matrice dont l'élément (i, j) est donné par $a_i b_j$ est exprimée par le produit extérieur (outer product) des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} . Par conséquent, la dérivée est : $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{a}^\top \mathbf{X} \mathbf{b}) = \mathbf{a} \mathbf{b}^\top$.

Calcul Matricielle : Formules importantes

- **Dérivée d'un scalaire par rapport à une matrice**

Si $y = \mathbf{a}^T \mathbf{X} \mathbf{b}$ où \mathbf{a} et \mathbf{b} sont des vecteurs constants et \mathbf{X} est une matrice, alors :

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T$$

- **Dérivée d'une matrice par rapport à elle-même**

Si \mathbf{X} est une matrice :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I}$$

où \mathbf{I} est la matrice identité de taille appropriée.

- **Trace d'un produit matriciel**

Si \mathbf{A} est une matrice constante et \mathbf{X} une matrice variable :

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A}^T$$

Calcul Matricielle : Formules importantes

- **Forme quadratique**

Pour $y = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ où \mathbf{x} est un vecteur et \mathbf{A} une matrice symétrique constante :

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$$

- **Produit matrice-matrice**

Pour $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}$ où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices constantes et \mathbf{X} une matrice variable :

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$$

- **Inverse d'une matrice**

Si \mathbf{X} est une matrice inversible :

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1})}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{X}^{-T} \mathbf{A}^T \mathbf{X}^{-T}$$

Dérivées Matricielles : Formules

- Pour le produit de matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} , nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{AB}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{B} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}.$$

- La dérivée de l'inverse d'une matrice \mathbf{A} peut être exprimée comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}^{-1}) = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{A}^{-1}.$$

- La dérivée du logarithme du déterminant d'une matrice \mathbf{A} est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln |\mathbf{A}| = \text{Tr} \left(\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right).$$

- Si \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices, alors :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \text{Tr}(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^\top.$$

Dérivées Matricielles : Formules

- En utilisant cette notation, les propriétés suivantes sont valides :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \text{Tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{B}) = \mathbf{B}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \text{Tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{I}.$$

- Pour une matrice symétrique \mathbf{A} :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^\top) = \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^\top).$$

- La dérivée du logarithme du déterminant est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \ln |\mathbf{A}| = (\mathbf{A}^{-1})^\top.$$

- Norme de Frobenius d'une matrice**

Pour la norme de Frobenius au carré, $\|\mathbf{X}\|_F^2 = \text{tr}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})$, la dérivée par rapport à \mathbf{X} est :

$$\frac{\partial \|\mathbf{X}\|_F^2}{\partial \mathbf{X}} = 2\mathbf{X}$$

- Pour une revue plus complète, consultez : [The Matrix Cookbook](#). 

Table des Matières

- 1 Notation
- 2 Algèbre Linéaire
- 3 Optimization**
- 4 Probabilité
- 5 Statistiques

Rappel sur l'Optimisation

Formulation du Problème d'Optimisation

Formulation du Problème d'Optimisation

- **Définition** : L'optimisation consiste à trouver les valeurs des variables d'entrée \mathbf{x} qui minimisent (ou maximisent) une fonction objectif $f(\mathbf{x})$.
- **Objectif** :
 - Trouver un **minimum global** ou un **minimum local**.
 - Résoudre :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}).$$

- **Applications** :
 - Régression linéaire, entraînement des réseaux de neurones.
- **Formulations des problèmes d'optimisation** :
 - **Sans contrainte** : $\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$, où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
 - **Avec contrainte(s)** : $\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$, **sous les contraintes** :
 $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ (**contraintes d'inégalité**),
 $h_j(\mathbf{x}) = 0$ (**contraintes d'égalité**). où g_i et h_j des fonctions scalaires.

Solutions Analytiques pour l'Optimisation

Optimisation : Solutions Analytiques

• Concept Fondamental :

- Une solution analytique est obtenue en résolvant directement les équations de l'objectif.
- Par exemple, pour une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$, la solution est obtenue en résolvant :

$$\frac{df}{dx} = 2ax + b = 0.$$

• Interprétation Géométrique :

- Le point critique (x^*) est le point où la pente de la courbe est nulle ($\frac{df}{dx} = 0$).
- Ce point représente un minimum ou un maximum en fonction de la concavité de $f(x)$.

• Limites :

- Difficile pour des fonctions non linéaires, non convexes ou en haute dimension.
- Sensible aux matrices mal conditionnées.

Solutions Analytiques : Exemple Numérique

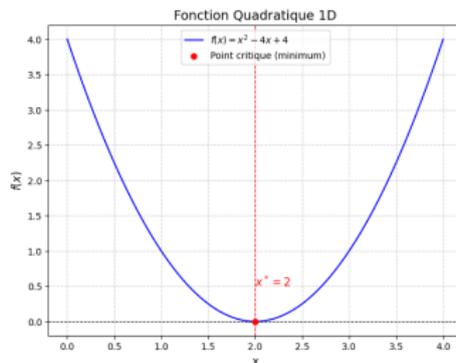
- **Fonction à optimiser :**

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

- **Solution analytique :**

$$\frac{df}{dx} = 2x - 4 = 0 \implies x^* = 2$$

- **Résultat :** Le minimum se trouve en $x = 2$, et $f(2) = 0$.



Solutions Analytiques : Limites

- **Limites des solutions analytiques :**
 - Peuvent être difficiles, voire impossibles, à obtenir pour :
 - Des fonctions non convexes ou non différentiables.
 - Des espaces de recherche de très grande dimension.
 - Des systèmes avec contraintes complexes.
 - Nécessitent des inversions de matrices coûteuses dans certains cas, comme la régression linéaire.
- **Exemples de défis :**
 - **Optimisation non convexe :** Les fonctions ayant des minima locaux rendent les solutions analytiques inutilisables.
 - **Fonctions avec bruit :** Les objectifs bruités ou irréguliers compliquent le calcul exact.
- **Solution alternative :** Utiliser des approches **itératives** comme les méthodes basées sur le gradient.
- **Intuition :**
 - Avancer dans la direction où la fonction diminue le plus rapidement.
 - Approcher le minimum global en utilisant des techniques numériques.

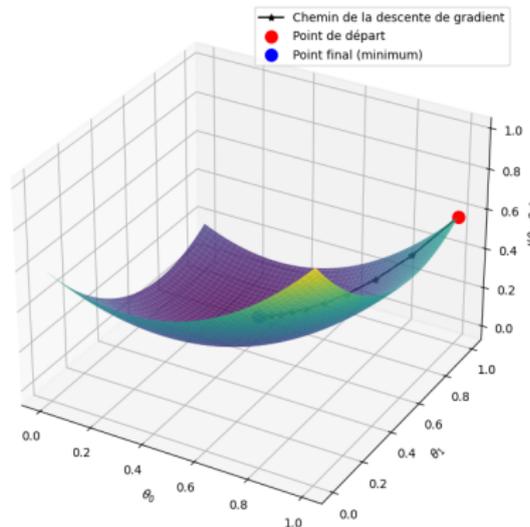
Méthodes d'Optimisation Basées sur le Gradient

Optimisation Basée sur le Gradient

- **Objectif des méthodes basées sur le gradient :**
 - Trouver une solution approximative pour les problèmes difficiles à résoudre analytiquement.
 - Minimiser une fonction $f(\mathbf{x})$ en ajustant \mathbf{x} itérativement.
- **Principe clé :**
 - Utiliser les dérivées (le gradient) pour identifier la direction de la descente la plus rapide.
 - Approcher le minimum de $f(\mathbf{x})$ en suivant cette direction.
- **Pourquoi cela fonctionne :**
 - Le gradient d'une fonction donne la pente locale dans chaque direction.
 - En inversant la direction du gradient, on descend vers un minimum.
- **Applications :**
 - Entraînement des réseaux de neurones.
 - Régressions logistiques et non linéaires.
 - Résolution de problèmes de grande dimension.

Optimisation Basée sur le Gradient

Illustration de la descente de gradient sur une surface convexe

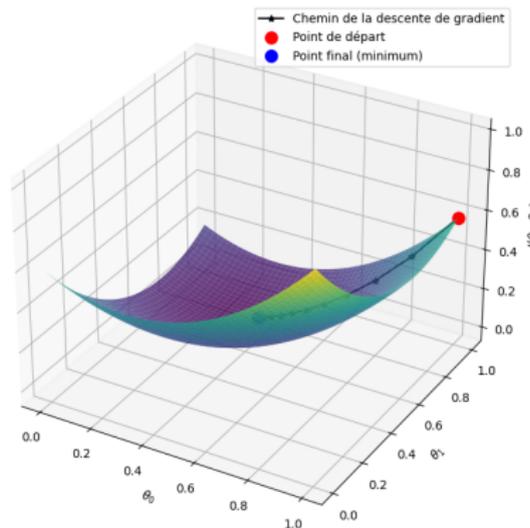


- **Le gradient :**

- Le gradient est un vecteur qui pointe dans la direction de la plus forte augmentation de la fonction $f(x)$. En suivant la direction opposée ($-\nabla f(x)$), on s'adresse vers un minimum.

Optimisation Basée sur le Gradient

Illustration de la descente de gradient sur une surface convexe



- **Descente du gradient :**

- Calcul itératif : $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t - \eta \nabla f(\mathbf{x}_t)$, où η est le **taux d'apprentissage**. Il ajuste les valeurs de \mathbf{x} jusqu'à ce qu'un **minimum soit atteint**.

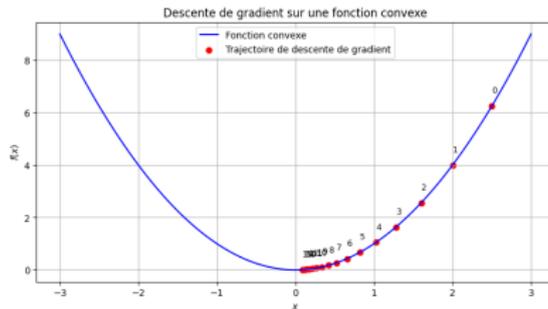
Optimisation Basée sur le Gradient : f Convexe

- **Caractéristiques des fonctions convexes :**

- La fonction possède un unique minimum global.
- Le gradient pointe toujours dans la direction menant au minimum global.

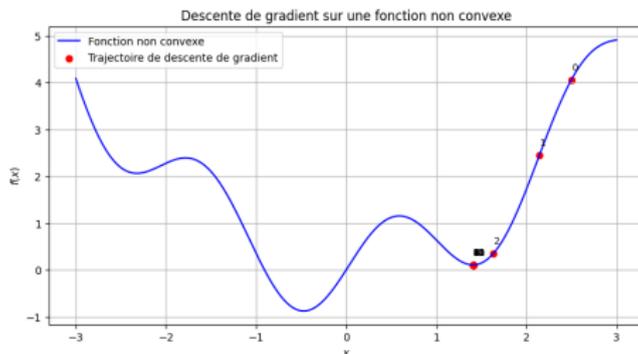
- **Illustration :**

- La descente de gradient converge vers le minimum global sans ambiguïté et les itérations suivent une trajectoire descendante régulière vers le point optimal.



Optimisation Basée sur le Gradient : f Non Convexe

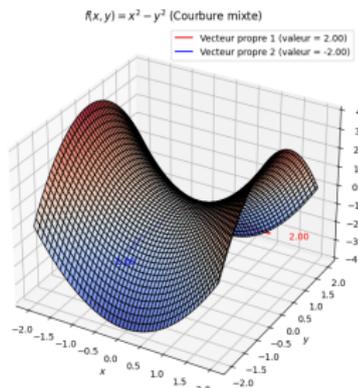
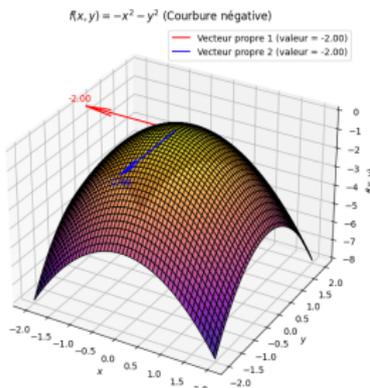
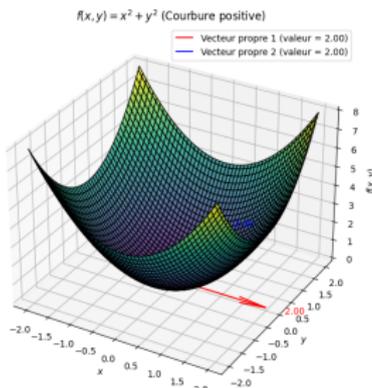
- **Problèmes rencontrés :**
 - **Minima locaux :** Difficulté à échapper aux pièges des minima locaux.
 - **Plateaux :** Zones de faible pente où le gradient est proche de zéro, ralentissant la convergence.
 - **Points de selle :** Direction du gradient n'indique pas clairement une progression vers le minimum.



Au-Delà du Gradient : La Hessienne et la Courbure

Au-Delà du Gradient : La Hessienne et la Courbure

- Les gradients indiquent la direction de descente la plus rapide, mais ne capturent pas :
 - La courbure de la fonction.
 - Les zones problématiques comme les plateaux, les minima locaux ou les points de selle.
- La Hessienne apporte des informations supplémentaires :
 - La Hessienne Fournit des informations sur la courbure et aide à identifier les minima locaux, maxima et points de selle.



Au-Delà du Gradient : La Hessienne et la Courbure

• Définition de la Hessienne :

- La Hessienne, notée $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, est la matrice des dérivées secondes d'une fonction scalaire $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- Chaque élément $H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$:

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

• Interprétation :

- La Hessienne donne des informations sur la courbure locale de $f(\mathbf{x})$.
- Ses valeurs propres (λ_i) déterminent le type de courbure :
 - $\lambda_i > 0$: Courbure positive (minimum local).
 - $\lambda_i < 0$: Courbure négative (maximum local).
 - λ_i mixtes : Points de selle.

Au-Delà du Gradient : La Hessienne et la Courbure

- **Approximation locale :**

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

- **Interprétation :**

- $\nabla f(\mathbf{x}_0)$: Indique la direction et la pente locale (gradient).
- $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$: Décrit la courbure locale pour ajuster les mises à jour.

- **Lien avec la descente de gradient :**

- Le gradient seul peut ne pas suffire pour converger rapidement, surtout dans des zones de courbure complexe.
- La Hessienne ajuste les mises à jour en fonction de la géométrie locale.

- **Avantages des dérivées secondes :**

- Accélération possible grâce à des tailles de pas ajustées selon la courbure locale.
- $\eta^* = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x})\|^2}{\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{H} \nabla f(\mathbf{x})}$: Taille de pas optimale en cas de courbure quadratique. (voir Annexe pour la dérivation détaillée).

Hessienne : Propriétés en Optimisation

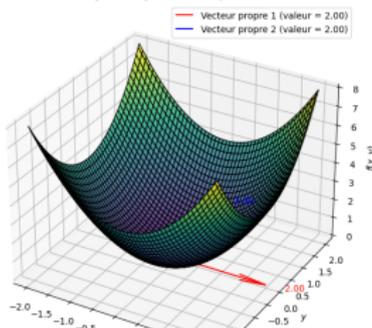
- **Convergence et Courbure :**

- Les directions principales de la courbure sont données par les vecteurs propres de la Hessienne.
- Les valeurs propres λ_i indiquent la raideur dans chaque direction.

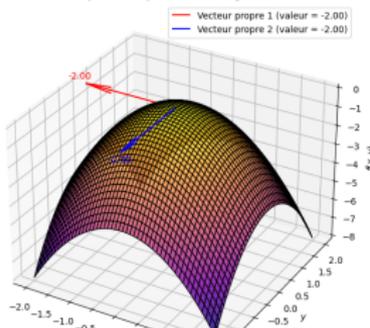
- **Conditionnement et Convergence :**

- Le **nombre de conditionnement** de la Hessienne $\left| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right|$ indique si la courbure est mal conditionnée.
- Un mauvais conditionnement ralentit la descente de gradient et mène à des oscillations dans les vallées étroites.

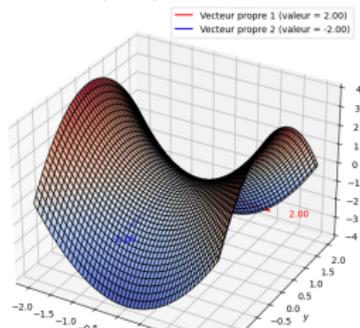
$f(x, y) = x^2 + y^2$ (Courbure positive)



$f(x, y) = -x^2 - y^2$ (Courbure négative)



$f(x, y) = x^2 - y^2$ (Courbure mixte)



Méthode de Newton

Méthode de Newton

- **Motivation :**

- Le gradient seul peut ne pas suffire pour converger rapidement, surtout dans des zones de courbure complexe.
- La Méthode de Newton utilise la courbure locale (**Hessienne**) pour ajuster les pas de manière plus efficace.

- **Formule d'itération :**

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t - \mathbf{H}(\mathbf{x}_t)^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_t),$$

où :

- $\nabla f(\mathbf{x}_t)$ est le gradient.
- $\mathbf{H}(\mathbf{x}_t)$ est la matrice Hessienne (dérivées secondes).

Méthode de Newton : Preuve

- **Forme Générale** : On considère une fonction quadratique générale en \mathbb{R}^n , donnée par :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{H} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

où :

- $f(\mathbf{x})$ est la fonction à minimiser,
- $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ est le gradient de f en \mathbf{x}_0 ,
- \mathbf{H} est la matrice Hessienne (symétrique définie positive) de f .
- **Objectif** : Approximer localement $f(\mathbf{x})$ près de \mathbf{x}_0 .

Méthode de Newton : Preuve

- **Gradient de chaque terme :**

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{H} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

- **Terme constant :** $f(\mathbf{x}_0) \rightarrow$ Gradient nul.

- **Terme linéaire :** $\nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$

$$\nabla \left(\nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) = \nabla f(\mathbf{x}_0).$$

- **Terme quadratique :** $\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{H} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$

$$\nabla \left(\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{H} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) = \mathbf{H} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

- **Gradient Total :**

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{H} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Méthode de Newton : Preuve

- **Définition** : Un point critique est trouvé en annulant le gradient :

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0.$$

- **Substitution dans $\nabla f(\mathbf{x})$** :

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0.$$

- **Équation Résultante** :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = -\nabla f(\mathbf{x}_0).$$

Méthode de Newton : Preuve

- **Multiplication par \mathbf{H}^{-1} :**

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = -\mathbf{H}^{-1}\nabla f(\mathbf{x}_0).$$

- **Formule de Mise à Jour :**

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{H}^{-1}\nabla f(\mathbf{x}_0).$$

- **Intuition :**

- $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ pointe dans la direction de la pente locale.
- \mathbf{H}^{-1} ajuste la direction et la taille du pas en fonction de la courbure.

- **La courbure locale est capturée par \mathbf{H} :**

- Grandes valeurs propres λ : forte courbure \rightarrow petits pas.
- Petites valeurs propres λ : faible courbure \rightarrow grands pas.

Méthode de Newton : Propriétés

● Impact de la Méthode de Newton :

- Convergence rapide dans les zones convexes (quadratique).
- Efficacité réduite si \mathbf{H} est mal conditionnée.

● Avantages :

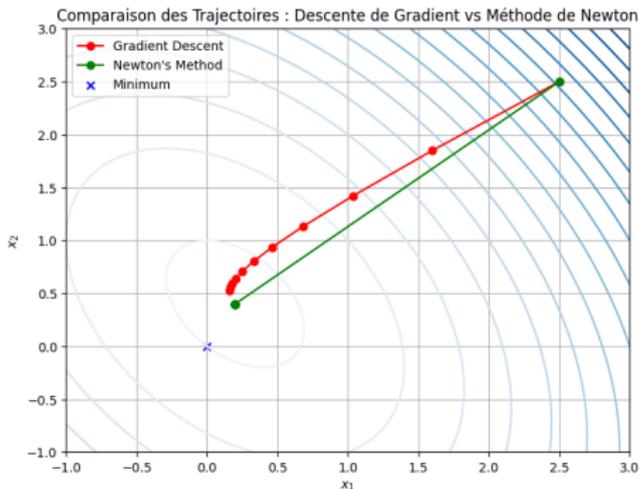
- Convergence quadratique près d'un minimum.
- Prend en compte la courbure locale, ce qui améliore les mises à jour dans les vallées étroites.
- Pas de besoin explicite d'un taux d'apprentissage (η).

● Inconvénients :

- Calcul de \mathbf{H}^{-1} coûteux pour les grandes dimensions.
- Risque de divergence si la Hessienne n'est pas définie positive.
- Moins utile pour des fonctions non convexes.

Méthode de Newton vs Descente de Gradient

- La descente de gradient suit une trajectoire influencée uniquement par la pente locale.
- La méthode de Newton ajuste ses pas en fonction de la géométrie locale donnée par la Hessienne.



Descente de Gradient vs Méthode de Newton : Exemple

- **Descente de Gradient :**
 - Utilise uniquement le gradient.
 - Nécessite un taux d'apprentissage constant.
- **Méthode de Newton :**
 - Utilise à la fois le gradient et la matrice Hessienne.
 - Tient compte de la courbure locale.
- **Fonction à Optimizer :**

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x},$$

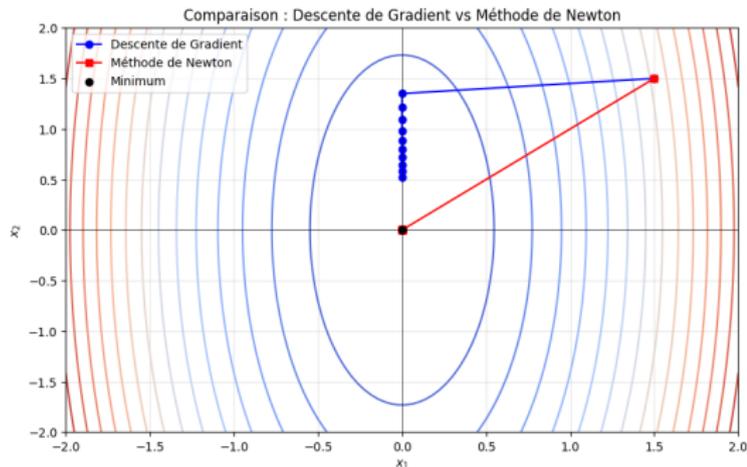
où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ génère des contours elliptiques avec une forte anisotropie.

Descente de Gradient vs Méthode de Newton : Exemple

- **Fonction Quadratique** : $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}$
 - **Gradient** : $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}$
 - **Hessienne** : $\mathbf{H} = \mathbf{A}$
- \mathbf{A} a des valeurs propres de 10 et 1.
- Direction correspondant à 10 : **raide**, changements rapides.
- Direction correspondant à 1 : **plate**, changements progressifs.
- Une grande différence entre les valeurs propres allonge l'ellipse dans une direction et la comprime dans une autre :
 - Le **nombre de conditionnement**, $\kappa(\mathbf{H}) = \left| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right|$, mesure le degré d'anisotropie.
 - $\kappa \approx 1$: isotropie (comportement similaire dans toutes les directions).
 - $\kappa \gg 1$: forte anisotropie (comportement très différent selon les directions).

Descente de Gradient vs Méthode de Newton : Exemple

- **Trajectoires observées pour la Descente de Gradient :**
 - Convergence lente.
 - Oscillations dues à l'anisotropie.
- **Trajectoires observées pour la Méthode de Newton :**
 - Convergence rapide.
 - Ajustements basés sur la courbure.



Descente de Gradient vs Méthode de Newton : Code

```
def gradient_descent(start, lr, iterations):
    x = start
    trajectory = [x]
    for _ in range(iterations):
        x = x - lr * gradient(x)
        trajectory.append(x)
    return np.array(trajectory)

def newtons_method(start, iterations):
    x = start
    trajectory = [x]
    H_inv = np.linalg.inv(hessian())
    for _ in range(iterations):
        x = x - H_inv @ gradient(x)
        trajectory.append(x)
    return np.array(trajectory)
```

Descente de Gradient vs Méthode de Newton : Résumé

● Descente de Gradient :

- Simple et facile à implémenter.
- Nécessite un bon choix de taux d'apprentissage.
- Convergence lente dans les directions de faible courbure.

● Méthode de Newton :

- Convergence rapide grâce à l'ajustement basé sur la courbure.
- Coût élevé pour calculer et inverser la Hessienne.
- Moins utile pour des fonctions non convexes.

Table des Matières

- 1 Notation
- 2 Algèbre Linéaire
- 3 Optimization
- 4 Probabilité**
- 5 Statistiques

Rappel à la Probabilité

Introduction à la Probabilité

Probabilité : Expérience Aléatoire, Univers et Événement

- La probabilité est une **mesure de l'incertitude** associée à un **d'événements** dans une **expérience aléatoire**.
 ⇒ Pour bien comprendre la notion de **probabilité**, on introduit les notions **d'expérience aléatoire, univers** et **événement** :
- Une **expérience aléatoire** est une action ou un processus qui a les caractéristiques suivantes:
 - **Répétabilité** : Peut être répété dans des conditions identiques.
 - **Incertain** : Produit des résultats bien définis mais **imprévisibles** pour une réalisation unique.
 - **Résultats bien définis** : Les résultats possibles sont connus et forment l'**univers** (Ω).
- **Un événement** est un sous-ensemble de l'**univers** (Ω) associé à une expérience aléatoire. Il représente un ou plusieurs résultats possibles de l'expérience.

Probabilité : Expérience Aléatoire, Univers et Événement

- **Exemple 1 d'expérience aléatoire : Lancer d'une pièce de monnaie :**
 - Les résultats possibles sont : $\Omega = \{\text{Face}, \text{Pile}\}$.
 - Le résultat du lancer est incertain, mais l'ensemble des résultats Ω est connu.
 - **Exemple d'événement : Événement C : "Obtenir Face" :**
 $C = \{\text{Face}\}$.
- **Exemple 2 d'expérience aléatoire: Temps de réponse d'un site web :**
 - Les résultats possibles (univers) sont : $\Omega = [0, +\infty[$, représentant toutes les durées positives possibles.
 - Chaque requête au site donne un temps de réponse aléatoire.
 - **Exemple d'événement :**
 - Événement A : "Le temps de réponse est inférieur à 2 secondes" :
 $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 2\}$.
- On dit qu'un l'événement A est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à A .

Probabilité : Expérience Aléatoire, Univers et Événement

- **Exemple 3 d'expérience aléatoire : Lancer de dé :**

- Les résultats possibles sont : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Chaque lancer donne un résultat aléatoire parmi les 6 faces.
- **Exemples d'événements :**
 - Événement A : "Obtenir un nombre pair" : $A = \{2, 4, 6\}$.
 - Événement B : "Obtenir un 3" : $B = \{3\}$.

- **Exemple 4 d'expérience aléatoire: Taille d'un adulte :**

- Les résultats possibles (univers) sont : $\Omega = [100, 250]$, représentant les tailles en centimètres.
- Une personne choisie aléatoirement aura une taille dans cet intervalle.
- **Exemple d'événements :**
 - Événement B : "La taille est comprise entre 150 et 180 cm" : $B = \{x \in \mathbb{R} : 150 \leq x \leq 180\}$.
 - Événement C : "La taille est supérieure à 200 cm" : $C = \{x \in \mathbb{R} : x > 200\}$.
- On dit qu'un l'événement A est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à A .

Probabilité : Types d'Événements

- **Événement Simple :**
 - Contient exactement un résultat.
 - Exemple : $\{3\}$ dans un lancer de dé.
- **Événement Composé :**
 - Contient plusieurs résultats.
 - Exemple : $\{2, 4, 6\}$ dans un lancer de dé.
- **Événement avec un Intervalle :**
 - Décrit par une plage de valeurs ($X \in [a, b]$).
 - Exemple : "La taille est entre 150 cm et 180 cm" : $A = [150, 180]$.
- **Événement Certain :**
 - Correspond à l'univers entier (Ω).
 - Exemple : "Obtenir un résultat quelconque" lors d'un lancer de dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- **Événement Impossible :**
 - Correspond à l'ensemble vide (\emptyset).
 - Exemple : "Obtenir un 7" lors d'un lancer de dé : $\emptyset = \{\}$.

Probabilité : Opérations sur les Événements

- **Événement Contradictoire** : L'événement contraire ou complément de A , noté A^c , est l'ensemble des résultats de Ω qui ne sont pas dans A .
 - Exemple : Si $A = \{2, 4, 6\}$ dans un lancer de dé, alors $A^c = \{1, 3, 5\}$.
 - Exemple : Si $A = [0, 5]$, alors $A^c = \Omega \setminus [0, 5]$.
- **Union et Intersection** :
 - **Intersection ($A \cap B$)** : Résultats communs à A et B .
 - **Union ($A \cup B$)** : Résultats appartenant à A , B , ou aux deux.
 - Exemple : $A = [0, 5]$, $B = [3, 7]$, alors $A \cap B = [3, 5]$.
 - Exemple : Dans un lancer de dé, $A = \{1, 3\}$ et $B = \{2, 4\}$,
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

Événements Incompatibles :

- Deux événements sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- Exemple : Dans un lancer de dé, $A = \{1, 3\}$ et $B = \{2, 4\}$ sont incompatibles.

Probabilité : Variables Aléatoires

- **Variables Aléatoires** : Une variable aléatoire X associe un nombre réel à chaque résultat d'une expérience aléatoire.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

- **Types de Variables Aléatoires** :
 - **Variable Aléatoire Discrète** :
 - Prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs distinctes.
 - **Exemple** : Le résultat d'un lancer de dé ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).
 - **Variable Aléatoire Continue** :
 - Peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle de \mathbb{R} .
 - **Exemple** : Temps d'attente à un arrêt de bus ($X \in [0, +\infty[$).

Probabilité : Variables Aléatoires

● Exemple 1 : Variable Aléatoire Discrète

- **Expérience Aléatoire** : Lancer d'un dé.
- **Variable Aléatoire X** : X représente le résultat du lancer.
- **Valeurs possibles** : $X \in \mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

● Exemple 2 : Variable Aléatoire Discrète

- **Expérience Aléatoire** : Nombre de clients arrivant dans un magasin en une heure.
- **Variable Aléatoire Y** : La variable aléatoire Y représente le nombre de clients qui arrivent dans une heure de temps.
- **Valeurs possibles** : $Y \in \mathcal{Y} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

● Exemple 3 : Variable Aléatoire Continue

- **Expérience Aléatoire** : Temps d'attente à un arrêt de bus.
- **Variable Aléatoire T** : La variable aléatoire T représente le temps d'attente, mesuré en minutes.
- **Valeurs possibles** : $T \in \mathcal{T} = [0, +\infty[$.

Probabilité : Définition et Propriétés

- **Probabilité** : La probabilité est une mesure associée à un événement ou à une variable aléatoire, quantifiant la **croissance** ou la **fréquence relative** d'occurrence d'un résultat particulier. On a $P(A) \in [0, 1]$, où $P(A)$ la probabilité que A se produise.
- **Une probabilité** attribue une valeur $P(A)$ à chaque événement $A \subseteq \Omega$ et satisfait les **axiomes de Kolmogorov** :
 - ① **Non-négativité** : $P(A) \geq 0, \forall A \subseteq \Omega$.
 - ② **Normalisation** : $P(\Omega) = 1$.
 - ③ **Additivité** : Si $A \cap B = \emptyset$, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- **Propriétés Fondamentales** :
 - $P(A^c) = 1 - P(A)$: La probabilité du complément de A .
 - Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
 - Généralisation : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
 - $P(\emptyset) = 0$: La probabilité de l'ensemble vide est nulle.

Probabilité : Probabilité Conditionnelle

- **Indépendance** : Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- **Généralisation** : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **Probabilité Conditionnelle** : La probabilité d'un événement A sachant qu'un autre événement B s'est produit est donnée par :

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{si } P(B) > 0.$$

- **Exemple : Lancer de dé :**

- Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Événements : $A = \{\text{Chiffre pair}\}$, $B = \{\text{Chiffre} > 3\}$.
- Calcul : $A \cap B = \{4, 6\}$, $P(B) = \frac{3}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{6}$.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}.$$

Probabilité : Interprétations Fréquentiste et Bayesienne

- **Interprétation Fréquentiste :**

- Si une expérience est répétée n fois,
- Si n_A représente le nombre de fois où l'événement A se produit,

\Rightarrow la fréquence relative est donnée par : $f(A) = \frac{n_A}{n}$.

- **Convergence :** Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $f(A)$ converge vers la probabilité $P(A)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_A}{n} = P(A)$$

- **Interprétation (Subjective) Bayesienne:**

- La probabilité $P(A)$ est une mesure de la croyance ou de la confiance qu'on peut attribuer à la réalisation de l'événement A avec $P(A) \in [0, 1]$.

Probabilité : Interprétations Fréquentiste et Bayésienne

● Interprétation (Subjective) Bayésienne:

- La probabilité $P(A)$ est une mesure de la croyance ou de la confiance qu'on peut attribuer à la réalisation de l'événement A avec $P(A) \in [0, 1]$.
- **Mise à jour des croyances** : La connaissance initiale (appelée probabilité **a priori**) est mise à jour lorsque de nouvelles observations (données) deviennent disponibles.
- **Formule de Bayes** : $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$, où :
 - $P(A)$: Probabilité **a priori** (*prior*) représente la croyance initiale à propos de A .
 - $P(B|A)$: **Vraisemblance** (*likelihood*), décrit comment les données B sont générées en fonction de A , c.à.d, la compatibilité de ce qui est observé avec A .
 - $P(A|B)$: Probabilité **a posteriori** (*posterior*), probabilité mise à jour après avoir observé B .
 - $P(B)$: **Évidence** (*evidence*), un facteur de normalisation.

Probabilité : Formule des Probabilités Totales

- **Définition :**

- Si B_1, B_2, \dots, B_n forment une partition de Ω , alors pour tout événement A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i).$$

- **Exemple : Étude de clients.**

- B_1 : "Jeunes adultes", B_2 : "Adultes", B_3 : "Seniors".
- A : "Faire un achat".
- Probabilités :

$$P(A | B_1) = 0.2, P(A | B_2) = 0.5, P(A | B_3) = 0.1.$$

$$P(B_1) = 0.3, P(B_2) = 0.4, P(B_3) = 0.3.$$

- Calcul :

$$P(A) = P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + P(A | B_3)P(B_3).$$

$$P(A) = 0.2 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 0.3 = 0.29.$$

Probabilité : Application (Bayes et Probabilités Totales)

- **Formule de Bayes** : Permet de calculer la probabilité d'un événement A conditionnellement à un autre événement B .

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}.$$

- **Exemple : Diagnostic médical.**

- A : "Avoir une maladie", $P(A) = 0.01$.
- B : "Test positif", $P(B | A) = 0.9$, $P(B | A^c) = 0.1$.
- Calcul : $P(B) = P(B | A)P(A) + P(B | A^c)P(A^c)$.

$$P(B) = 0.9 \cdot 0.01 + 0.1 \cdot 0.99 = 0.108.$$

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.108} \approx 0.083.$$

Probabilité : Fonction de Masse

- **Définition :**

- Pour une variable aléatoire discrète X , la **fonction de masse de probabilité (PMF)** $p(x)$ donne la probabilité que X prenne une valeur spécifique x .

$$P(X = x) = P_X(x) = p(x), \quad \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1.$$

- **Exemple : Lancer d'un dé.**

- X : Résultat d'un lancer ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).
- Fonction de masse :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{si } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Probabilité : Fonction de Densité

- **Définition :**

- Dans le cas d'une variable aléatoire continue, la probabilité pour une valeur spécifique est **nulle** : $P(X = x) = 0$.
- La probabilité est alors exprimée sur un intervalle à l'aide d'une **fonction de densité de probabilité (PDF)** $f(x)$ qui satisfait :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \quad \text{où} \quad \int_{\mathcal{X}} f(x) dx = 1.$$

- **Exemple : Temps d'attente à un arrêt de bus.**

- X : Temps d'attente ($X \in [0, +\infty[$).
- Densité (loi exponentielle) :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \lambda > 0.$$

- Probabilité sur un intervalle :

$$P(2 \leq X \leq 5) = \int_2^5 \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Fonction de Répartition : Variable Aléatoire Discrète

- **Définition :**

- La **fonction de répartition (CDF)** pour une variable discrète X donne la probabilité cumulée jusqu'à x :

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} p(k).$$

- **Exemple : Lancer d'un dé.**

- X : Résultat d'un lancer ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).
- Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{x}{6}, & \text{si } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ 1, & \text{si } x > 6. \end{cases}$$

Fonction de Répartition : Variable Aléatoire Continue

- **Définition :**

- La **fonction de répartition (CDF)** $F(x)$ pour une variable continue X est donnée par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

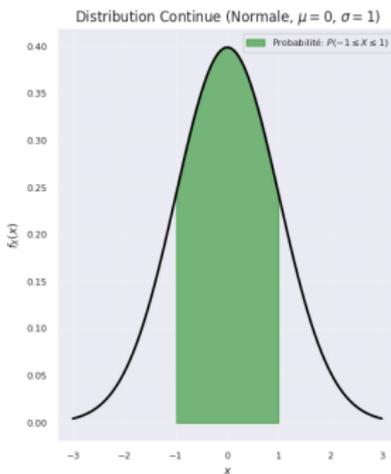
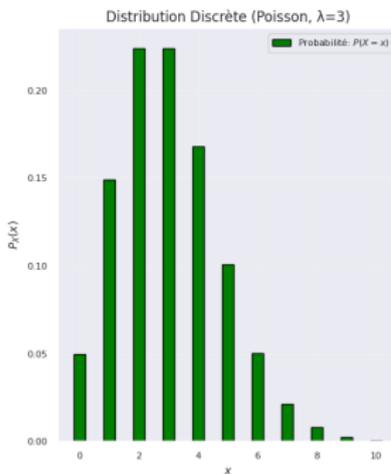
- **Exemple : Temps d'attente à un arrêt de bus.**

- Densité : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.
- Fonction de répartition :

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Résumé : Discrète vs. Continue

- **Discrète :**
 - Nombre fini ou dénombrable de valeurs.
 - Utilise des probabilités ponctuelles $P(X = x)$.
- **Continue :**
 - Nombre infini de valeurs possibles dans un intervalle.
 - Utilise une densité $f_X(x)$ pour calculer des probabilités d'intervalles.



Distributions de Probabilité

Introduction : Distributions de Probabilités

- Une **distribution de probabilités** décrit comment les probabilités des différents résultats d'une variable aléatoire sont réparties.
 - **Variable aléatoire discrète** : Une distribution de probabilités spécifie les probabilités associées à chaque résultat possible.
 - **Variable aléatoire continue** : Une distribution de probabilités est définie par une fonction de densité, où les probabilités sont calculées sur des intervalles.
- **Pourquoi étudier les distributions de probabilités ?**
 - Comprendre la nature des données et des phénomènes aléatoires.
 - Servir de base pour l'inférence statistique, les tests d'hypothèse, et les modèles de machine learning.

Distributions : Variables Discrètes vs. Continues

● Distributions pour les variables discrètes :

- Définissent les probabilités pour des résultats dénombrables (exemple : $\{0, 1, 2, \dots\}$).
- Représentées par des fonctions de masse de probabilité (**PMF**).
- Exemples : Bernoulli, Binomiale, Poisson, Multinomiale.

● Distributions pour les variables continues :

- Définissent les probabilités pour des intervalles de nombres réels.
- Représentées par des fonctions de densité de probabilité (**PDF**).
- Exemples : Normale, Exponentielle, Uniforme, Laplace.

● Visualisation :

- Variables discrètes : Graphiques en barres (Histogramme) des probabilités pour chaque résultat.
- Variables continues : Courbes des PDF ou CDF.

Distribution de Bernoulli

Distribution de Bernoulli : Définition

• Définition :

- La distribution de Bernoulli décrit une variable aléatoire X qui prend seulement deux valeurs possibles : 1 (succès) avec probabilité p , et 0 (échec) avec probabilité $1 - p$.

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & \text{si } x = 1, \\ 1 - p, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

où $0 \leq p \leq 1$ est le paramètre de la distribution.

• Paramètres :

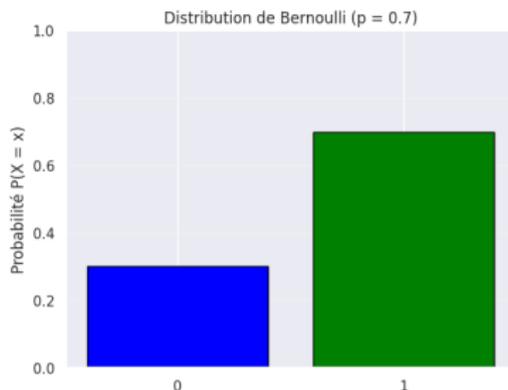
- p : Probabilité de succès.

• Exemples d'application :

- Réussite ou échec d'une expérience (par exemple : lancer d'une pièce de monnaie).
- Réponse binaire dans un sondage (Oui/Non).

Distribution de Bernoulli : Propriétés et Exemple

- **Fonction de masse de probabilité (PMF) :**
 $P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}.$
- **Espérance :** $\mathbb{E}[X] = p.$
- **Variance :** $\text{Var}(X) = p(1 - p).$
- **Exemple : Lancer d'une pièce de monnaie non équilibrée.**
 - Probabilité de succès (p) : $p = 0.7.$
 - Résultats possibles : $X = 1$ (Face), $X = 0$ (Pile).
 - Fonction de masse : $P(X = 1) = 0.7, \quad P(X = 0) = 0.3.$



Distribution Binomiale

Distribution Binomiale : Définition

- **Définition :**

- La distribution binomiale décrit le nombre de succès dans n essais indépendants, où chaque essai a deux résultats possibles : succès (p) ou échec ($1 - p$).

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\},$$

où,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- **Paramètres :**

- n : Nombre d'essais.
- p : Probabilité de succès dans un essai.

- **Exemples d'application :**

- Nombre de réussites dans un test à choix multiple.
- Nombre de clients satisfaits dans un échantillon.

Distribution Binomiale : Propriétés et Exemple

- **Propriété importante :**

- Pour $n = 1$, la binomiale devient une distribution de Bernoulli.
- $\mathbb{E}[X] = n \cdot p$, $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

- **Exemple :** Supposons qu'un test médical ait une probabilité de succès $p = 0.8$, et qu'on effectue $n = 5$ tests indépendants.

- X : le nombre de tests réussis parmi les 5.
- **Calculons la probabilité d'obtenir exactement $k = 3$ succès :**

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} (0.8)^3 (1 - 0.8)^{5-3}.$$

- Calcul : $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$,

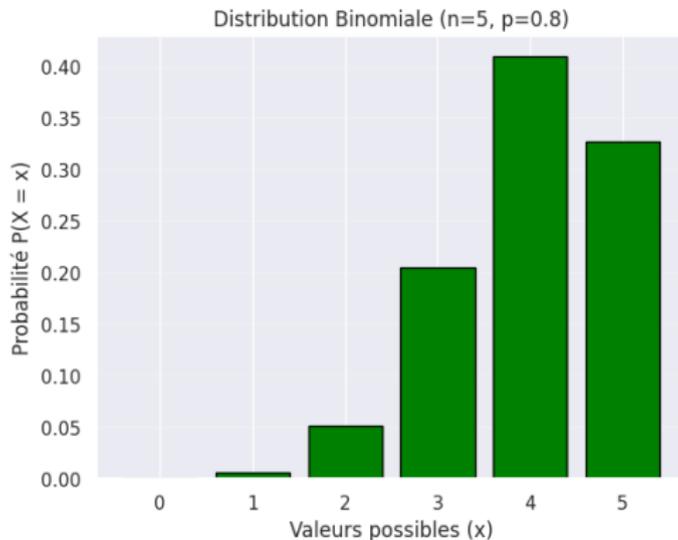
$$P(X = 3) = 10 \cdot (0.8)^3 \cdot (0.2)^2 = 10 \cdot 0.512 \cdot 0.04 = 0.2048.$$

- **Interprétation :** La probabilité d'obtenir exactement 3 succès parmi 5 tests est de 20,48%.

Distribution Binomiale : Code Python (Visualisation)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import binom
# Paramètres de la distribution
n = 10 # Nombre d'essais
p = 0.5 # Probabilité de succès
# Valeurs possibles de X
x = np.arange(0, n + 1)
# PMF (Probabilité)
probs = binom.pmf(x, n, p)
# Visualisation
plt.bar(x, probs, color='green', edgecolor='black')
plt.title(f"Distribution Binomiale (n={n}, p={p})")
plt.xlabel("Valeurs possibles (x)")
plt.ylabel("Probabilité P(X = x)")
plt.xticks(x)
plt.grid(axis='y', alpha=0.3)
plt.savefig("binomial_distribution.png") # Sauvegarde de l'image
plt.show()
```

Distribution Binomiale : Visualisation



Distribution Binomiale : Code Python (Simulation)

```
import numpy as np

# Fixer la graine (seed) pour le générateur de nombres aléatoires
np.random.seed(8302)

# Paramètres
n = 5 # Nombre d'essais
p = 0.8 # Probabilité de succès

# Nombre de simulations
simulations = 10

# Simuler une distribution Binomiale
outcomes = np.random.binomial(n, p, simulations)

# Afficher les résultats
print("Résultats des simulations Binomiales :")
print(outcomes)
```

Résultat :

```
Résultats des simulations Binomiales :
[4 3 3 3 5 4 3 4 4 3]
```

Distribution Catégorique

Distribution Catégorique : Définition

• Définition :

- La distribution catégorique modélise une expérience avec un seul essai où le résultat appartient à l'un des k catégories possibles.
- Chaque catégorie i a une probabilité p_i , avec :

$$P(X = i) = p_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad \text{où} \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

• Paramètres :

- k : Nombre de catégories.
- $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$: Probabilités associées aux catégories.

• Exemples d'application :

- Lancer d'un dé (choisir une face parmi 6).
- Réponse à une question à choix multiples.

Distribution Catégorique : Propriétés et Exemple

- **Fonction de masse de probabilité (PMF) :**

$$P(X = i) = p_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

- **Espérance :**

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^k i \cdot p_i.$$

- **Variance :**

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^k p_i \cdot (i - \mathbb{E}[X])^2.$$

- **Exemple : Lancer d'un dé équilibré.**

- $k = 6, p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}.$
- Probabilité de chaque face : $P(X = i) = \frac{1}{6}, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$

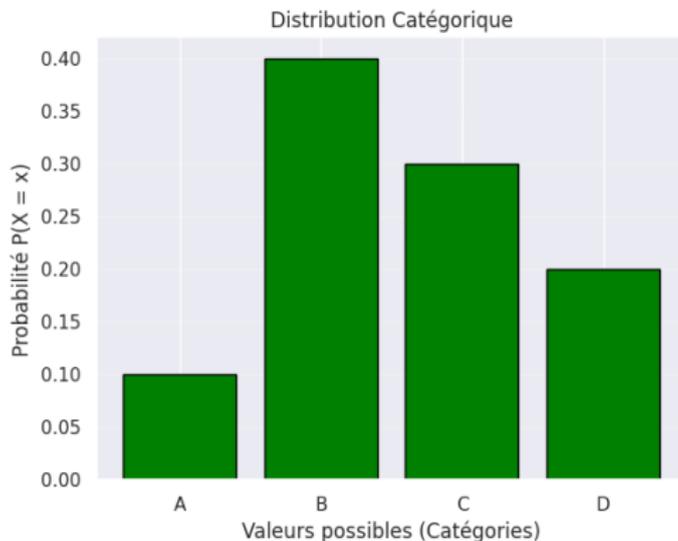
Distribution Catégorique : Code Python (Visualisation)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètres
categories = ['A', 'B', 'C', 'D'] # Catégories
probabilities = [0.1, 0.4, 0.3, 0.2] # Probabilités associées

# Visualisation
plt.bar(categories, probabilities, color='green', edgecolor='black')
plt.title("Distribution Catégorique")
plt.xlabel("Valeurs possibles (Catégories)")
plt.ylabel("Probabilité P(X = x)")
plt.grid(axis='y', alpha=0.3)
plt.show()
```

Distribution Catégorique : Visualisation



Distribution Catégorique : Code Python (Simulation)

```
import numpy as np

# Fixer la graine (seed) pour le générateur de nombres aléatoires
np.random.seed(8302)

# Paramètres
categories = ['A', 'B', 'C', 'D'] # Catégories
probabilities = [0.1, 0.4, 0.3, 0.2] # Probabilités associées
simulations = 10 # Nombre de simulations

# Simuler des tirages selon la distribution catégorique
outcomes = np.random.choice(categories, size=simulations, p=probabilities)

# Afficher les résultats
print("Résultats des simulations catégoriques :")
print(outcomes)
```

Résultat :

```
Résultats des simulations catégorielles :
['C' 'C' 'D' 'C' 'B' 'B' 'C' 'C' 'C' 'D']
```

Distribution Multinomiale

Distribution Multinomiale : Définition

● Définition :

- La distribution multinomiale est une généralisation de la distribution binomiale pour des expériences où chaque essai peut aboutir à l'une des k catégories possibles.
- Pour n essais indépendants et k catégories, chaque essai a une probabilité p_i d'appartenir à la catégorie i , avec :

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i} = \binom{n}{x_1 \cdots x_k} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i},$$

où $\sum_{i=1}^k x_i = n$ et $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.

● Paramètres :

- n : Nombre total d'essais (Pour $n = 1$, on a la distribution catégorique).
- k : Nombre de catégories.
- $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$: Probabilités associées aux catégories.

● Exemples d'application :

- Répartition des votes dans une élection avec plusieurs candidats.
- Nombre de clients achetant différents produits dans un magasin.

Distribution Multinomiale : Propriétés et Exemple

- **Espérance :**

$$\mathbb{E}[X_i] = n \cdot p_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

- **Variance :**

$$\text{Var}(X_i) = n \cdot p_i \cdot (1 - p_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

- **Covariance :**

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = -n \cdot p_i \cdot p_j, \quad i \neq j.$$

- **Exemple : Répartition des votes.**

- $n = 10, k = 3, p_1 = 0.5, p_2 = 0.3, p_3 = 0.2.$
- Nombre de votes pour chaque candidat : $X_1, X_2, X_3.$
- Probabilité pour une configuration spécifique :

$$P(X_1 = 5, X_2 = 3, X_3 = 2) = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot 0.5^5 \cdot 0.3^3 \cdot 0.2^2.$$

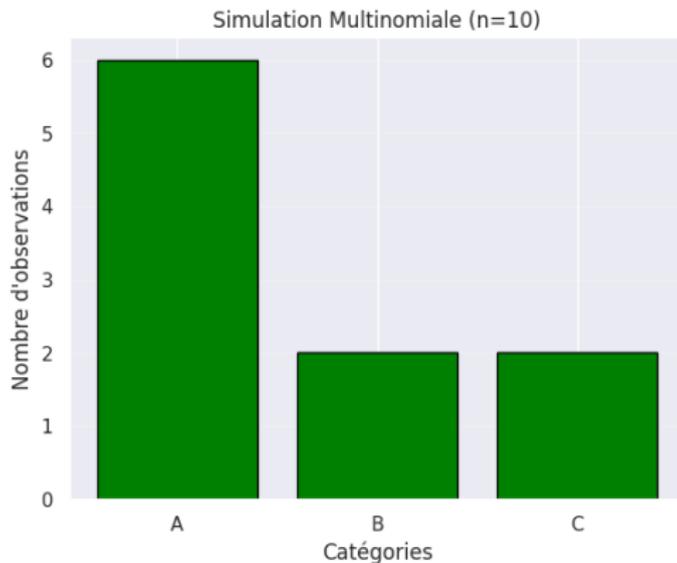
Distribution Multinomiale : Code Python (Sim et Vis)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Fixer la graine (seed) pour la reproductibilité
np.random.seed(8302)
# Paramètres
n = 10 # Nombre total d'essais (Nombre de simulations)
probabilities = [0.1, 0.4, 0.3, 0.2] # Probabilités des catégories
categories = ['A', 'B', 'C', 'D'] # Noms des catégories
# Simuler une distribution multinomiale
outcomes = np.random.multinomial(n, probabilities, size=1)[0]
# Affichage des résultats
print("Résultats des simulations multinomiales :")
print(outcomes)
# Visualisation
plt.bar(categories, outcomes, color='green', edgecolor='black')
plt.title(f"Simulation Multinomiale (n={n})")
plt.xlabel("Catégories")
plt.ylabel("Nombre d'observations")
plt.grid(axis='y', alpha=0.3)
plt.show()
```

Résultat :

```
Résultats des simulations multinomiales :
[1 5 1 3]
```

Distribution Multinomiale : Visualisation



Distribution de Poisson

Distribution de Poisson : Définition

● Définition :

- La distribution de Poisson décrit le nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps ou d'espace fixe, lorsque ces événements sont indépendants et que la probabilité d'un événement est proportionnelle à la taille de l'intervalle.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

où :

- $\lambda > 0$ est le taux moyen d'événements par unité de temps ou d'espace.
 - k est le nombre d'événements observés.
- ## ● Paramètres :
- λ : Taux moyen d'événements.

Distribution de Poisson : Propriétés et Exemple

- **Propriétés :**

- $\mathbb{E}[X] = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda.$

- **Exemple : Nombre de clients arrivant dans un café.**

- Supposons qu'un café reçoit en moyenne $\lambda = 4$ clients par minute.
 - On souhaite connaître la probabilité que exactement $k = 6$ clients arrivent dans une minute donnée.
 - La distribution des arrivées suit une loi de Poisson, avec :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

- **Calcul :**

- $\lambda = 4, k = 6.$
 - $4^6 = 4096, e^{-4} \approx 0.0183, 6! = 720.$
 - $P(X = 6) = \frac{4^6 e^{-4}}{6!} = \frac{4096 \cdot 0.0183}{720} \approx 0.1048.$

- **Interprétation :** La probabilité qu'exactly 6 clients arrivent dans une minute donnée est d'environ 10,48%.

Distribution de Poisson : Code Python (Visualisation)

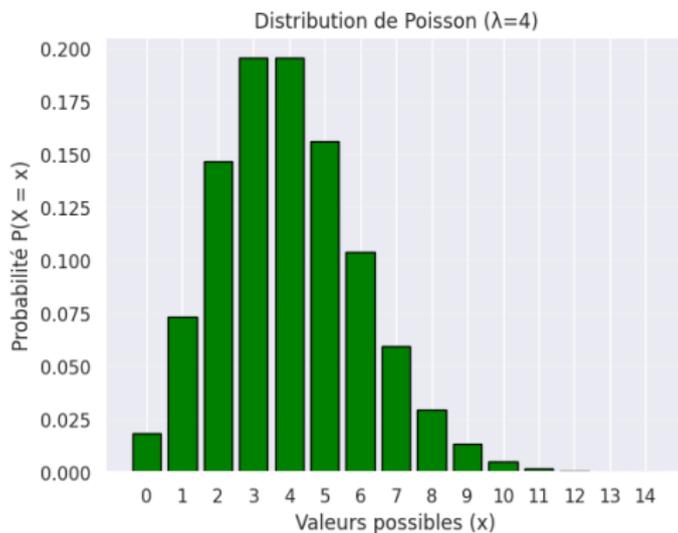
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import poisson

# Paramètres
lambda_param = 4 # Taux moyen d'événements
k_values = np.arange(0, 15) # Valeurs possibles pour X

# Calcul des probabilités
probs = poisson.pmf(k_values, lambda_param)

# Visualisation
plt.bar(k_values, probs, color='green', edgecolor='black')
plt.title(f"Distribution de Poisson (lambda={lambda_param})")
plt.xlabel("Nombre d'événements (k)")
plt.ylabel("Probabilité P(X = k)")
plt.xticks(k_values)
plt.grid(axis='y', alpha=0.3)
plt.show()
```

Distribution de Poisson : Visualisation



Distribution de Poisson : Code Python (Simulation)

```
import numpy as np

# Fixer la graine (seed) pour le générateur de nombres aléatoires
np.random.seed(8302)

# Paramètres
lambda_param = 4 # Taux moyen d'événements
simulations = 10 # Nombre de simulations

# Simuler une distribution de Poisson
outcomes = np.random.poisson(lambda_param, simulations)

# Afficher les résultats
print("Résultats des simulations Poisson :")
print(outcomes)
```

Résultat :

```
Résultats des simulations Poisson :
[7 5 6 6 3 1 5 4 7 2]
```

Distribution Uniforme Discrète

Distribution Uniforme Discrète : Définition

● Définition :

- La distribution uniforme discrète modélise une variable aléatoire X qui prend des valeurs entières équiprobables dans un intervalle $\{a, \dots, b\}$, où a et b sont des entiers avec $a \leq b$.
- La fonction de masse de probabilité (PMF) est donnée par :

$$P(X = x) = \frac{1}{b - a + 1}, \quad x \in \{a, \dots, b\}.$$

● Paramètres :

- a : Borne inférieure (entier).
- b : Borne supérieure (entier).

● Exemples d'application :

- Tirage d'un numéro de loterie entre $a = 1$ et $b = 10$.
- Répartition aléatoire d'une récompense entre $a = 5$ et $b = 15$.
- Lancer d'un dé équilibré dont les faces sont numérotés entre 1 et 6.

Distribution Uniforme Discrète : Propriétés et Exemple

- **Propriétés :**

- **Espérance :** $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$.
- **Variance :** $\text{Var}(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

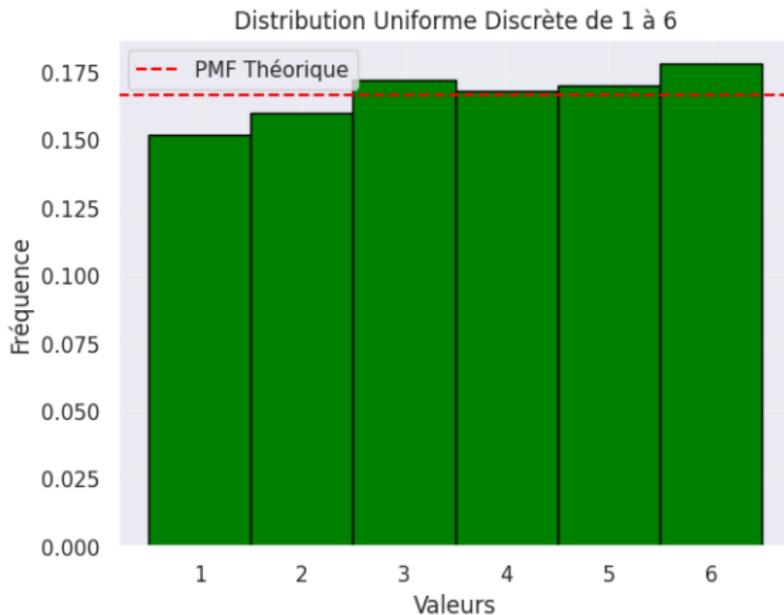
- **Exemple : Lancer d'un dé équilibré ($a = 1$ et $b = 6$).**

- $P(X = i) = \frac{1}{6}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $\mathbb{E}[X] = \frac{1+6}{2} = 3.5$.
- $\text{Var}(X) = \frac{(6-1+1)^2-1}{12} = \frac{35}{12} \approx 2.92$.

Distribution Uniforme Discrète : Code Python (Visualisation)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Fixer la graine (seed) pour la reproductibilité
np.random.seed(8302)
# Paramètres
a, b = 1, 6 # Borne inférieure et supérieure
values = np.arange(a, b + 1) # Ensemble des valeurs possibles
n = 1000 # Nombre de simulations
# Simulation
samples = np.random.choice(values, size=n)
# Visualisation
plt.hist(samples, bins=np.arange(a - 0.5, b + 1.5, 1), density=True,
         color='green', edgecolor='black')
plt.axhline(y=1/(b-a+1), color='red', linestyle='--', label="PMF Théorique")
plt.title(f"Distribution Uniforme Discrète de {a} à {b}")
plt.xlabel("Valeurs")
plt.ylabel("Fréquence")
plt.xticks(values)
plt.legend()
plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()
```

Distribution Uniforme Discrète : Visualisation



Distribution Uniforme Discrète : Simulation Résultats

```
import numpy as np

# Fixer la graine (seed) pour la reproductibilité
np.random.seed(8302)

# Paramètres
a, b = 1, 6 # Borne inférieure et supérieure
n = 10 # Nombre d'échantillons à générer

# Simulation
samples = np.random.randint(a, b + 1, size=n)

# Affichage des résultats
print("Résultats des simulations (Distribution Uniforme Discrète) :")
print(samples)
```

Résultat :

```
Résultats des simulations (Distribution Uniforme Discrète) :
[6 5 3 4 5 6 5 5 6 2]
```

Distribution Uniforme Continue

Distribution Uniforme Continue : Définition

● Définition :

- La distribution uniforme continue décrit une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est constante sur son support $[a, b]$.
- La densité de probabilité est donnée par :

$$f_X(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } x \in [a, b], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

● Paramètres :

- a : Borne inférieure de l'intervalle.
- b : Borne supérieure de l'intervalle ($b > a$).

● Exemples d'application :

- Modéliser la distribution des systèmes où toutes les valeurs dans une plage donnée sont également probables.
- Sélectionner un point au hasard dans un intervalle continu en géométrie, dans des problèmes d'optimisation, ou dans des expériences scientifiques.

Distribution Uniforme Continue : Propriétés

- **Fonction de densité de probabilité (PDF) :**

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a, b].$$

- **Fonction de répartition (CDF) :**

$$F_X(x) = F(x) = \int_a^b f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{si } x > b. \end{cases}$$

- **Espérance :**

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}.$$

- **Variance :**

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Distribution Uniforme : Propriétés et Exemple

- **Propriétés :**

- **Espérance :** $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$.
- **Variance :** $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

- **Exemple :** Supposons que nous modélisons une variable aléatoire X représentant un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0, 10]$.

- $a = 0, b = 10$.
- PDF : $f(x) = \frac{1}{10-0} = 0.1$, pour $x \in [0, 10]$.

Distribution Uniforme Continue : Code Python (Visualisation)

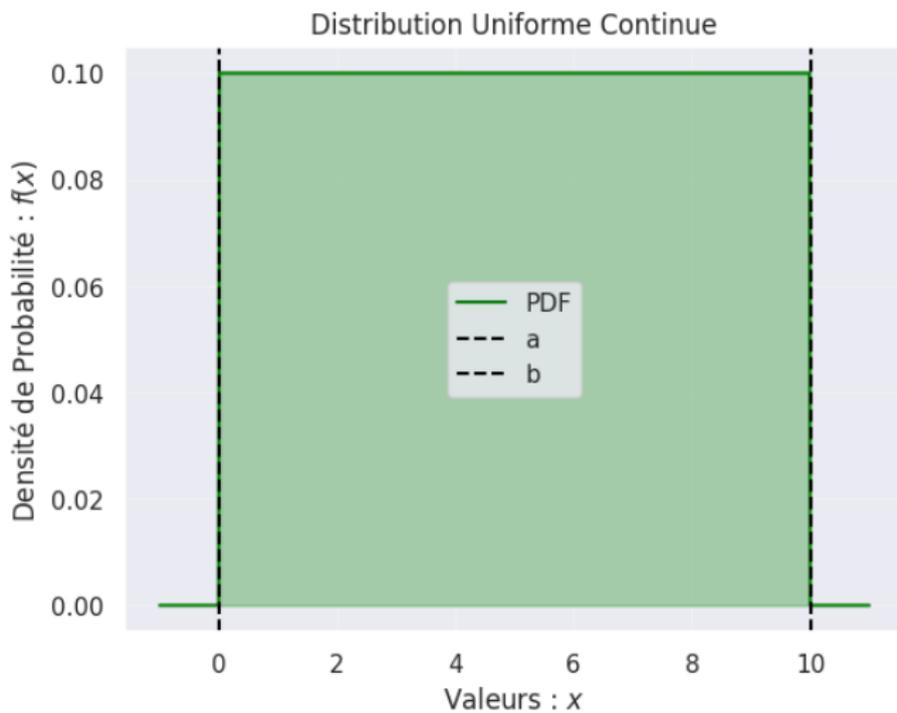
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètres
a, b = 0, 10 # Bornes de l'intervalle
x = np.linspace(a - 1, b + 1, 1000) # Points pour la visualisation

# Fonction de densité
pdf = np.where((x >= a) & (x <= b), 1 / (b - a), 0)

# Visualisation
plt.plot(x, pdf, label='PDF', color='green')
plt.fill_between(x, pdf, alpha=0.3, where=(x >= a) & (x <= b))
plt.title("Distribution Uniforme Continue")
plt.xlabel("Valeurs (x)")
plt.ylabel("Densité de Probabilité (f(x))")
plt.axvline(a, color='black', linestyle='--', label='a')
plt.axvline(b, color='black', linestyle='--', label='b')
plt.grid(alpha=0.3)
plt.legend()
plt.show()
```

Distribution Uniforme : Visualisation



Distribution Uniforme Continue : Simulation Résultats

```
import numpy as np

# Fixer la graine (seed) pour la reproductibilité
np.random.seed(8302)

# Paramètres
a, b = 0, 10 # Bornes de l'intervalle
n = 10 # Nombre d'échantillons

# Simulation
samples = np.random.uniform(a, b, size=n)

# Affichage des résultats
print("Échantillons générés (Distribution Uniforme Continue) :")
print(samples)
```

Résultat :

```
Échantillons générés (Distribution Uniforme Continue) :
[7.34601402 7.74717143 9.33120209 7.81422027 2.38767725 4.07153266
 7.41344326 5.05593044 5.39814388 8.21514903]
```

Distribution Normale

Distribution Normale : Définition

● Définition :

- La distribution normale, également appelée distribution gaussienne, décrit une variable aléatoire continue X qui suit une fonction en cloche symétrique centrée autour de sa moyenne.
- La fonction de densité de probabilité (PDF) est donnée par :

$$f_X(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

où :

- μ est la moyenne (centre de la distribution).
 - σ^2 est la variance (dispersion de la distribution).
- ## ● Paramètres :
- μ : Moyenne.
 - σ^2 : Variance.

Distribution Normale : Propriétés et Exemple

- **Propriétés :**

- La courbe est symétrique autour de la moyenne μ .
- La probabilité totale sous la courbe est 1.
- Environ 68% des valeurs se situent à $\pm 1\sigma$ de la moyenne, 95% à $\pm 2\sigma$, et 99.7% à $\pm 3\sigma$.

- **Exemple :**

- La distribution normale peut modéliser les erreurs (ou résidus) dans les modèles de régression linéaire. Cela permet d'effectuer des tests statistiques (tests-t, tests-F) et de construire des intervalles de confiance fiables.
- La taille des individus dans une population suit souvent une distribution normale avec une moyenne et un écart-type spécifiques.
- Supposons $\mu = 170$ cm, $\sigma = 10$ cm. La probabilité qu'un individu mesure entre 160 cm et 180 cm est donnée par :

$$P(160 \leq X \leq 180) = \int_{160}^{180} f_X(x) dx.$$

Distribution Normale : Code Python (Visualisation)

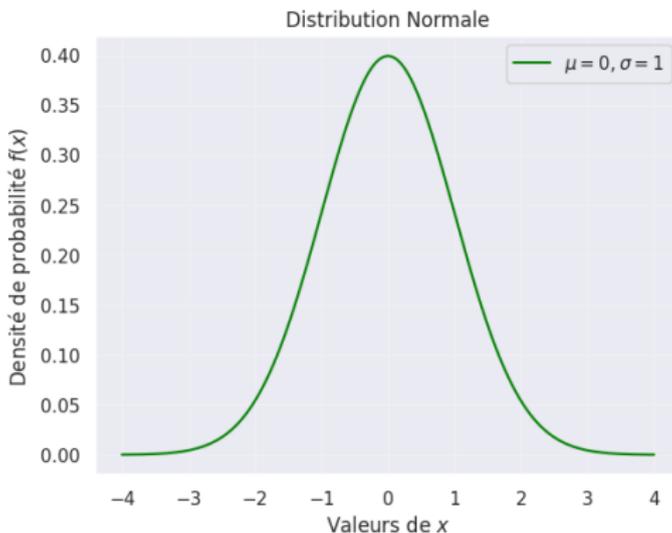
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

# Paramètres
mu = 0 # Moyenne
sigma = 1 # Écart-type
x = np.linspace(-4, 4, 1000) # Plage de valeurs pour X

# Calcul de la densité
pdf = norm.pdf(x, mu, sigma)

# Visualisation
plt.plot(x, pdf, color='green', label=f"$\mu={mu}, \sigma={sigma}$")
plt.title("Distribution Normale")
plt.xlabel("Valeurs de X")
plt.ylabel("Densité de probabilité f(X)")
plt.legend()
plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()
```

Distribution Normale : Visualisation



Distribution Normale : Code Python (Simulation)

```
import numpy as np

# Fixer la graine (seed) pour la reproductibilité
np.random.seed(8302)

# Paramètres
mu = 0 # Moyenne
sigma = 1 # Écart-type
n_samples = 10 # Nombre d'échantillons

# Générer des échantillons
samples = np.random.normal(mu, sigma, n_samples)

# Afficher les résultats
print("Échantillons simulés :")
print(samples)
```

Résultat :

```
Échantillons simulés :
[ 0.86706276  0.74044938 -0.51435286 -1.44717604  0.0395389  1.706135
  1.3075181  0.16191484  1.10469746 -2.46412949]
```

Distribution de Laplace

Distribution de Laplace : Définition

• Définition :

- La distribution de Laplace décrit une variable aléatoire continue X qui suit une distribution symétrique en forme de pic, avec une densité de probabilité donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{b}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

où :

- μ est le paramètre de localisation (médiane).
 - $b > 0$ est le paramètre d'échelle.
- ## • Paramètres :
- μ : Médiane (paramètre de localisation).
 - b : Paramètre d'échelle, contrôle la dispersion.

Distribution de Laplace : Propriétés et Exemple

- **Propriétés :**

- Symétrie autour de μ .
- Queue plus épaisse que la distribution normale, ce qui la rend adaptée aux données avec des valeurs aberrantes.
- Espérance et médiane : $\mathbb{E}[X] = \mu$.
- Variance : $\text{Var}(X) = 2b^2$.

- **Exemple :**

- La distribution de Laplace est utilisée pour réduire l'influence des valeurs aberrantes sur le modèle, comparée à la distribution normale.
- Supposons $\mu = 0$, $b = 1$. La densité pour $x = 1$ est donnée par :

$$f_X(1) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{|1-0|}{1}\right) = \frac{1}{2e}.$$

Distribution de Laplace : Code Python (Visualisation)

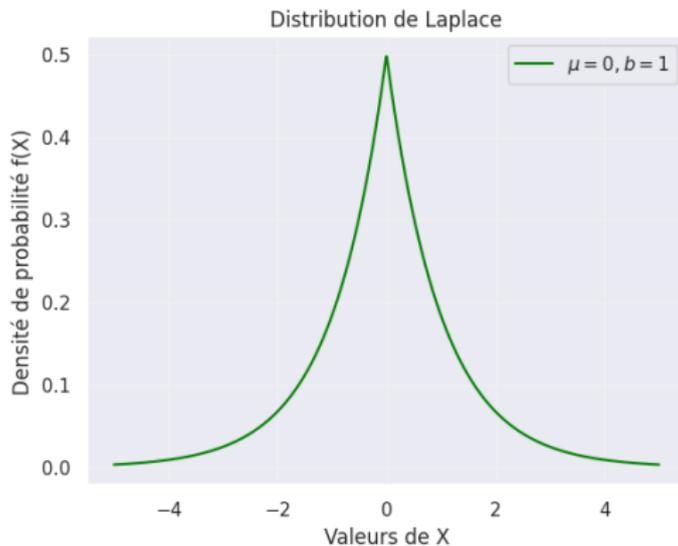
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import laplace

# Paramètres
mu = 0 # Paramètre de localisation
b = 1 # Paramètre d'échelle
x = np.linspace(-5, 5, 1000) # Plage de valeurs pour X

# Calcul de la densité
pdf = laplace.pdf(x, loc=mu, scale=b)

# Visualisation
plt.plot(x, pdf, color='green', label=f"$\mu={mu}$, b={b}$")
plt.title("Distribution de Laplace")
plt.xlabel("Valeurs de X")
plt.ylabel("Densité de probabilité f(X)")
plt.legend()
plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()
```

Distribution de Laplace : Visualisation



Distribution de Laplace : Code Python (Simulation)

```
import numpy as np

# Fixer la graine (seed) pour la reproductibilité
np.random.seed(8302)

# Paramètres
mu = 0 # Paramètre de localisation
b = 1 # Paramètre d'échelle
n_échantillons = 10 # Nombre d'échantillons

# Générer des échantillons
samples = np.random.laplace(mu, b, n_échantillons)

# Afficher les résultats
print("Échantillons simulés :")
print(samples)
```

Résultat :

```
Échantillons simulés :
[ 0.63337526  0.79725134  2.01171125  0.82746529 -0.73911688 -0.20541841
  0.65911037  0.01124912  0.08297819  1.03010299]
```

Distribution du χ^2

Distribution du χ^2 : Définition

- **Définition :**

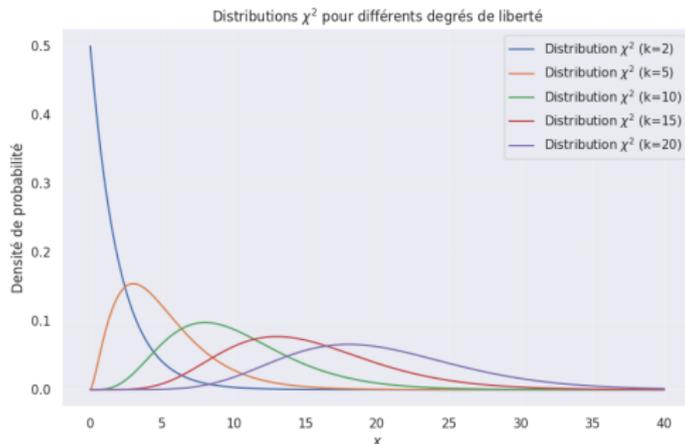
- La distribution du χ^2 (lu "khi carré" ou "khi-deux") est définie comme la somme des carrés de k variables normales standards indépendantes :

$$X \sim \chi_k^2, \quad \text{où } X = \sum_{i=1}^k Z_i^2, \quad Z_i \sim N(0, 1).$$

- k est le nombre de degrés de liberté, influençant la forme de la distribution.
- **Propriétés :**
 - La distribution est asymétrique, mais tend vers une normale pour de grands k .
 - Espérance : $\mathbb{E}[X] = k$.
 - Variance : $\text{Var}(X) = 2k$.
- **Applications courantes :**
 - Test d'ajustement (Goodness-of-Fit).
 - Test d'indépendance.
 - Analyse de la variance (tests de variance).

Distribution du χ^2 : Densité de Probabilité

- La densité de probabilité (PDF) pour une distribution du χ_k^2 avec k degrés de liberté : $f_X(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} \exp(-x/2)$,
 - $x \geq 0$ (décrit la somme des carrés de k variables).
 - k degrés de liberté (k plus grand, distribution plus symétrique).
 - Γ la fonction gamma (généralise factorielle : $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour les entiers positifs et plus largement pour les valeurs non entières).



Distribution du χ^2 : Test d'Ajustement

- Le test du χ^2 pour l'ajustement permet de vérifier si les fréquences observées d'un échantillon suivent une distribution théorique donnée.
- Hypothèses :**
 - H_0 : Les données observées suivent la distribution théorique spécifiée.
 - H_a : Les données observées ne suivent pas la distribution théorique spécifiée.
- p-valeur** : Probabilité d'observer une statistique de test aussi extrême ou plus extrême que celle obtenue, en supposant que l'hypothèse nulle (H_0) est vraie. Une plus grande p-valeur supporte l'hypothèse nulle (H_0).
- Valeur critique** : Seuil à partir duquel la statistique de test permet de rejeter H_0 , déterminée par le niveau de signification α et les degrés de liberté.
- Degrés de liberté** : Nombre de valeurs indépendantes dans un calcul statistique, souvent défini comme $k - 1$, où k est le nombre de catégories ou paramètres.

Distribution du χ^2 : Test d'Ajustement

- **Concept des degrés de liberté :**

- Les degrés de liberté (*degrees of freedom*, *df*) représentent le nombre de valeurs indépendantes dans un ensemble de données qui sont libres de varier lorsque l'on estime un paramètre statistique.

- **Degrés de liberté : Variance empirique comme exemple :**

- La variance de l'échantillon s^2 est calculée comme :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

où \bar{X} est la moyenne de l'échantillon.

- La moyenne \bar{X} est définie comme :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Une fois la moyenne calculée, une contrainte est introduite : les valeurs X_i doivent satisfaire la condition que leur somme reste égale à $n\bar{X}$.

Distribution du χ^2 : Test d'Ajustement

- **Degrés de liberté : Variance empirique comme exemple :**
 - Lors du calcul de s^2 , une des valeurs (\bar{X}) est déjà estimée à partir des données.
 - Cela signifie que sur les n valeurs initiales, seulement $n - 1$ peuvent varier librement tout en respectant la contrainte imposée par \bar{X} .
 - Ainsi, les degrés de liberté pour la variance sont $n - 1$, car 1 degré de liberté est utilisé pour estimer \bar{X} .
- Supposons que nous ayons $n = 3$ points de données : X_1, X_2, X_3 .

- La moyenne est calculée comme suit :

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}.$$

- Une fois X_1 et X_2 déterminés, X_3 est contraint par la relation :

$$X_3 = 3\bar{X} - X_1 - X_2.$$

- Cela signifie que seulement $n - 1 = 2$ valeurs (X_1, X_2) peuvent varier librement, ce qui laisse $n - 1$ degrés de liberté pour la variance.

Distribution du χ^2 : Test d'Ajustement

- **La p-valeur dépend-elle de α ?**
- **Réponse :** Non, la p-valeur ne dépend pas du niveau de signification (α).
- La p-valeur est calculée directement à partir des données et représente la probabilité d'observer une statistique de test aussi extrême ou plus extrême que celle obtenue, en supposant que l'hypothèse nulle (H_0) est vraie. Elle est une propriété des données et du test statistique utilisé.
- En revanche, α est un seuil choisi par le chercheur (souvent 0.05) pour décider d'accepter ou de rejeter H_0 . Il est utilisé pour comparer avec la p-valeur :
 - Si p-valeur $< \alpha$, H_0 est rejetée.
 - Si p-valeur $\geq \alpha$, H_0 n'est pas rejetée.
- Ainsi, la p-valeur est indépendante de α , mais la décision de rejeter ou non H_0 dépend de la comparaison entre la p-valeur et α .

Distribution du χ^2 : Test d'Ajustement

- **Étape 1. Formulation des hypothèses :**

- H_0 : Les fréquences observées suivent la distribution théorique.
- H_a : Les fréquences observées ne suivent pas la distribution théorique.

- **Étape 2. Calcul des fréquences attendues :** $E_i = n \cdot p_i$, où n est le total des observations et p_i la probabilité théorique de la catégorie i .

- **Étape 3. Calcul de la statistique Khi-deux :**

$\chi_{\text{stat}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$, où O_i représente la fréquence observée pour la catégorie i , et k est le nombre de catégories.

- **Étape 4. Degrés de liberté :** $df = k - 1$.

- **Étape 5. Décision :** Comparer la statistique χ_{stat}^2 avec la valeur critique ou utiliser la p -valeur. (càd, Si $\chi_{\text{stat}}^2 > \chi_{\text{critique}}^2$ ou $p < \alpha$, rejeter H_0 .)

Test χ^2 d'Ajustement : Exemple Numérique 1

- **Contexte :**

- Un casino souhaite vérifier si un dé est biaisé.
- Hypothèses :

H_0 : Le dé est équitable (distribution uniforme).

H_a : Le dé n'est pas équitable.

- **Données :**

- Résultats observés : [12, 18, 20, 15, 17, 18].
- Résultats attendus pour un dé équitable : [16.67, 16.67, 16.67, 16.67, 16.67, 16.67].

- **Objectif :**

- Calculer la statistique du Chi-carré :

$$\chi_{\text{stat}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

où O_i sont les valeurs observées et E_i les valeurs attendues.

Test χ^2 d'Ajustement : Exemple Numérique 1

- **Données :**

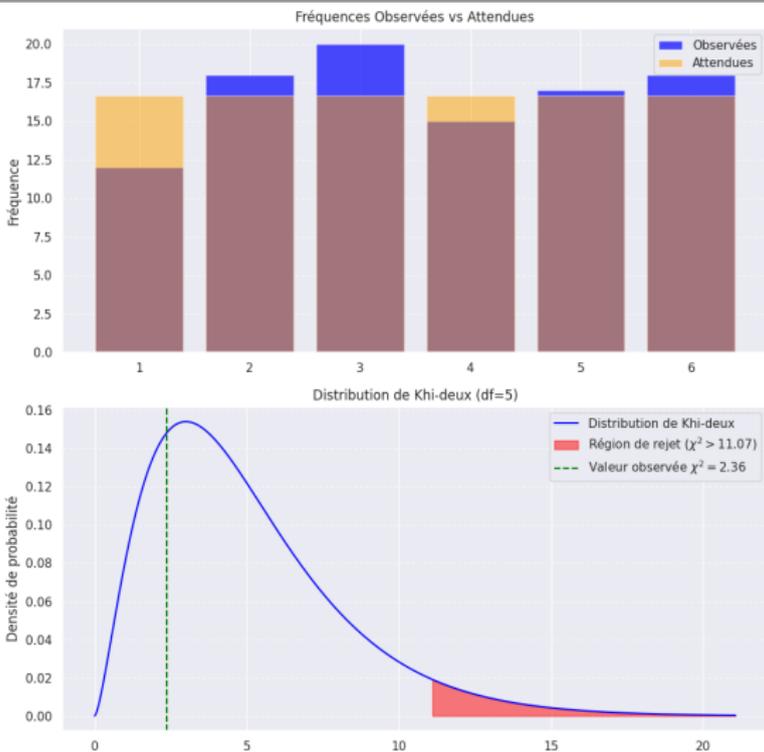
- Fréquences observées (O) : [12, 18, 20, 15, 17, 18].
- Fréquences attendues (E) : [16.67, 16.67, 16.67, 16.67, 16.67, 16.67]
 (distribution uniforme pour un dé équilibré).

- **Calcul de χ^2 :** $\chi^2_{\text{stat}} = \sum_{i=1}^6 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$. Exemple pour $O_1 = 12$ et $E_1 = 16.67$: $\frac{(12-16.67)^2}{16.67} = \frac{(-4.67)^2}{16.67} = \frac{21.81}{16.67} \approx 1.31$. En répétant pour toutes les catégories : $\chi^2 = 2.36$.

- **Degrés de liberté :** $df = k - 1 = 6 - 1 = 5$.

- **Décision :** Comparer $\chi^2_{\text{stat}} = 2.36$ à la valeur critique ($\chi^2_{0.05,5} = 11.07$).

Test χ^2 d'Ajustement : Exemple Numérique 1



Test χ^2 d'Ajustement : Exemple Numérique 1

- **Résultat :**

- $\chi_{\text{stat}}^2 = 2.36 < 11.07$ ($\alpha = 0.05$), donc H_0 n'est pas rejetée.

- **Conclusion :**

- Les fréquences observées sont compatibles avec une distribution uniforme.
- Il n'y a pas suffisamment de preuves pour conclure que le dé est biaisé.

Test χ^2 d'Ajustement : Code Python

```
import numpy as np
from scipy.stats import chi2
# Données
observed = np.array([12, 18, 20, 15, 17, 18]) # Fréquences observées
expected = np.array([16.67] * 6) # Fréquences attendues (distribution uniforme)
# Calcul de la statistique Khi-deux
chi_squared_stat = np.sum((observed - expected)**2 / expected)
degrees_of_freedom = len(observed) - 1 # Degrés de liberté = k - 1
alpha = 0.05
critical_value = chi2.ppf(1 - alpha, degrees_of_freedom) # Valeur critique pour alpha = 0.05
p_value = 1 - chi2.cdf(chi_squared_stat, degrees_of_freedom) # Calcul de la p-valeur
print(f"Statistique de Khi-deux : {chi_square_stat:.2f}")
print(f"Valeur critique (alpha={alpha}) : {chi_square_critical:.2f}")
print(f"p-valeur : {p_value:.4f}")
if chi_square_stat > chi_square_critical:
    print("Décision : Rejeter H0 (Les fréquences observées diffèrent significativement des attendues)")
else:
    print("Décision : Ne pas rejeter H0 (Pas de différence significative entre les fréquences)")
```

Résultat :

```
Statistique de Khi-deux : 2.36
Valeur critique (alpha=0.05) : 11.07
p-valeur : 0.7975
Décision : Ne pas rejeter H0 (Pas de différence significative entre les fréquences)
```

Test χ^2 d'Ajustement : Exemple Numérique 2

- **Contexte** : Un magasin vend quatre catégories de produits : **A** (électronique), **B** (vêtements), **C** (épicerie), et **D** (meubles).
 - Selon des études de marché, les ventes sont attendues à hauteur de :

$$P(A) = 40\%, \quad P(B) = 25\%, \quad P(C) = 20\%, \quad P(D) = 15\%.$$

- Les fréquences observées pour une journée sont :

$$O(A) = 50, \quad O(B) = 30, \quad O(C) = 10, \quad O(D) = 10.$$

- **Hypothèses** :

- H_0 : Les ventes observées suivent la distribution attendue.
- H_a : Les ventes observées ne suivent pas la distribution attendue.

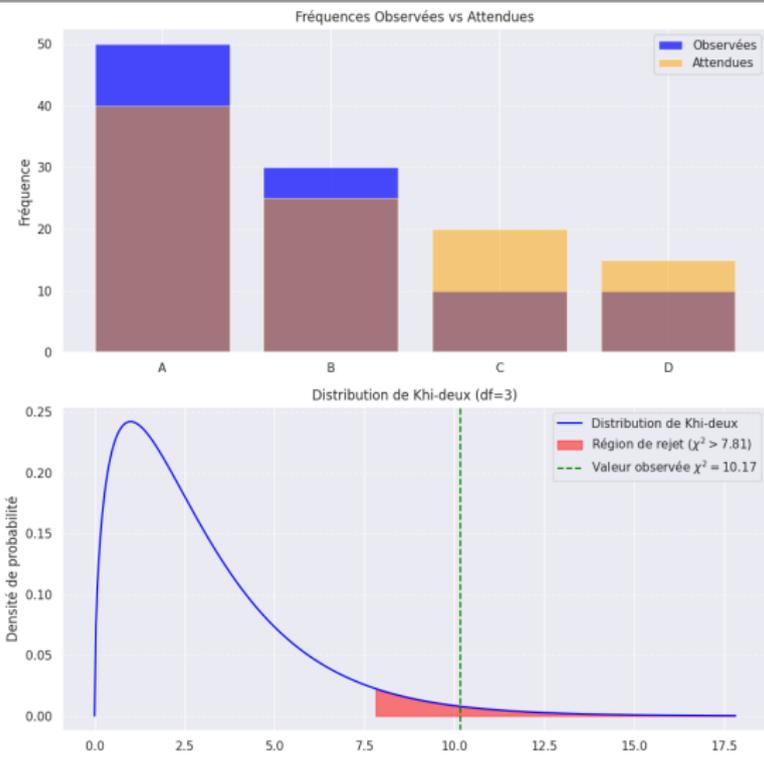
- **Fréquences attendues (E)** :

$E(A) = 40, \quad E(B) = 25, \quad E(C) = 20, \quad E(D) = 15$, basées sur les proportions théoriques et un total de 100 ventes ($n = 100$).

Test χ^2 d'Ajustement : Exemple Numérique 2

- Calcul de χ^2 :** $\chi_{\text{stat}}^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$. Exemple pour A :
 $\frac{(50-40)^2}{40} = \frac{10^2}{40} = 2.5$. En répétant pour toutes les catégories :
 $\chi_{\text{stat}}^2 = 2.5 + 1.0 + 5.0 + 1.67 = 10.17$.
- Degrés de liberté :** $df = k - 1 = 4 - 1 = 3$.
- Valeur critique :** Pour $\alpha = 0.05$, $\chi_{\text{critique}}^2 = 7.81$ (table du χ^2).
- p-valeur :** p-valeur = 0.0172 (calculée avec Python).
- Décision :**
 - $\chi_{\text{stat}}^2 = 10.17 > \chi_{\text{critique}}^2 = 7.81$, ou p-valeur = 0.0172 < $\alpha = 0.05$.
 - Conclusion : Rejeter H_0 . Les fréquences observées diffèrent significativement des fréquences attendues.

Test χ^2 d'Ajustement : Exemple Numérique 2



Test χ^2 d'Ajustement : Code python 2

```
import numpy as np
from scipy.stats import chi2
# Fréquences observées et attendues
categories = ['A', 'B', 'C', 'D']
observed = np.array([50, 30, 10, 10])
expected = np.array([40, 25, 20, 15])
# Calcul de la statistique de Khi-deux
chi_square_stat = np.sum((observed - expected)**2 / expected)
df = len(categories) - 1 # Degrés de liberté
alpha = 0.05
chi_square_critical = chi2.ppf(1 - alpha, df) # Valeur critique pour alpha = 0.05
p_value = 1 - chi2.cdf(chi_square_stat, df) # p-valeur
print(f"Statistique de Khi-deux : {chi_square_stat:.2f}")
print(f"Valeur critique (alpha={alpha}) : {chi_square_critical:.2f}")
print(f"p-valeur : {p_value:.4f}")
if chi_square_stat > chi_square_critical:
    print("Décision : Rejeter H0 (Les fréquences observées diffèrent significativement des
else:
    print("Décision : Ne pas rejeter H0 (Pas de différence significative entre les fréquences)
```

Résultat :

```
Statistique de Khi-deux : 10.17
Valeur critique (alpha=0.05) : 7.81
p-valeur : 0.0172
Décision : Rejeter H0 (Les fréquences observées diffèrent significativement des attendues)
```

Test χ^2 d'Indépendance

Test χ^2 d'Indépendance : Définition

- Le test d'indépendance χ^2 permet de vérifier si deux variables catégoriques sont indépendantes l'une de l'autre.
- Hypothèses :**
 - H_0 : Les deux variables sont indépendantes.
 - H_a : Les deux variables ne sont pas indépendantes (elles sont associées).
- Statistique du test :** $\chi^2_{\text{stat}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$, où O_{ij} est la valeur observée dans la cellule (i, j) , et E_{ij} est la valeur attendue donnée par : $E_{ij} = \frac{\text{total.ligne}_i \times \text{total.colonne}_j}{\text{total.général}}$.
- Degrés de liberté :** $df = (r - 1) \times (c - 1)$, où r est le nombre de lignes et c le nombre de colonnes.

Test χ^2 d'Indépendance : Exemple Numérique

- **Contexte :**

- Une étude examine si les habitudes de tabagisme (*Non-fumeur, Fumeur léger, Fumeur intense*) sont associées à la fréquence d'exercice (*Faible, Modérée, Élevée*).
- Les données sont collectées via une enquête et présentées sous forme de tableau de contingence.

- **Tableau de contingence :**

	Non-fumeur	Fumeur léger	Fumeur intense	Total
Exercice Faible	150	100	50	300
Exercice Modéré	250	150	100	500
Exercice Élevé	100	50	50	200
Total	500	300	200	1000

- **Hypothèses :**

- H_0 : Les habitudes de tabagisme et la fréquence d'exercice sont indépendantes.
- H_a : Les habitudes de tabagisme et la fréquence d'exercice ne sont

Test χ^2 d'Indépendance : Exemple Numérique

- 1. Calcul des fréquences attendues :

$$E_{ij} = \frac{\text{total_ligne}_i \times \text{total_colonne}_j}{\text{total_général}}$$

Exemple pour E_{11} (Non-fumeur et Exercice Faible) :

$$E_{11} = \frac{300 \times 500}{1000} = 150$$

- 2. Calcul de la statistique de Khi-deux :

$$\chi^2_{\text{stat}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

- 3. Degrés de liberté :

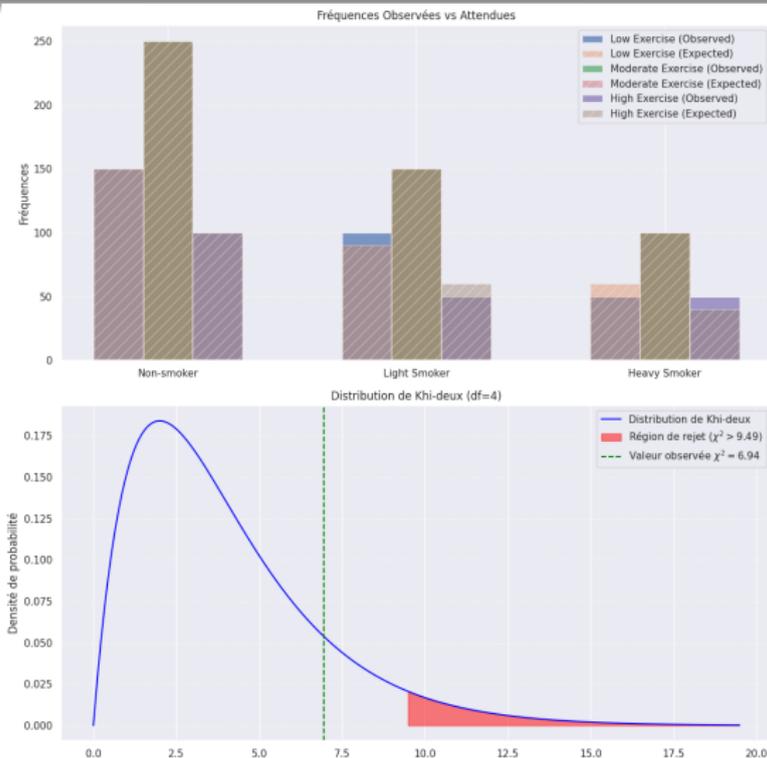
$$df = (r - 1) \times (c - 1) = (3 - 1) \times (3 - 1) = 4$$

- 4. Décision :

- Comparer la valeur χ^2_{stat} observée à la valeur critique (χ^2_{critique}).

- Utiliser la p -valeur pour évaluer la force des preuves contre H_0 .

Test χ^2 d'Indépendance : Exemple Numérique



Test χ^2 d'Indépendance : Code Python

```
import numpy as np
from scipy.stats import chi2
# Observed frequencies (survey data)
observed = np.array([[150, 100, 50],[250, 150, 100],[100, 50, 50]])
row_totals = observed.sum(axis=1)
col_totals = observed.sum(axis=0)
grand_total = observed.sum() # Totaux des lignes et colonnes
expected = np.outer(row_totals, col_totals) / grand_total # Fréquences attendues
chi_square_stat = np.sum((observed - expected)**2 / expected) # Statistique de Khi-deux
df = (observed.shape[0] - 1) * (observed.shape[1] - 1) # Degrés de liberté
alpha = 0.05
critical_value = chi2.ppf(1 - alpha, df)
p_value = 1 - chi2.cdf(chi_square_stat, df)
print(f"Statistique de Khi-deux : {chi_square_stat:.2f}")
print(f"Valeur critique (alpha={alpha}) : {critical_value:.2f}")
print(f"p-valeur : {p_value:.4f}")
if chi_square_stat > critical_value:
    print("Décision : Rejeter H0 (Les variables sont associées)")
else:
    print("Décision : Ne pas rejeter H0 (Les variables sont indépendantes)")
```

Résultat :

```
Statistique de Khi-deux : 6.94
Valeur critique (alpha=0.05) : 9.49
p-valeur : 0.1389
```

Test χ^2 de la Variance

Test χ^2 de la Variance

- **Relation avec les variables normales :**

- La somme des carrés de k variables normales standards indépendantes suit une distribution χ^2 avec k degrés de liberté :
 $X \sim \chi_k^2$, où $X = \sum_{i=1}^k Z_i^2$, $Z_i \sim N(0, 1)$.

- **Lien avec les écarts quadratiques et la variance :**

- Pour n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n suivant $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, les écarts $X_i - \mu$ sont également normalement distribués, où $(X_i - \mu) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
- En standardisant les écarts : $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$, $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- La somme des carrés de ces écarts : $\sum_{i=1}^n Z_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2$.

- **Variance de l'échantillon :**

- La variance empirique de l'échantillon s^2 est reliée aux écarts quadratiques : $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, où \bar{X} est la moyenne de l'échantillon.
- \Rightarrow Sous l'hypothèse de la normalité des X_i , $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.

Test χ^2 de la Variance : Variance s^2 de l'Échantillon

- La formule de la variance empirique s^2 d'un échantillon de taille n est donnée par :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

- Si nous utilisons n au lieu de $n-1$ dans le calcul de la variance, nous obtiendrons une variance biaisée (où $\mathbb{E}[s_{\text{biaisée}}^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$).
- En effet, l'utilisation de n sous-estimerait systématiquement la variance réelle de la population σ^2 .
- L'ajustement à $n-1$ corrige ce biais, en particulier pour les petits échantillons.

Test χ^2 de la Variance : La Statistique χ_{stat}^2

- Le test de variance avec χ^2 compare la variance de l'échantillon s^2 à une variance populationnelle hypothétique σ_0^2 .
- Dans le test de variance basé sur la distribution du χ^2 , la statistique est donnée par :

$$\chi^2 = \frac{(n - 1)s^2}{\sigma_0^2}.$$

- La distribution du χ^2 prend en compte cet ajustement, garantissant une inférence statistique valide.

Test χ^2 de la Variance : Validité et Robustesse

- **Validité :**

- La distribution χ^2 est valide si :
 - Les données suivent une distribution normale.
 - Les observations sont indépendantes.

- **Robustesse :**

- Le test χ^2 pour la variance est **non robuste** à la non-normalité :
 - Des écarts par rapport à la normalité peuvent fausser les résultats.
 - Cela est particulièrement vrai pour les petits échantillons.

- **Alternatives en cas de non-normalité :**

- Utiliser des tests non paramétriques ou des méthodes de bootstrap pour évaluer la variance.
- Transformer les données pour se rapprocher d'une distribution normale.

Test χ^2 de la Variance : En Cas de Non-Normalité

● Méthodes Robustes et Alternatives :

- **Méthodes de Bootstrap** : Utilisation du rééchantillonnage pour estimer la distribution de la variance de l'échantillon et construire des intervalles de confiance sans supposer la normalité des données.
- **Transformation des Données** : Application de transformations comme le log, la racine carrée, ou le Box-Cox pour se rapprocher d'une distribution normale, rendant le test de variance χ^2 approprié.
- **Techniques Statistiques Robustes** : Utilisation de méthodes de réduction de l'impact des valeurs extrêmes, telles que les variances tronquées ou Winsorisées, pour améliorer la fiabilité du test.
- **Méthodes Nonparamétriques** : Emploi de techniques non basées sur la distribution normale pour évaluer la variance, comme l'analyse de la médiane des écarts absolus.
- **Méthodes Bayésiennes** : Utiliser des distributions a priori pour ajuster les croyances à propos de la variance en fonction des données observées, fournissant des estimations de variance qui ne dépendent pas strictement de la normalité.

Test χ^2 de la Variance : Définition

- Le test χ^2 de variance permet de vérifier si la variance d'une population suit une valeur hypothétique donnée (σ_0^2).
- Hypothèses :**
 - H_0 : La variance de la population est égale à la variance hypothétique ($\sigma^2 = \sigma_0^2$).
 - H_a : La variance de la population est différente de la variance hypothétique ($\sigma^2 \neq \sigma_0^2$).
- Statistique de test :** $\chi_{\text{stat}}^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2}$, où n est la taille de l'échantillon, s^2 est la variance de l'échantillon, et σ_0^2 est la variance hypothétique.
- Degrés de liberté :** $df = n - 1$, où n est la taille de l'échantillon.
- Applications courantes :**
 - Vérifier la constance des processus industriels (contrôle de qualité).
 - Comparer la variance entre différentes populations ou groupes.
 - Évaluer si une nouvelle méthode ou un traitement modifie la variance d'une population.

Test de Variance χ^2 : Étapes

- **Étape 1. Formulation des hypothèses :**

- $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
- $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

- **Étape 2. Calcul de la statistique de test :**

$$\chi_{\text{stat}}^2 = \frac{(n - 1) \cdot s^2}{\sigma_0^2}$$

- **Étape 3. Degrés de liberté :**

$$\text{df} = n - 1$$

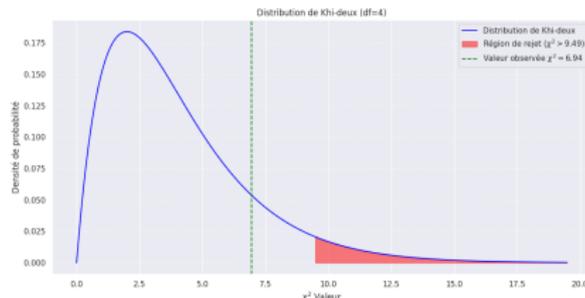
- **Étape 4. Décision :**

- Comparer χ_{stat}^2 observée à χ_{critique}^2 pour un test bilatéral.
- Vérifier si χ_{stat}^2 tombe dans la région de rejet ou calculer la p -valeur.

(Tests Unilatéraux et Bilatéraux)

[Tests Unilatéraux (à une extrémité)]

- **Les tests unilatéraux** sont utilisés lorsque l'hypothèse de recherche spécifie une direction d'effet attendu.
- Ces tests évaluent la possibilité d'une différence significative dans une direction spécifique prédéfinie par l'hypothèse.
- **Quand utiliser un test unilatéral?**
 - L'hypothèse de recherche indique clairement une augmentation ou une diminution attendue (par exemple, "un nouveau médicament augmentera l'efficacité du traitement").
 - Seul un changement dans une direction spécifique est pertinent ou possible selon le contexte de l'étude.



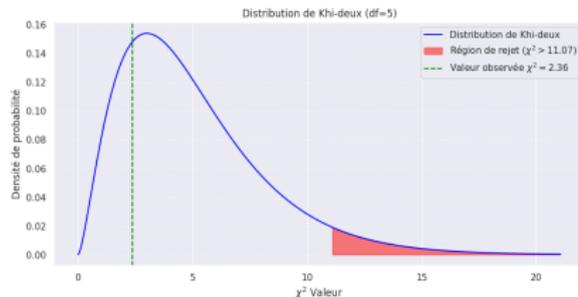
[Tests Bilatéraux (à deux extrémités)]

- **Les tests bilatéraux** sont utilisés pour détecter une différence (extrême) par rapport à une valeur hypothétique sans spécifier la direction de la différence (extrême).
- Ces tests sont appropriés lorsque l'effet peut se manifester dans les deux directions (supérieur ou inférieur).
- **Quand utiliser un test bilatéral?**
 - L'hypothèse de recherche ne spécifie pas de direction d'effet (par exemple, "y a-t-il une différence (extrême) dans les taux de réponse entre les deux groupes?").
 - Il est essentiel de détecter des effets dans les deux directions, que ce soit une augmentation ou une diminution.



[Tests du χ^2 Unilatéraux et Bilatéraux]

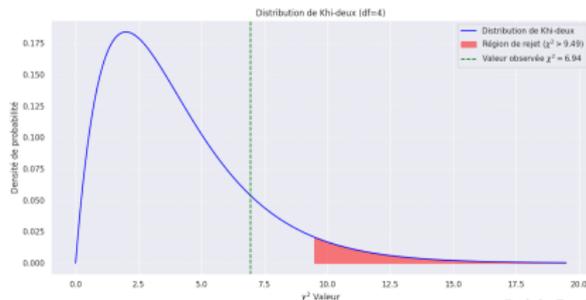
- **Test du χ^2 pour l'ajustement :**
 - **Aspect Technique:** Basée sur la somme des carrés des écarts entre les fréquences observées et attendues (ce qui est toujours positif) cela implique un examen de l'extrémité supérieure de la distribution du χ^2 , où de grandes valeurs suggèrent un mauvais ajustement.
 - **Interprétation Conceptuelle:** Conceptuellement, le test est considéré comme bilatéral car il détecte toute déviation significative par rapport aux fréquences attendues, indépendamment de la direction de ces déviations.



[Tests du χ^2 Unilatéraux et Bilatéraux]

- **Test du χ^2 pour l'indépendance :**

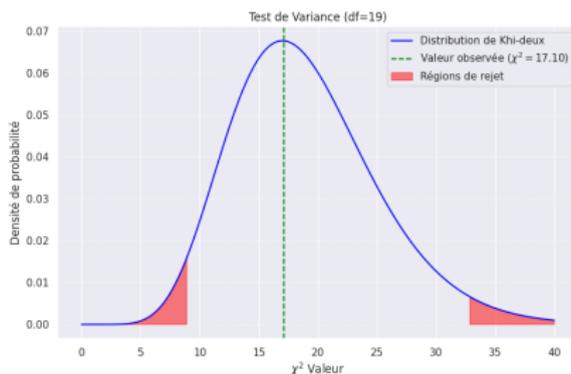
- **Aspect Technique:** Évalue l'indépendance en sommant **les carrés des écarts entre les fréquences observées et celles attendues**. La statistique résultante est également évaluée contre la queue supérieure de sa distribution.
- **Interprétation Conceptuelle:** Bien que l'évaluation technique se concentre sur des valeurs élevées uniquement, le test est souvent décrit comme bilatéral parce qu'il est sensible aux écarts indiquant une dépendance, qu'ils soient en excès ou en défaut par rapport aux attentes.



[Tests du χ^2 Unilatéraux et Bilatéraux]

• Test du χ^2 pour la Variance

- Lorsqu'on teste si la variance d'un échantillon diffère d'une variance hypothétisée, le test du χ^2 pour la variance est utilisé de manière bilatérale. Ceci est pertinent lorsque l'hypothèse est que la variance réelle pourrait être soit supérieure, soit inférieure à la variance théorique.
- Ce test bilatéral est crucial pour capturer toute variation significative qui pourrait avoir des implications importantes dans des contextes cliniques, industriels ou de recherche.



[Tests du χ^2 Unilatéraux et Bilatéraux : p -valeur]

- **Pour le test unilatéral :** mesure la probabilité sous H_0 d'observer une valeur de la statistique de test aussi (ou plus) extrême que la valeur observée, dans la direction spécifiée par H_0 (supérieure ou inférieure) :

- Pour une statistique test supposée supérieure à la valeur sous H_0 :

$$p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi_{\text{stat}}^2, k),$$

où CDF est la fonction de répartition qui exprime la probabilité que la statistique de test sous H_0 soit inférieure ou égale à la valeur observée χ_{stat}^2 .

- Pour une statistique test supposée inférieure à la valeur sous H_0 :

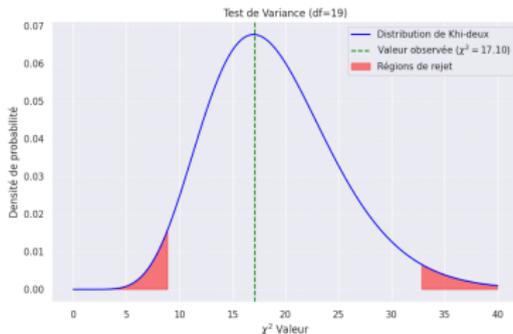
$$p\text{-value} = \text{CDF}(\chi_{\text{stat}}^2, k).$$

[Tests du χ^2 Unilatéraux et Bilatéraux : p -valeur]

- **Pour le test bilatéral** : la p -valeur évalue la probabilité sous H_0 d'observer une valeur de la statistique de test aussi (ou plus) extrême que la valeur observée, dans les deux directions :

$$p\text{-value} = 2 \times \min(1 - \text{CDF}(\chi_{\text{stat}}^2, k), \text{CDF}(\chi_{\text{stat}}^2, \text{df}))$$

- où CDF est la fonction de répartition qui exprime la probabilité que la statistique de test sous H_0 soit inférieure ou égale à la valeur observée χ_{stat}^2 .



Fin (Tests Unilatéraux et Bilatéraux)

Test χ^2 de la Variance : Exemple Numérique

● Contexte :

- Une entreprise souhaite vérifier si la variance de la durée de fabrication d'un produit est conforme à une valeur cible (σ_0^2).
- L'objectif est d'évaluer la constance du processus de fabrication.

● Hypothèses :

- H_0 : La variance de la population est égale à σ_0^2 ($\sigma^2 = \sigma_0^2$).
- H_a : La variance de la population n'est pas égale à σ_0^2 ($\sigma^2 \neq \sigma_0^2$).

● Statistique de test :

- Utilise la distribution χ^2 pour comparer la variance observée à la variance hypothétique.
- Formule :

$$\chi_{\text{stat}}^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2},$$

où n est la taille de l'échantillon, s^2 est la variance de l'échantillon, et σ_0^2 est la variance hypothétique.

Test de Variance χ^2 : Exemple Numérique

- **Contexte :**

- Taille de l'échantillon : $n = 20$.
- Variance de l'échantillon : $s^2 = 4.5$.
- Variance hypothétique : $\sigma_0^2 = 5$.
- Niveau de signification : $\alpha = 0.05$.

- **Statistique de test :**

$$\chi_{\text{stat}}^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1) \cdot 4.5}{5} = 17.1$$

- **Degrés de liberté :**

$$df = n - 1 = 19$$

- **Valeurs critiques :**

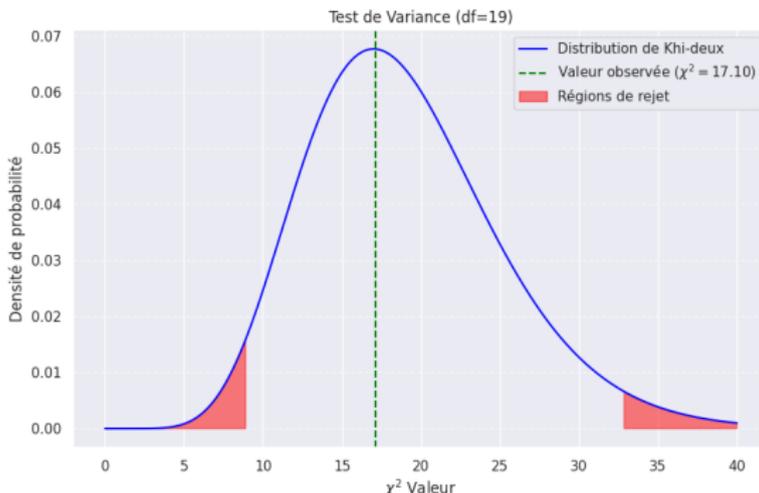
- $\chi_{\text{critique}, 0.025, 19}^2 = 8.91$
- $\chi_{\text{critique}, 0.975, 19}^2 = 32.85$

Test de Variance χ^2 : Code Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import chi2
n = 20 # Données : Taille de l'échantillon
s_squared = 4.5 # Données : Variance observée
sigma_squared_0 = 5 # Données : Variance hypothétique
alpha = 0.05 # Données : Niveau de signification
chi_square_stat = (n - 1) * s_squared / sigma_squared_0 # Statistique de test
df = n - 1 # Degrés de liberté
# Valeurs critiques
chi_square_critical_low = chi2.ppf(alpha / 2, df)
chi_square_critical_high = chi2.ppf(1 - alpha / 2, df)
# p-valeur
p_value = 2 * min(1 - chi2.cdf(chi_square_stat, df), chi2.cdf(chi_square_stat, df))
# Résultats
print(f"Statistique de Khi-deux : {chi_square_stat:.2f}")
print(f"Valeurs critiques : [{chi_square_critical_low:.2f}, "
      f"{chi_square_critical_high:.2f}]")
print(f"p-valeur : {p_value:.4f}")
if (chi_square_stat < chi_square_critical_low or
    chi_square_stat > chi_square_critical_high):
    print("Décision : Rejeter H0 (la variance diffère significativement de l'hypothèse)")
else:
    print("Décision : Ne pas rejeter H0 (pas de différence significative)")
```

Interprétation des Résultats

- **Statistique de test** : $\chi_{\text{stat}}^2 = 17.1$
- **Valeurs critiques** : $[8.91, 32.85]$
- **Décision** :
 - χ_{stat}^2 se situe entre les valeurs critiques.
 - Nous ne rejetons pas H_0 : la variance observée n'est pas significativement différente de la variance hypothétique.



Calcul de l'Intervalle de Confiance pour la Variance avec χ^2

Distribution du χ^2 : Intervalle de Confiance pour s^2

● Base Statistique :

- Si un échantillon de taille n provient d'une population normalement distribuée, la variance s^2 de l'échantillon est utilisée pour estimer la variance de la population σ^2 .
- Le calcul est basé sur : $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.

● Formulation de l'Intervalle de Confiance :

- Les valeurs critiques du χ^2 pour les bornes inférieure et supérieure sont déterminées selon le niveau de confiance désiré, $1 - \alpha$.
- L'intervalle de confiance pour σ^2 est donné par :

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2} \right]$$

● Interprétation :

- Cet intervalle indique que nous sommes $(1 - \alpha) \times 100\%$ confiants que la variance réelle σ^2 de la population est comprise dans cet intervalle.
- Les bornes de l'intervalle sont inversement proportionnelles aux valeurs de χ^2 , reflétant la distribution asymétrique du χ^2 .

Distribution du χ^2 : Intervalle de Confiance pour s^2

- **Importance :**

- Fournit une méthode rigoureuse pour estimer la variabilité d'une population basée sur un échantillon.
- Essentiel dans les domaines requérant une précision dans l'estimation de la variance, comme le contrôle de qualité ou la recherche clinique.

- **Applications :**

- Utilisé pour assurer la conformité des processus industriels aux spécifications.
- Évaluation de la variabilité dans les réponses cliniques ou biologiques.

Distribution du χ^2 : Intervalle de Confiance pour s^2

- **Validité de la Distribution χ^2 :**
 - La distribution est valide sous l'hypothèse de normalité des données.
 - La robustesse de cette méthode diminue avec les déviations par rapport à la normalité, particulièrement pour les petits échantillons.
- **Alternatives :**
 - En cas de non-normalité, envisager des méthodes robustes ou non paramétriques.
 - Transformer les données peut aider à mieux se conformer à la distribution normale.

Intervalle de Confiance pour s^2 avec χ^2 : Exemple

- **Contexte :**

- Taille de l'échantillon : $n = 20$.
- Variance de l'échantillon : $s^2 = 4.5$.
- Niveau de confiance : 95% ($\alpha = 0.05$).

- **Calcul de l'intervalle de confiance :**

- Utiliser la distribution χ^2 avec $n - 1 = 19$ degrés de liberté.
- Les valeurs critiques pour χ^2 à $\alpha/2 = 0.025$ et $1 - \alpha/2 = 0.975$ sont respectivement $\chi_{0.025,19}^2 = 8.91$ et $\chi_{0.975,19}^2 = 32.85$.

- **Formule de l'intervalle de confiance :** $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.975,19}^2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.025,19}^2} \right]$

- **Substitution des valeurs :** $\left[\frac{(20-1) \cdot 4.5}{32.85}, \frac{(20-1) \cdot 4.5}{8.91} \right] \approx [2.60, 9.60]$

- **Interprétation :**

- Nous sommes 95% confiants que la variance réelle σ^2 de la population est comprise entre 2.60 et 9.60.

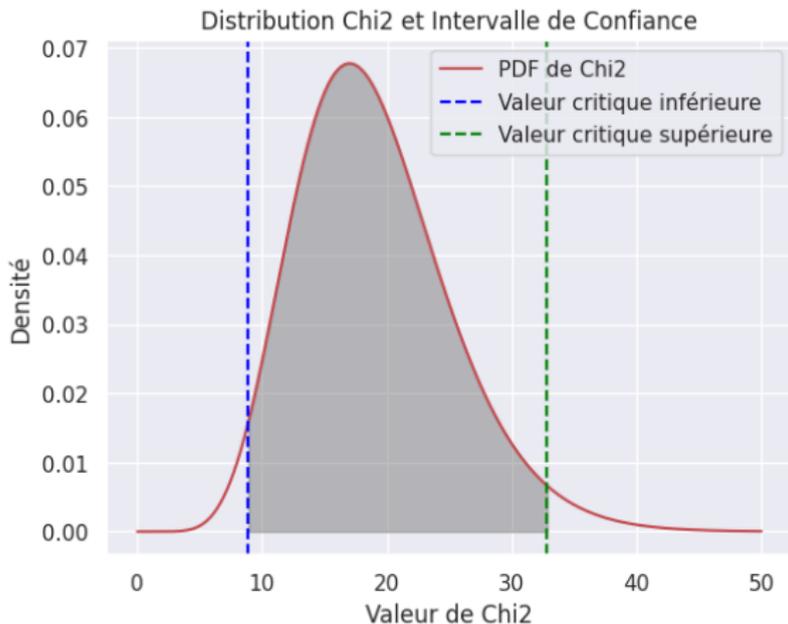
Intervalle de Confiance pour s^2 avec χ^2 : Code python

```
import numpy as np
from scipy.stats import chi2
import matplotlib.pyplot as plt
# Taille de l'échantillon et variance de l'échantillon
n = 20
s_squared = 4.5
alpha = 0.05
# Calcul des valeurs critiques de la distribution Chi2
chi_squared_lower = chi2.ppf(alpha / 2, n-1)
chi_squared_upper = chi2.ppf(1 - alpha / 2, n-1)
# Calcul de l'intervalle de confiance pour la variance de la population
lower_bound = (n - 1) * s_squared / chi_squared_upper
upper_bound = (n - 1) * s_squared / chi_squared_lower
# Affichage de l'intervalle de confiance
print(f"L'intervalle de confiance à 95% pour la variance de la population est "
      f"approximativement ({lower_bound:.2f}, {upper_bound:.2f})")
```

Résultat :

L'intervalle de confiance à 95% pour la variance de la population est approximativement (2.60, 9.60)

Distribution χ^2 : Intervalle de Confiance pour la Variance



Lien entre Test d'Hypothèse et Intervalles de Confiance

Lien entre Test d'Hypothèse et Intervalles de Confiance

● Introduction:

- Le test d'hypothèse et la construction d'intervalles de confiance sont deux méthodes statistiques fondamentales utilisées pour inférer des informations sur des paramètres de population à partir de données d'échantillon.

● Test d'Hypothèse:

- **But:** Décider de rejeter ou non l'hypothèse nulle (H_0) concernant un paramètre de la population.
- **Méthode:** Calcul d'une statistique de test et comparaison avec une valeur critique issue d'une distribution théorique.
- **Décision:** Rejet ou non-rejet de H_0 basé sur la valeur p , qui mesure la probabilité d'observer une statistique aussi extrême que celle observée, si H_0 est vraie.

Lien entre Test d'Hypothèse et Intervalles de Confiance

● Intervalles de Confiance:

- **But:** Fournir une plage de valeurs plausibles pour un paramètre inconnu de la population.
- **Méthode:** Construction autour de l'estimation d'échantillon pour inclure le paramètre avec un niveau de confiance donné (par exemple, 95%).
- **Interprétation:** Si un intervalle de confiance pour une moyenne ne comprend pas la valeur de μ_0 spécifiée sous H_0 , cela suggère qu'un test d'hypothèse correspondant rejetterait H_0 .

● Lien entre les Deux:

- Si un test d'hypothèse à 5% de niveau de signification conduit au rejet de H_0 , un intervalle de confiance de 95% pour ce paramètre ne devrait pas contenir μ_0 .
- Inversement, si μ_0 est inclus dans l'intervalle de confiance à 95%, alors un test d'hypothèse à 5% de niveau de signification ne rejetterait pas H_0 .

Distribution t de Student

Distribution t de Student : Définition

● Définition :

- Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (Z suit la loi normale centrée réduite).
- Soit U indépendante de Z et $U \sim \chi_k^2$ à k degrés de liberté.
- La variable aléatoire continue T définie par

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/k}}$$

suit une loi de Student à k degrés de liberté : $T \sim t_k$.

● Propriétés :

- Converge vers $\mathcal{N}(0, 1)$ lorsque k augmente.
- Espérance : $\mathbb{E}[T] = 0$.
- Variance : $\text{Var}[T] = \frac{k}{k-2}$, $k > 2$.

● Applications courantes :

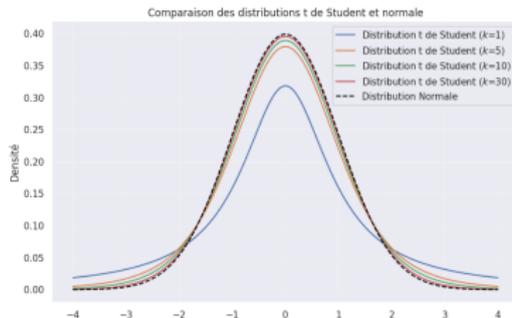
- Comparaison d'une moyenne issue d'un petit échantillon ($n < 30$) normalement distribué à une valeur théorique.
- Analyse de régression pour tester la significativité des coefficients.
- Construction d'intervalles de confiance pour la moyenne d'une population normalement distribuée lorsque l'écart-type est inconnu.

Distribution t de Student : Densité de Probabilité

- La densité de probabilité de $T \sim t_k$ est donnée par :

$$f_T(t; k) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}},$$

- t est la valeur que prend la variable aléatoire T .
- k représente les degrés de liberté.
- $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma.
- k faibles \Rightarrow queues épaisses (sensibles aux valeurs extrêmes).
- Lorsque $k \rightarrow \infty$, la distribution t_k tend vers une $\mathcal{N}(0, 1)$.



Test t de Student

Test t de Student : Définition

- Le test t de Student permet de vérifier si la moyenne d'une population suit une valeur théorique donnée (μ_0).
- Hypothèses :**
 - H_0 : La moyenne de la population est égale à la moyenne théorique ($\mu = \mu_0$).
 - H_a : La moyenne de la population est différente de la moyenne théorique ($\mu \neq \mu_0$).

- Statistique de test :**

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}},$$

où \bar{X} est la moyenne de l'échantillon, s est l'écart-type de l'échantillon, et n est la taille de l'échantillon.

- Degrés de liberté :**

$$k = n - 1,$$

où n est la taille de l'échantillon.

Test t de Student : Étapes

- **Étape 1. Formulation des hypothèses :**

- $H_0 : \mu = \mu_0$
- $H_a : \mu \neq \mu_0$

- **Étape 2. Calcul de la statistique de test :**

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

- **Étape 3. Degrés de liberté :**

$$k = n - 1$$

- **Étape 4. Décision :**

- Utiliser la distribution t_k avec k degrés de liberté pour trouver la valeur critique à un niveau de signification donné α , ou calculer la p -valeur.
- Rejeter H_0 si la valeur observée de t est plus extrême que la valeur critique, selon les seuils définis par la distribution t .

Test t de Student: Exemple Numérique

● Contexte :

- Une entreprise affirme que le temps moyen de livraison est de 30 minutes.
- Données observées : [28, 32, 35, 30, 29, 31, 36, 27, 34, 33].
- Taille de l'échantillon : $n = 10$.

● Hypothèses :

- $H_0 : \mu = 30$ (Le temps moyen est de 30 minutes).
- $H_a : \mu \neq 30$ (Le temps moyen diffère de 30 minutes).

● Calculs :

- Moyenne de l'échantillon : $\bar{X} = 31.5$,
- Écart-type : $s = 3.03$,
- Statistique t : $t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{31.5 - 30}{3.03/\sqrt{10}} \approx 1.57$.

● Degrés de liberté : $k = n - 1 = 9$.

● Valeur critique ($\alpha = 0.05$) : $\pm t_{0.025,9} = \pm 2.26$.

● p-valeur : p-valeur = 0.1516.

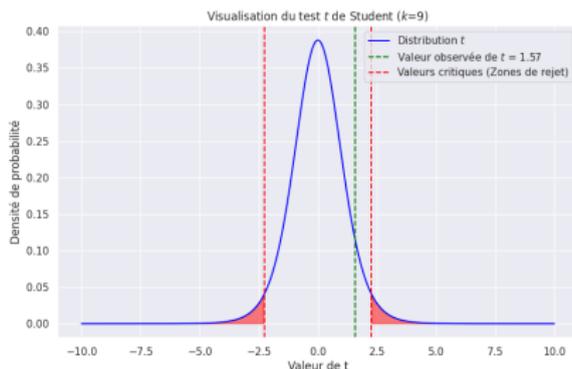
Test t de Student : Décision et Interprétation

- **Résultats :**

- Statistique t : $t = 1.57$,
- Valeurs critiques : ± 2.26 ,
- p-valeur = 0.1516.

- **Décision :**

- $|t| = 1.57 < 2.262$ (t n'est pas dans la région de rejet).
- p-valeur = 0.1516 $>$ $\alpha = 0.05$.
- Ne pas rejeter H_0 : il n'y a pas de différence significative entre le temps moyen observé et l'affirmation de l'entreprise.



Test t de Student: Code Python

```
import numpy as np
from scipy.stats import t
data = np.array([28, 32, 35, 30, 29, 31, 36, 27, 34, 33]) # Données
n = len(data) # Taille de l'échantillon
mu = 30 # Moyenne hypothétique
sample_mean = np.mean(data) # Moyenne
sample_std = np.std(data, ddof=1) # écart-type
t_statistic = (sample_mean - mu) / (sample_std / np.sqrt(n)) # Statistique t
df = n - 1 # Degrés de liberté
alpha = 0.05
critical_value = t.ppf(1 - alpha / 2, df) # Valeur critique
p_value = 2 * (1 - t.cdf(abs(t_statistic), df)) # p-valeur
# Résultats
print(f"Moyenne échantillon : {sample_mean:.2f}, Écart-type : {sample_std:.2f}")
print(f"Statistique t : {t_statistic:.2f}, Degrés de liberté : {df}")
print(f"Valeur critique : ±{critical_value:.2f}")
print(f"p-valeur : {p_value:.4f}")
if abs(t_statistic) > critical_value:
    print("Décision : Rejeter H0 (différence significative).")
else:
    print("Décision : Ne pas rejeter H0 (pas de différence significative).")
```

Résultat :

Moyenne de l'échantillon : 31.50, Écart-type : 3.03

Statistique t : 1.57, Degrés de liberté : 9

Valeurs critiques : ± 2.262, 2.262

Calcul de l'Intervalle de Confiance pour la Moyenne avec la Distribution t de Student

Distribution t de Student : Intervalle de Confiance

- **Base Statistique :**

- Pour un échantillon de taille n issu d'une population normalement distribuée, l'intervalle de confiance pour la moyenne utilise la moyenne de l'échantillon \bar{X} et l'écart-type de l'échantillon s .
- Le calcul repose sur la statistique t : $\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$.

- **Formulation de l'Intervalle de Confiance :**

- Les valeurs critiques de t pour les bornes inférieure et supérieure sont déterminées par le niveau de confiance $1 - \alpha$.
- L'intervalle de confiance pour μ est donné par :

$$\left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

- **Interprétation :**

- Cet intervalle indique avec une confiance de $(1 - \alpha) \times 100\%$ que la moyenne réelle μ de la population est comprise dans cet intervalle.

Distribution t de Student : Intervalle de Confiance

- **Importance :**

- Fournit une estimation précise de la moyenne d'une population basée sur un échantillon.
- Crucial dans les études où la précision de l'estimation de la moyenne est nécessaire pour des décisions scientifiques ou commerciales.

- **Applications :**

- Utilisé pour évaluer l'efficacité des traitements médicaux en comparant les moyennes des groupes traités et non traités.
- Évaluation de la performance des processus industriels en termes de temps moyen, qualité moyenne, etc.

Distribution t de Student : Intervalle de Confiance

Validité de la Distribution t :

- La distribution est valide sous l'hypothèse de normalité des données.
- Les résultats sont robustes même avec de légères déviations de la normalité, particulièrement pour les grands échantillons.

Alternatives :

- En présence de données non normales, envisager l'utilisation de méthodes robustes ou de transformations des données pour satisfaire à l'approximation normale.

Distribution t de Student : Intervalle de Confiance

• Méthodes Robustes et Alternatives :

- **Méthodes de Bootstrap** : Utilisation de resampling pour estimer la distribution de l'échantillon et construire des intervalles de confiance sans supposer la normalité.
- **Transformation des Données** : Application de transformations (log, racine carrée, Box-Cox) pour améliorer l'approximation normale des données.
- **Techniques Statistiques Robustes** : Utilisation de moyennes tronquées ou Winsorisées pour réduire l'impact des valeurs aberrantes.
- **Méthodes Nonparamétriques** : Construction d'intervalles de confiance basés sur l'ordre des données plutôt que sur leur distribution normale supposée.
- **Méthodes Bayésiennes** : Inférence basée sur la mise à jour des distributions a priori avec les données observées pour obtenir des intervalles de crédibilité.

Intervalle de Confiance avec t_k : Exemple Numérique

- **Contexte :**

- Une entreprise affirme que le temps moyen de livraison est de 30 minutes.
- Données observées : [28, 32, 35, 30, 29, 31, 36, 27, 34, 33].
- Taille de l'échantillon : $n = 10$.

- **Calcul de l'Intervalle de Confiance :**

- Moyenne de l'échantillon (\bar{X}) : 31.5 minutes
- Écart-type de l'échantillon (s) : 3.03 minutes
- Niveau de confiance souhaité : 95% (donc $\alpha = 0.05$)
- Degrés de liberté : $k = n - 1 = 9$
- Valeur critique ($t_{\frac{\alpha}{2}, 9}$) : ± 2.262
- $IC = \left[31.5 - 2.262 \times \frac{3.03}{\sqrt{10}}, 31.5 + 2.262 \times \frac{3.03}{\sqrt{10}} \right] = [29.335, 33.665]$

- **Interprétation :** L'intervalle de confiance à 95% pour le temps moyen de livraison est de [29.335, 33.665] minutes. Nous n'avons pas de preuve statistique suffisante pour rejeter l'affirmation de l'entreprise au niveau de confiance de 95%.

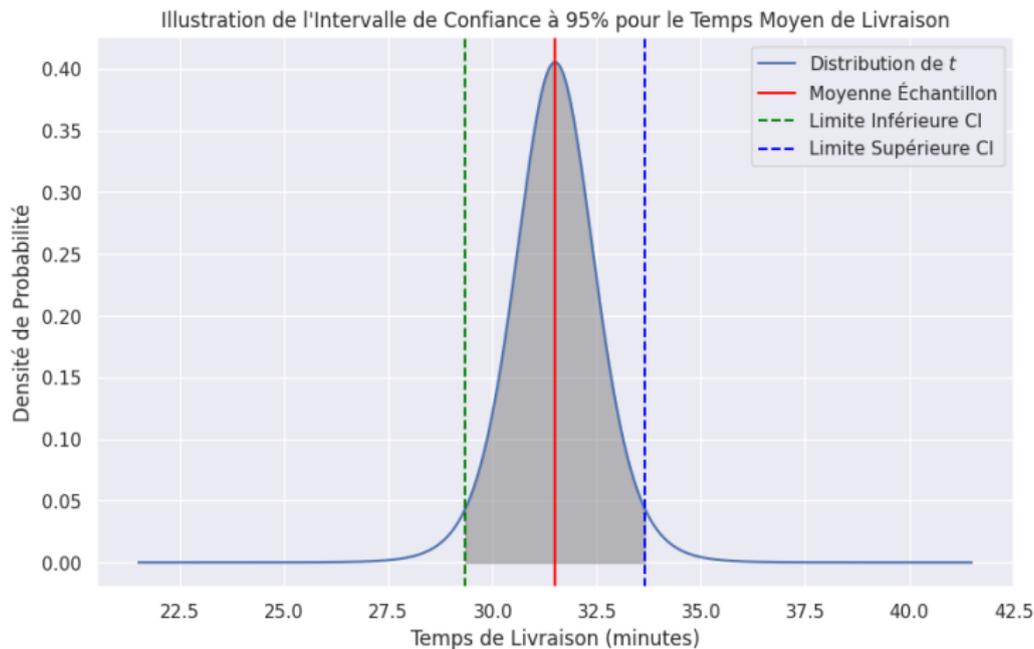
Intervalle de Confiance avec t_k : Code Python

```
import numpy as np
from scipy.stats import t
data = np.array([28, 32, 35, 30, 29, 31, 36, 27, 34, 33])# Données
n = len(data) # Taille de l'échantillon
sample_mean = np.mean(data) # Moyenne de l'échantillon
sample_std = np.std(data, ddof=1) # Écart-type de l'échantillon
alpha = 0.05 # Niveau de signification pour 95% de confiance
df = n - 1 # Degrés de liberté
t_critical = t.ppf(1 - alpha / 2, df) # Valeur critique de t pour 95%
margin_error = t_critical * (sample_std / np.sqrt(n))
confidence_interval = (sample_mean - margin_error, sample_mean + margin_error)
print(f"Moyenne de l'échantillon : {sample_mean:.2f}")
print(f"Écart-type de l'échantillon : {sample_std:.2f}")
print(f"Degrés de liberté : {df}")
print(f"Valeur critique de t : #{t_critical:.3f}")
print(f"Marge d'erreur : #{margin_error:.3f}")
print(f"Intervalle de confiance à 95% pour le temps moyen de livraison : "
      f"{confidence_interval[0]:.3f}, {confidence_interval[1]:.3f}")
```

Résultat :

Moyenne de l'échantillon : 31.50, Écart-type : 3.03, Degrés de liberté : 9
 Valeur critique de t : #2.262
 Marge d'erreur : #2.166
 Intervalle de confiance à 95% pour le temps moyen de livraison : [29.334, 33.666]

Intervalle de Confiance avec t_k : Visualisation



Distribution F de Fisher

Distribution F de Fisher : Définition

- **Définition :**

- Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes où l'on a :

$$\begin{cases} U \sim \chi_{d_1}^2 & \text{avec } d_1 \text{ degrés de liberté,} \\ V \sim \chi_{d_2}^2 & \text{avec } d_2 \text{ degrés de liberté.} \end{cases}$$

- La variable aléatoire continue F définie par

$$F = \frac{U/d_1}{V/d_2}$$

suit une loi de Fisher avec d_1 et d_2 degrés de liberté : $F \sim F_{d_1, d_2}$.

- **Propriétés et Applications Courantes:**

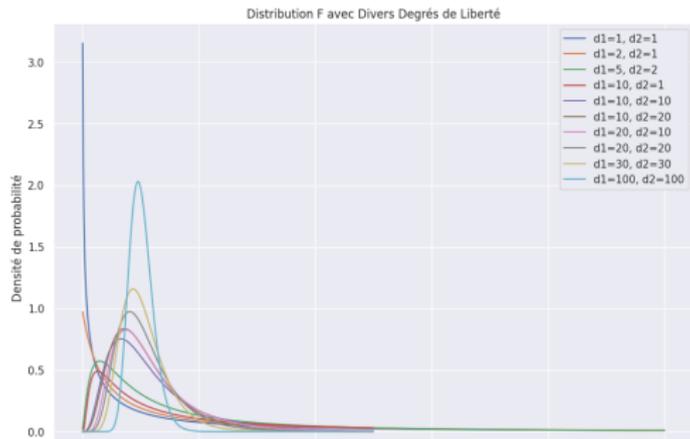
- Utilisée pour modéliser le ratio de deux variances échantillonnales avec des degrés de liberté, d_1 et d_2 , liés aux 2 échantillons comparés.
- Utilisée principalement pour comparer deux variances et dans l'analyse de la variance (ANOVA).
- Espérance : $\mathbb{E}[F] = \frac{d_2}{d_2 - 2}$ pour $d_2 > 2$.
- Variance : $\text{Var}[F] = \frac{2d_2^2(d_1 + d_2 - 2)}{d_1(d_2 - 2)^2(d_2 - 4)}$, pour $d_2 > 4$.

Distribution F de Fisher : Densité de Probabilité

- La densité de probabilité de $F \sim F_{d_1, d_2}$ est donnée par :

$$f_F(f; d_1, d_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d_2}{2}\right)} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{d_1}{2}} f^{\frac{d_1}{2}-1} \left(1 + \frac{d_1}{d_2}f\right)^{-\frac{d_1+d_2}{2}},$$

- f est la valeur que prend la variable aléatoire F .
- Asymétrique, avec un support de $[0, \infty)$.



Test F de Fisher pour la Comparaison des Variances

Test F de Fisher : Définition

- Le test F est utilisé pour comparer les variances de deux populations indépendantes.
- Hypothèses :**
 - H_0 : Les variances des deux populations sont égales ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$).
 - H_a : Les variances des deux populations sont différentes ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$).
- Statistique de test :**

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

où s_1^2 et s_2^2 sont les variances échantillonales des deux groupes.

- Degrés de liberté :** $d_1 = n_1 - 1$, $d_2 = n_2 - 1$ où n_1 et n_2 les tailles respectives des 2 échantillons.

Test F de Fisher : Étapes

- **Étape 1. Formulation des hypothèses :**

- $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
- $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- **Étape 2. Calcul de la statistique de test :**

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

- **Étape 3. Degrés de liberté :**

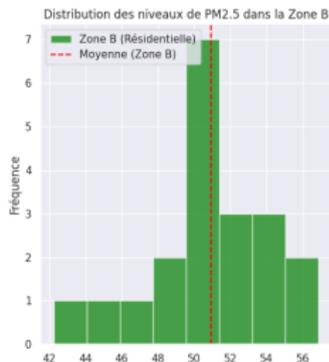
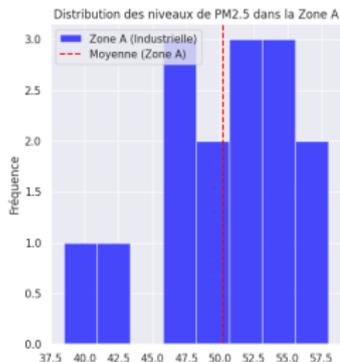
$$d_1 = n_1 - 1, \quad d_2 = n_2 - 1$$

- **Étape 4. Décision :**

- Utiliser la distribution F avec (d_1, d_2) degrés de liberté pour trouver la ou les valeurs critiques à un niveau de signification donné α , ou calculer la p -valeur.
- Rejeter H_0 si la valeur observée de F est plus extrême que la ou les valeurs critiques.

Test F de Fisher : Exemple Numérique

- **Contexte** : Comparaison de la variabilité des niveaux de PM2.5 (mesure de pollution atmosphérique) entre 2 zones industrielles.
- **Données de la Zone A** :
 - [54.07, 53.47, 47.59, 43.21, 50.19, 58.00, 56.13, 50.76, 55.18, 38.44, 47.02, 48.29, 51.16, 48.02, 51.68]
- **Données de la Zone B** :
 - [52.84, 53.14, 49.81, 45.31, 48.81, 51.14, 54.21, 52.76, 54.94, 46.73, 51.23, 42.27, 53.57, 49.80, 50.26, 50.10, 56.86, 48.35, 56.45, 50.29]



Test F de Fisher : Exemple Numérique

● Contexte :

- Comparaison de la variabilité des niveaux de PM2.5 (mesure de pollution atmosphérique) entre 2 zones industrielles.
- Zone A : $n_1 = 15$, $s_1^2 = 25.88 \mu\text{g}/\text{m}^3$.
- Zone B : $n_2 = 20$, $s_2^2 = 13.21 \mu\text{g}/\text{m}^3$.
- Niveau de signification : $\alpha = 0.05$.

● Hypothèses :

- $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (Les variances des deux zones sont égales).
- $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (Les variances des deux zones sont différentes).

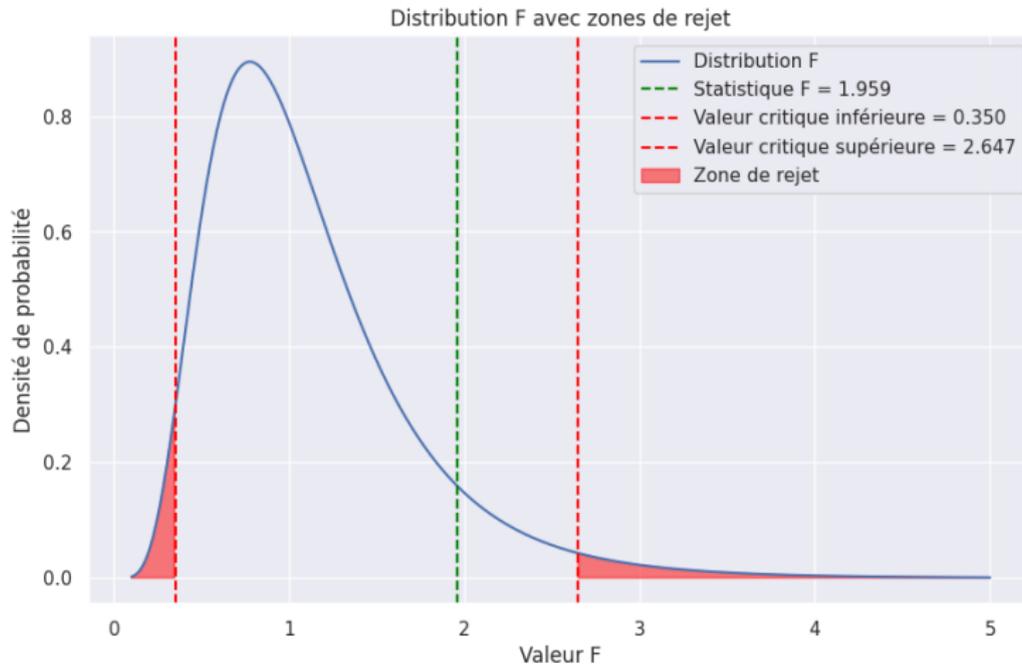
● Calcul de la statistique de test : $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{25.88}{13.21} = 1.959$

● Degrés de liberté : $d_1 = n_1 - 1 = 14$, $d_2 = n_2 - 1 = 19$

● Valeur critiques :

- $F_{\frac{\alpha}{2}, d_1, d_2} = F_{0.025, 14, 19} = 0.350$;
- $F_{1-\frac{\alpha}{2}, d_1, d_2} = F_{0.975, 14, 19} = 2.647$.

Test F de Fisher : Visualisation



Test F : Code Python

```
import numpy as np
from scipy.stats import f, norm
def fisher_test(sample_a, sample_b, alpha=0.05):
    # Calculer les variances empiriques
    s1_squared = np.var(sample_a, ddof=1)
    s2_squared = np.var(sample_b, ddof=1)
    F_stat = s1_squared / s2_squared
    d1 = n1 - 1
    d2 = n2 - 1
    # Calculer les valeurs critiques pour un test bilatéral et la p-valeur
    alpha = 0.05
    F_critical_low = f.ppf(alpha / 2, d1, d2)
    F_critical_high = f.ppf(1 - alpha / 2, d1, d2)
    p_value = 2 * min(f.cdf(F_stat, d1, d2), 1 - f.cdf(F_stat, d1, d2))
    print(f"Variance dans la Zone A (s1^2) : {s1_squared:.3f}")
    print(f"Variance dans la Zone B (s2^2) : {s2_squared:.3f}")
    print(f"Statistique F : {F_stat:.3f}")
    print(f"Valeurs critiques : F_inférieure = {F_critical_low:.3f}, F_supérieure = {F_critical_high:.3f}")
    print(f"p-valeur : {p_value:.4f}")
    if F_stat < F_critical_low or F_stat > F_critical_high:
        print("Décision : Rejeter H0 (différence significative entre les variances).")
    else:
        print("Décision : Ne pas rejeter H0 (pas de différence significative entre les variances).")
```

Calcul de l'Intervalle de Confiance pour le Ratio des Variances avec la Distribution F de Fisher

Distribution F de Fisher : Intervalle de Confiance

- **Base Statistique :**

- Lorsque deux échantillons indépendants proviennent de populations normalement distribuées, le ratio de leurs variances suit une distribution F .
- Le ratio des variances est utilisé pour tester l'égalité des variances entre les deux populations.

- **Formulation de l'Intervalle de Confiance :**

- Les valeurs critiques de F pour les bornes inférieure et supérieure sont déterminées par le niveau de confiance $1 - \alpha$.
- L'intervalle de confiance pour le ratio des variances $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ est :

$$\left[\frac{s_1^2}{s_2^2 \cdot F_{1-\alpha/2, d_1, d_2}}, \frac{s_1^2}{s_2^2 \cdot F_{\alpha/2, d_1, d_2}} \right]$$

- **Interprétation :** Cet intervalle indique avec une confiance de $(1 - \alpha) \times 100\%$ que le vrai ratio des variances $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ de la population est compris dans cet intervalle.

Distribution F de Fisher : Intervalle de Confiance

- **Importance :**

- Fournit une méthode pour évaluer si les variabilités entre deux groupes diffèrent de manière significative.
- Essentiel dans les domaines comme la recherche médicale et la qualité industrielle, où comprendre la variabilité est crucial.

- **Applications :**

- Comparaison de la variabilité des processus industriels pour assurer la qualité.
- Évaluation de la consistance des résultats expérimentaux dans les études cliniques et scientifiques.

Intervalle de Confiance avec F_{d_1, d_2} : Exemple Numérique

- **Contexte :**

- Comparaison des variances de deux traitements dans un contexte clinique.
- Échantillon A : $n_1 = 20$, $s_1^2 = 30$.
- Échantillon B : $n_2 = 25$, $s_2^2 = 40$.
- Niveau de confiance : 95% ($\alpha = 0.05$).

- **Calcul de l'intervalle de confiance :**

- Utilisation de la distribution F avec $d_1 = n_1 - 1 = 19$ et $d_2 = n_2 - 1 = 24$.
- Valeurs critiques pour F à $\alpha/2 = 0.025$ et $1 - \alpha/2 = 0.975$ sont respectivement $F_{0.025, 19, 24}$ et $F_{0.975, 19, 24}$.

- **Formule de l'intervalle de confiance :**

$$\left[\frac{30}{40 \times F_{0.975, 19, 24}}, \frac{30}{40 \times F_{0.025, 19, 24}} \right]$$

- **Interprétation :** Nous sommes 95% confiants que le ratio des variances réelles entre les deux traitements est compris dans cet intervalle.

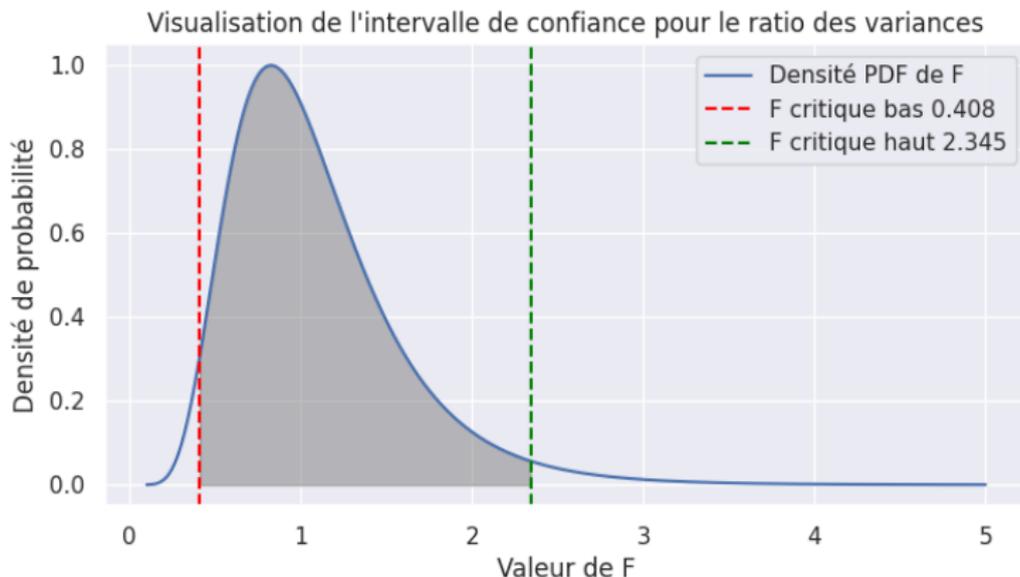
Intervalle de Confiance avec F_{d_1, d_2} : Code Python

```
import numpy as np
from scipy.stats import f
# Données de l'échantillon
n1, s1_squared = 20, 30
n2, s2_squared = 25, 40
alpha = 0.05
# Degrés de liberté
d1, d2 = n1 - 1, n2 - 1
# Valeurs critiques de F
F_critical_low = f.ppf(alpha / 2, d1, d2)
F_critical_high = f.ppf(1 - alpha / 2, d1, d2)
# Calcul de l'intervalle de confiance
lower_bound = s1_squared / (s2_squared * F_critical_high)
upper_bound = s1_squared / (s2_squared * F_critical_low)
print(f"Intervalle de confiance à 95% pour le ratio des variances : "
      f"[{lower_bound:.3f}, {upper_bound:.3f}]")
```

Résultat:

Intervalle de confiance à 95% pour le ratio des variances : [0.320, 1.839]

Intervalle de Confiance avec F_{d_1, d_2} : Visualisation



Espérance, Variance, Covariance et Gaussienne Multivariée

Espérance d'une Variable Aléatoire

Espérance d'une Variable Aléatoire : Définition

- **Définition** : L'espérance est une mesure de la tendance centrale. C'est la valeur moyenne à long terme des répétitions de la même expérience qu'elle représente.

- **Formule** :

- Pour une variable aléatoire discrète X ayant des valeurs possibles x_1, x_2, \dots et des probabilités $P(X = x_i)$, la valeur attendue $\mathbb{E}[X]$ est définie par :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

- Pour une variable aléatoire continue avec une fonction de densité de probabilité $f(x)$, l'espérance est :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Ésperance d'une Variable Aléatoire : Propriétés et Calcul

• Propriétés de l'Espérance

- **Linéarité** : L'opérateur d'espérance est linéaire, ce qui signifie que pour deux variables aléatoires X et Y , et des constantes a, b ,

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

- **Indépendance** : Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

• Exemples de Calcul

- **Cas Discret** : Calculez la valeur attendue pour un jeu simple où vous lancez un dé à six faces équitable et recevez en dollars le nombre affiché sur le dé.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5$$

- **Cas Continu** : Déterminez la valeur attendue pour une variable aléatoire X uniformément distribuée entre 0 et 1.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \cdot 1 \, dx = \frac{1}{2}$$

Variance d'une Variable Aléatoire

Variance d'une Variable Aléatoire : Définition

- **Définition** : La variance est une mesure de la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire autour de son espérance. Elle quantifie la variabilité ou la volatilité des valeurs.
- **Formule** :
 - Pour une variable aléatoire discrète X ayant des valeurs possibles x_1, x_2, \dots et des probabilités $P(X = x_i)$, la variance $\text{Var}(X)$ est définie par :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E} [(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_i (x_i - \mathbb{E}[X])^2 P(X = x_i)$$

- Pour une variable aléatoire continue avec une fonction de densité de probabilité $f(x)$, la variance est :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E} [(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x) dx$$

Variance d'une Variable Aléatoire : Propriétés et Calcul

• Propriétés de la Variance :

- La variance est toujours non-négative, $\text{Var}(X) \geq 0$.
- $\text{Var}(X) = 0$ si et seulement si X prend une valeur constante.
- Pour toute constante a et b , $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$
- $\text{Var}(X) = \mathbb{E} [(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (E[X])^2$.

• Exemples de Calcul

- **Cas Discret** : Calculez la variance pour le jeu de dé où X représente le montant reçu en dollars.

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - 3.5^2 \approx 2.917$$

- **Cas Continu** : Déterminez la variance pour une variable aléatoire X uniformément distribuée entre 0 et 1.

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \, dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

Covariance entre Deux Variables Aléatoires

Covariance entre Deux Variables Aléatoires : Définition

- **Définition** : La covariance est une mesure du degré de variation conjointe de deux variables aléatoires par rapport à leurs moyennes. Elle indique la direction de la relation linéaire entre les variables.
- **Formule** :
 - Formule générale: $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$.
 - Pour deux variables aléatoires discrètes X et Y avec des valeurs possibles (x_i, y_i) et des probabilités conjointes $P(X = x_i, Y = y_j)$, la covariance $\text{Cov}(X, Y)$ est définie par :

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - \mathbb{E}[X])(y_j - \mathbb{E}[Y])P(X = x_i, Y = y_j)$$

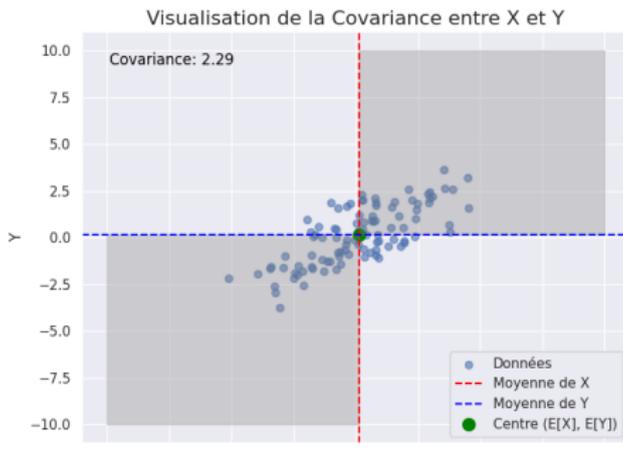
- Pour deux variables aléatoires continues avec une fonction de densité de probabilité conjointe $f(x, y)$, la covariance est :

$$\text{Cov}(X, Y) = \int \int (x - \mathbb{E}[X])(y - \mathbb{E}[Y])f(x, y) dx dy$$

Covariance : Interprétation Géométrique

• Propriétés de la Covariances :

- $\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$
- Si $\text{Cov}(X, Y) > 0$, alors X et Y ont tendance à augmenter ensemble.
- Si $\text{Cov}(X, Y) < 0$, alors une augmentation de X est généralement associée à une diminution de Y .
- Si $\text{Cov}(X, Y) = 0$, X et Y sont dits non corrélés (ce qui ne signifie pas nécessairement qu'ils sont indépendants).



Matrice de Covariance

Matrice de Covariance : Définition et Propriétés

- **Définition** : La matrice de covariance est une matrice qui mesure la covariance entre chaque paire de variables dans un ensemble de données. Elle est utilisée pour comprendre la relation linéaire entre les variables.
- **Formule** : Pour un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, la matrice de covariance Σ est donnée par :

$$\Sigma = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T],$$

où \mathbb{E} représente l'espérance mathématique.

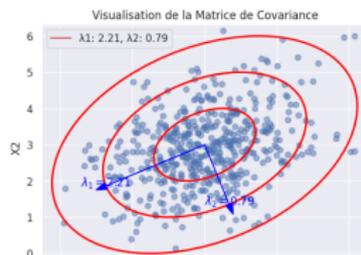
- La covariance Σ pour un vecteur aléatoire $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\times}$ est définie par :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

où chaque élément $\sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$.

Matrice de Covariance : Interprétation Géométrique

- **Propriétés :**
 - *Symétrie* : La matrice de covariance est toujours symétrique.
 - *Semi-définie positive* : Pour tout vecteur non nul \mathbf{v} , on a $\mathbf{v}^T \Sigma \mathbf{v} \geq 0$.
- **Ellipses de Confiance** : L'ellipse de confiance générée par une matrice de covariance dans un plan bivarié illustre la dispersion des données, orientée selon les vecteurs propres de la matrice.
- **Vecteurs Propres et Valeurs Propres** : Les vecteurs propres de la matrice de covariance indiquent les directions principales de la dispersion des données, et les valeurs propres associées indiquent la variance dans ces directions. **Exemple** : $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$



Distribution Gaussienne Multivariée

Distribution Gaussienne Multivariée : Définition

- **Définition** : Une distribution gaussienne multivariée est une généralisation de la distribution gaussienne à plusieurs dimensions.

- **Formule** :

- Un vecteur aléatoire $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ suit une distribution gaussienne multivariée, notée $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, où $\boldsymbol{\mu}$ est le vecteur des moyennes et $\boldsymbol{\Sigma}$ est la matrice de covariance.
- La densité de probabilité est donnée par :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

- **Vecteur Moyen $\boldsymbol{\mu}$** : Représente la moyenne de chaque variable dans

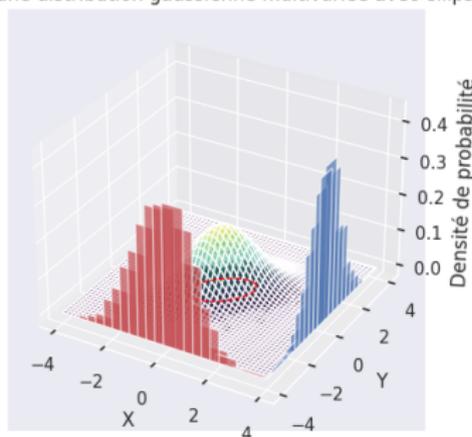
le vecteur aléatoire \mathbf{X} . On a $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$

- La matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T]$ contient les covariances entre chaque paire de variables dans \mathbf{X} .

Distribution Gaussienne Multivariée : Propriétés

- **Marginalisation** : Les distributions marginales d'un vecteur gaussien multivarié restent gaussiennes.
 - Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \mathbf{X}_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_{11})$.
- **Transformation linéaire** : Si $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, alors pour toute matrice \mathbf{A} , $\mathbf{AX} \sim \mathcal{N}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T)$.

Visualisation 3D d'une distribution gaussienne multivariée avec ellipse de confiance



Distribution Gaussienne Multivariée : Applications

- **Analyse de Régression** : La distribution des erreurs et des prédictions dans la régression linéaire multivariée peut être modélisée à l'aide de distributions gaussiennes multivariées.
- **Analyse de Variance** : Les tests statistiques dans l'ANOVA multivariée peuvent être formulés via la distribution gaussienne multivariée pour évaluer l'impact des facteurs sur les vecteurs de réponse multivariés.
- **Exploration de Données** : L'analyse en composantes principales (PCA), une méthode réductrice de dimensionnalité, utilise la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance, une propriété clé de la distribution gaussienne multivariée.

Loi des Grands Nombres et Théorème Central Limite

Loi des Grands Nombres

Loi des Grands Nombres

- **Objectif** : Comprendre comment la Loi des Grands Nombres permet d'approcher les paramètres réels d'une distribution à partir de grands échantillons.
- **Définition et Importance** : La Loi des Grands Nombres (LGN) est un théorème fondamental en théorie des probabilités qui décrit le résultat de répéter la même expérience de nombreuses fois.
- Conformément à la LGN, la moyenne des résultats obtenus \bar{X}_n à partir d'un grand nombre d'essais n se rapproche de la moyenne théorique ($\mathbb{E}[X]$) à mesure que le nombre d'essais augmente.

Loi des Grands Nombres

• Loi Faible des Grands Nombres (LFGN) :

- Si X_1, X_2, \dots, X_n sont i.i.d avec $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ et $Var(X_i) = \sigma^2$,
- alors \bar{X}_n converge en probabilité vers μ quand $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0,$$

$$\text{càd, } \bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

• Loi Forte des Grands Nombres (LFGN) :

- Si X_1, X_2, \dots, X_n sont i.i.d avec $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ et $Var(X_i) = \sigma^2$,
- alors \bar{X}_n converge presque sûrement vers μ quand $n \rightarrow \infty$.

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1,$$

$$\text{càd, } \bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \mu \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Loi des Grands Nombres

- **Loi Faible des Grands Nombres (LFGN) :**

- **Idee principale :** Elle décrit la *convergence en probabilité*, ce qui signifie qu'à mesure que la taille de l'échantillon n devient très grande, la probabilité que la moyenne échantillonnale \bar{X}_n soit proche de la moyenne réelle μ devient arbitrairement grande.
- **Intuition :** La moyenne échantillonnale finit par se rapprocher de la moyenne réelle avec une forte probabilité, mais cela ne garantit pas que cela se produise pour chaque séquence d'observations.
- **Formulation mathématique :**

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

- **Exemple :** Si nous lançons une pièce et calculons la proportion de 'face', la probabilité que cette proportion s'écarte significativement de 0.5 devient très faible lorsque le nombre de lancers augmente.

Loi des Grands Nombres

• Loi Forte des Grands Nombres (LFGN) :

- **Idée principale** : Elle décrit la *convergence presque sûre*, ce qui signifie qu'à mesure que n devient très grand, la moyenne échantillonnale \bar{X}_n finit par atteindre et rester proche de μ avec probabilité 1.
- **Intuition** : C'est une garantie plus forte que la loi faible. Elle assure que pour presque toutes les réalisations des variables aléatoires, \bar{X}_n converge vers μ .
- **Formulation mathématique** :

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1.$$

- **Exemple** : Si nous lançons une pièce et calculons la proportion de 'face', cette proportion atteindra finalement 0.5 et y restera avec probabilité 1.

Loi des Grands Nombres

- **Différence clé avec la Loi Faible :**

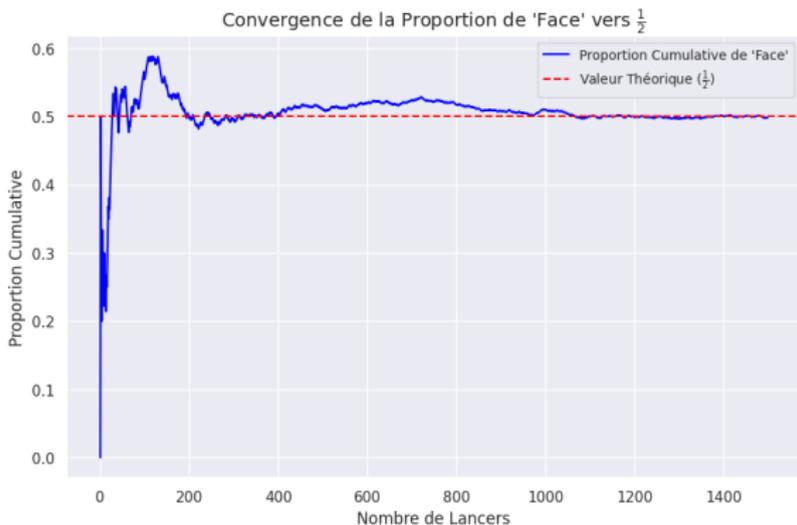
- La Loi Faible des Grands Nombres concerne une forte probabilité : \bar{X}_n sera proche de μ pour une grande taille d'échantillon, mais pas nécessairement pour toutes les séquences d'observations.
- La Loi Forte des Grands Nombres concerne une convergence presque sûre : elle garantit que \bar{X}_n converge vers μ pour (presque) toutes les séquences possibles des variables aléatoires.

- **Analogie :**

- La Loi Faible des Grands Nombres dit que pour un grand nombre de lancers de pièce, la proportion de 'face' sera proche de 0.5 *la plupart du temps*.
- La Loi Forte des Grands Nombres dit que si l'on continue de lancer la pièce indéfiniment, la proportion de 'face' atteindra 0.5 et y restera presque certainement.

Loi des Grands Nombres : Exemple Numérique

- **Exemple Simple:** Lancer d'une pièce équilibrée.
 - Si une pièce est lancée de nombreuses fois, la proportion de fois où l'on obtient 'face' converge vers $\frac{1}{2}$.



Loi des Grands Nombres : Code Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Fixer la graine pour la reproductibilité
np.random.seed(42)

# Paramètres
n_trials = 1500 # Nombre de lancers
coin_flips = np.random.choice([0, 1], size=n_trials) # 0 = pile, 1 = face

# Calculer la proportion cumulative de 'face'
cumulative_heads = np.cumsum(coin_flips) / (np.arange(1, n_trials + 1))

# Visualisation
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(cumulative_heads, label="Proportion Cumulative de 'Face'", color='blue')
plt.axhline(y=0.5, color='red', linestyle='--', label="Valeur Théorique ( $\frac{1}{2}$ )")
plt.title("Convergence de la Proportion de 'Face' vers  $\frac{1}{2}$ ", fontsize=14)
plt.xlabel("Nombre de Lancers", fontsize=12)
plt.ylabel("Proportion Cumulative", fontsize=12)
plt.legend(fontsize=10)
plt.grid(True)
plt.show()
```

Loi des Grands Nombres : Applications

- **Application en Statistiques** : Estimation de moyennes de populations, taux de défauts dans les processus de fabrication, ou tout autre paramètre en économie, biologie, etc.
- **Application dans la Régression Linéaire** : La *Loi des Grands Nombres* garantit qu'à mesure que la taille de l'échantillon augmente, les moyennes des échantillons utilisées dans le processus d'estimation convergent vers leurs équivalents populationnels, rendant ainsi les estimateurs du modèle de régression linéaire consistants et proches des véritables valeurs des paramètres.
- **Conclusion** : La Loi des Grands Nombres est cruciale pour la compréhension de la stabilité des moyennes et pour la justification de l'usage de statistiques échantillonnales comme estimations des paramètres de populations.

Théorème Central Limite (TCL)

Théorème Central Limite (TCL)

- **Objectif** : Comprendre comment la somme ou la moyenne d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) se rapproche d'une distribution normale, quelles que soient les distributions individuelles.
- **Définition et Importance** : Le Théorème Central Limite (TCL) est un résultat fondamental en théorie des probabilités qui explique pourquoi la distribution normale apparaît fréquemment dans les applications pratiques.
- **Formulation Générale** :
 - Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d avec $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ et $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.
 - La somme centrée et réduite :

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

converge en distribution vers une variable normale standard :

$$Z_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty$$

Théorème Central Limite (TCL)

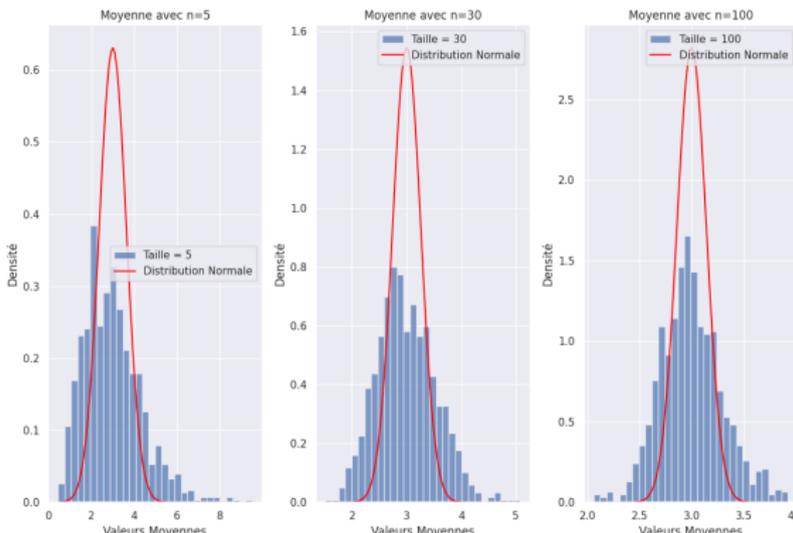
- **Idée Principale** : Peu importe la distribution initiale des X_i , la moyenne ou la somme des X_i suit une distribution normale lorsque n est suffisamment grand.
- **Formule pour la Moyenne** :

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- **Exemple Simple** : Si nous lançons un dé n fois et calculons la moyenne des résultats obtenus, la distribution de cette moyenne deviendra progressivement normale à mesure que n augmente, même si les résultats individuels du dé suivent une distribution uniforme.

Théorème Central Limite : Visualisation

- **Simulations** : Montrons l'effet du TCL à l'aide de simulations où nous générons des moyennes de tailles d'échantillons croissantes.
- **Visualisation** : Observez comment la distribution des moyennes se rapproche d'une distribution normale avec l'augmentation de la taille des échantillons.



Théorème Central Limite : Code Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm
# Fixer la graine pour la reproductibilité
np.random.seed(8302)
n_samples = 1000 # Nombre d'échantillons
sample_sizes = [5, 30, 100] # Différentes tailles d'échantillons
true_mean, true_variance = 3, 2 # Moyenne et variance de la distribution d'origine
# Génération des échantillons
original_data = np.random.exponential(scale=true_mean, size=(max(sample_sizes), n_samples))
# Visualisation
plt.figure(figsize=(12, 8))
for i, size in enumerate(sample_sizes):
    sample_means = np.mean(original_data[:size, :], axis=0) # Moyenne des échantillons
    plt.subplot(1, len(sample_sizes), i + 1)
    plt.hist(sample_means, bins=30, density=True, alpha=0.7, label=f'Taille = {size}')
    x = np.linspace(min(sample_means), max(sample_means), 100)
    plt.plot(x, norm.pdf(x, loc=true_mean, scale=np.sqrt(true_variance / size)),
             label="Distribution Normale", color='red')
    plt.title(f"Moyenne avec n={size}")
    plt.xlabel("Valeurs Moyennes")
    plt.ylabel("Densité")
    plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Théorème Central Limite : Applications

- **Statistiques Inférentielles** : Le TCL justifie l'utilisation de la distribution normale pour construire des intervalles de confiance et effectuer des tests d'hypothèses, même lorsque la population n'est pas normale.
- **Raisonnement Pratique** : Il explique pourquoi les moyennes et les sommes sont si couramment utilisées comme estimations dans de nombreuses disciplines, allant de la finance à la biologie.
- **Liens avec la Régression Linéaire** : Le TCL garantit que les résidus dans les modèles de régression se rapprochent d'une distribution normale à mesure que la taille de l'échantillon augmente, facilitant ainsi les tests et interprétations statistiques.

Table des Matières

- 1 Notation
- 2 Algèbre Linéaire
- 3 Optimization
- 4 Probabilité
- 5 Statistiques

Estimations Ponctuelles et par Intevalles

Estimations : Introduction

- **Définition** : L'estimation est le processus d'utilisation d'échantillons pour inférer les caractéristiques d'une population. Elle est cruciale pour la prise de décisions basées sur des données.
- **Objectifs** :
 - Estimer les paramètres de la population, tels que la moyenne ou la variance, à partir d'échantillons.
 - Fournir une mesure de l'incertitude associée à ces estimations.
- **Types d'Estimateurs** :
 - **Estimateurs Ponctuels** : Fournissent une seule valeur comme estimation d'un paramètre.
 - **Estimateurs par Intervalles** : Offrent une plage de valeurs susceptibles de contenir le paramètre.

Estimations : Estimateur Ponctuel

- **Objectif** : L'estimateur ponctuel vise à estimer les paramètres de la population, tels que la moyenne (μ), la variance (σ^2), la proportion de succès (p), ou les coefficients de régression.
- **Valeur Unique** : Il fournit une seule valeur numérique comme estimation, contrairement aux estimateurs par intervalles qui donnent une plage de valeurs plausibles.
- **Estimateurs Ponctuels Courants** :
 - **Moyenne** (\bar{X}) : La moyenne de l'échantillon est un estimateur ponctuel de la moyenne de la population (μ).
 - **Variance** (s^2) : La variance de l'échantillon est un estimateur ponctuel de la variance de la population (σ^2).
 - **Proportion** (\hat{p}) : La proportion de succès dans un échantillon est un estimateur ponctuel de la proportion dans la population.

Estimations : Estimateur Ponctuel

- **Exemples :**

- La moyenne de l'échantillon (\bar{X}) pour estimer la moyenne μ d'une la population.
- Les estimations par maximum de vraisemblance (EMV), par exemple, $\hat{\theta}_{MLE}$ pour divers paramètres.

- **Définition :**

- Pour un paramètre θ , un estimateur ponctuel $\hat{\theta}$ est défini comme :

$$\hat{\theta} = f(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

où f est une fonction des données de l'échantillon.

- **Propriétés des Estimateurs - Suffisance :** Un estimateur est suffisant si aucune autre statistique calculée à partir du même échantillon ne fournit d'information supplémentaire sur le paramètre à estimer.

- **Exemple :** Pour $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{i.i.d } N(\mu, \sigma^2)$, alors \bar{X} est un estimateur suffisant pour μ .

Estimations : Propriétés des Estimateurs Ponctuels

- **Biais** : Le biais d'un estimateur est la différence entre l'espérance de l'estimateur et le vrai paramètre qu'il est censé estimer.
 - $\text{Biais}(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$
 - Un estimateur est **non biaisé** si son biais est nul:
 $\text{Biais}(\hat{\theta}) = 0 \Rightarrow E[\hat{\theta}] = \theta$, pour toutes les tailles d'échantillon.
- **Variance** : La variance d'un estimateur mesure la variabilité de l'estimation d'un échantillon à l'autre.
 - $\text{Var}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}])^2]$
 - Un estimateur avec une faible variance a tendance à donner des résultats plus précis.
- **Consistance** : Un estimateur est consistant si, à mesure que la taille de l'échantillon augmente, l'estimation converge vers le vrai paramètre.
 - Un estimateur $\hat{\theta}_n$ est consistant si $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \epsilon) = 1 \quad \forall \epsilon > 0$.

Estimations : Propriétés des Estimateurs avec Exemples

● Biais :

- Définition: $\text{Biais}(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$
- Un estimateur est **non biaisé** si $\text{Biais}(\hat{\theta}) = 0$.
- **Exemple:** Estimation de la variance avec $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ est biaisé. La correction $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ est non biaisée.

● Variance :

- Définition: $\text{Var}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}])^2]$
- Un estimateur avec une faible variance donne des résultats plus précis.
- **Exemple:** Pour $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ d'une distribution $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

● Consistance :

- Définition: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- **Exemple:** La moyenne échantillonnale \bar{X} pour une distribution normale montre que $\bar{X} \xrightarrow{p} \mu$ par la loi des grands nombres.

Estimations : Propriétés des Estimateurs

- **Efficacité** : Parmi les estimateurs non biaisés, un estimateur est efficace s'il a la plus petite variance.
 - **Exemple** : Considérons l'estimation de μ pour $N(\mu, \sigma^2)$. Comparons la variance de la moyenne échantillonnale \bar{X} et une moyenne échantillonnale pondérée $c\bar{X}$, où c est une constante.
 - **Variance de \bar{X}** :

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- **Variance de $c\bar{X}$** :

$$\text{Var}(c\bar{X}) = c^2 \text{Var}(\bar{X}) = c^2 \frac{\sigma^2}{n}$$

- Puisque \bar{X} est non biaisé, $c = 1$ donne la plus petite variance, indiquant que \bar{X} est plus efficace que toute autre version pondérée de lui-même, supposant que $c \neq 1$.

Méthodes d'Estimation : Maximum de Vraisemblance

- **Définition** : Le maximum de vraisemblance (MLE) est une méthode d'estimation qui cherche les valeurs des paramètres du modèle qui maximisent la probabilité d'observer les données données.
- **Fonction de Vraisemblance** : Pour un échantillon $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L(\theta; \mathbf{X}) = f(X_1; \theta) f(X_2; \theta) \cdots f(X_n; \theta),$$

où $f(X_i; \theta)$ est la densité de probabilité.

- **Log-vraisemblance** : Pour simplifier les calculs, on maximise souvent le logarithme de la vraisemblance :

$$\ell(\theta; \mathbf{X}) = \log L(\theta; \mathbf{X}).$$

- **Objectif** : Trouver le paramètre $\hat{\theta}$ qui maximise $\ell(\theta; \mathbf{X})$:

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max_{\theta} \ell(\theta; \mathbf{X}).$$

Maximum de Vraisemblance : Exemple

- **Problème** : Supposons que $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- **Fonction de vraisemblance** :

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

- **Objectif** : Maximiser $L(\mu, \sigma^2)$ pour trouver les estimations $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$.

Maximum de Vraisemblance : Exemple

- **Log-vraisemblance** : Pour simplifier les calculs, on prend le logarithme de $L(\mu, \sigma^2)$:

$$\ell(\mu, \sigma^2) = \log L(\mu, \sigma^2).$$

- En développant :

$$\ell(\mu, \sigma^2) = n \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

- En simplifiant davantage :

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

Maximum de Vraisemblance : Exemple

- **Dérivée de la log-vraisemblance par rapport à μ :**

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu).$$

- **Maximisation :** Résolvons $\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = 0$:

$$\sum_{i=1}^n X_i - n\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu} = \bar{X}.$$

- **Résultat intermédiaire :** La moyenne échantillonnale \bar{X} est l'estimateur du maximum de vraisemblance pour μ .

Maximum de Vraisemblance : Exemple

- **Dérivée de la log-vraisemblance par rapport à σ^2 :**

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

- **Maximisation :** Résolvons $\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = 0$:

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 0.$$

En réarrangeant :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

- **Résultat intermédiaire :** La variance échantillonnale non biaisée est l'estimateur du maximum de vraisemblance pour σ^2 .

Maximum de Vraisemblance : Exemple

- **Estimation des paramètres :**

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

- Ces estimations maximisent la vraisemblance des observations données, en supposant que $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Méthodes d'Estimation : Méthode des Moments

- **Définition** : La méthode des moments est une technique d'estimation qui consiste à utiliser les moments de l'échantillon pour estimer les paramètres de la population.
- **Idée principale** :
 - Les moments de l'échantillon (M_k) sont utilisés pour approcher les moments théoriques (μ_k).
 - Les moments théoriques sont exprimés en termes des paramètres inconnus ($\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$).
- **Objectif** : Résoudre un système d'équations pour obtenir des estimations des paramètres :

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, p.$$

où M_k est le k -ième moment de l'échantillon.

Méthode des Moments : Étapes Générales

- **Étape 1** : Identifier les moments théoriques de la distribution en termes des paramètres inconnus $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$.
- **Étape 2** : Calculer les moments de l'échantillon (M_k) à partir des données :

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k.$$

- **Étape 3** : Résoudre le système d'équations $M_k = \mu_k$ pour obtenir les estimations des paramètres.

Méthode des Moments : Exemple

- **Problème** : Supposons que X_1, X_2, \dots, X_n suivent une distribution exponentielle avec paramètre $\lambda > 0$.
- **Moment théorique** : La moyenne (1er moment théorique) d'une distribution exponentielle est donnée par :

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda}.$$

- **Moment de l'échantillon** : La moyenne empirique est :

$$M_1 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- **Estimation** : En égalant le moment théorique et le moment de l'échantillon, on obtient :

$$M_1 = \mu_1 \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

Méthode des Moments : Exemple

- **Problème** : Supposons que X_1, X_2, \dots, X_n suivent une distribution binomiale $\text{Bin}(n, p)$, où n est connu, mais p est un paramètre inconnu à estimer.
- **Moment théorique** : L'espérance d'une variable binomiale est donnée par :

$$\mu_1 = n \cdot p.$$

- **Moment de l'échantillon** : La moyenne empirique est :

$$M_1 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- **Estimation** : En égalant le moment théorique et le moment de l'échantillon, on obtient : $M_1 = \mu_1 \Rightarrow \bar{X} = n \cdot p \Rightarrow \hat{p} = \frac{\bar{X}}{n}$.
- **Conclusion** : La méthode des moments fournit une estimation pour p en utilisant la moyenne empirique : $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{n}$.

Méthode des Moments : Comparaison avec MLE

- **Avantages :**

- Simple à calculer.

- **Inconvénients :**

- Peut être moins précis que le maximum de vraisemblance (MLE).
- Sensible aux petits échantillons et aux distributions asymétriques.

- **Comparaison :**

- MLE maximise la vraisemblance et peut être plus précis pour les grands échantillons.
- La méthode des moments est plus simple mais peut manquer d'efficacité.

Estimation par Intervalle : Introduction

- **Définition** : L'estimation par intervalle fournit une plage de valeurs susceptibles de contenir le paramètre inconnu d'une population, avec un certain niveau de confiance.
- **Objectif** : Offrir une mesure de l'incertitude autour de l'estimation ponctuelle.
- **Composants** :
 - **Intervalle de Confiance (IC)** : Une plage de valeurs calculée à partir des données de l'échantillon.
 - **Niveau de Confiance ($1 - \alpha$)** : La probabilité que l'intervalle contienne le vrai paramètre.

Estimation par Intervalle : Exemple Général

- **Formule Générale** : Pour un paramètre θ , un intervalle de confiance est souvent donné par :

$$\text{IC} = [\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \cdot \text{SE}(\hat{\theta}), \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \cdot \text{SE}(\hat{\theta})],$$

où :

- $\hat{\theta}$: Estimateur ponctuel du paramètre.
- $z_{\alpha/2}$: Valeur critique de la loi normale pour le niveau de confiance choisi.
- $\text{SE}(\hat{\theta})$: Erreur standard de l'estimateur.
- **Interprétation** : Si nous répétons l'échantillonnage plusieurs fois, environ $1 - \alpha$ des intervalles contiendront le vrai paramètre.

Estimation par Intervalle : Exemple pour la Moyenne

- **Problème** : Estimer un intervalle de confiance pour la moyenne d'une population normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec σ connu.
- **Formule** :

$$\text{IC} = \left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right],$$

où :

- \bar{X} : Moyenne échantillonnale.
- $z_{\alpha/2}$: Quantile de la loi normale standard.
- **Exemple Numérique** : Si $\bar{X} = 10$, $\sigma = 2$, $n = 25$, et $1 - \alpha = 95\%$, alors :

$$z_{\alpha/2} = 1.96, \quad \text{IC} = [10 - 1.96 \cdot 0.4, 10 + 1.96 \cdot 0.4],$$

$$\text{IC} = [9.216, 10.784].$$

Estimation par Intervalle : Exemple pour la variance

- Si $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors un intervalle de confiance $(1 - \alpha)$ pour σ^2 est donné par :

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2} \right],$$

où :

- $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ est la variance échantillonnale.
- $\chi_{1-\alpha/2}^2$ et $\chi_{\alpha/2}^2$ sont les quantiles de la loi du khi-carré avec $n - 1$ degrés de liberté.
- $1 - \alpha$ représente le niveau de confiance.

Estimation par Intervalle : Exemple pour la Variance

- **Exemple Numérique :**

- Taille de l'échantillon : $n = 20$.
- Variance échantillonnale : $s^2 = 4$.
- Niveau de confiance : $1 - \alpha = 95\%$.
- Quantiles de la loi χ^2 ($n - 1 = 19$) :

$$\chi_{0.975}^2 = 32.85, \quad \chi_{0.025}^2 = 8.91.$$

- **Calcul :**

$$IC = \left[\frac{(20 - 1) \cdot 4}{32.85}, \frac{(20 - 1) \cdot 4}{8.91} \right].$$

$$IC = [2.31, 8.54].$$

- **Interprétation :** Avec un niveau de confiance de 95%, la vraie variance se trouve dans l'intervalle $[2.31, 8.54]$.

Estimation par Intervalle : Exemple pour une Proportion

- **Problème** : Estimer un intervalle de confiance pour une proportion p dans une population.
- **Formule** :

$$IC = \left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right],$$

où :

- \hat{p} : Proportion observée dans l'échantillon.
- n : Taille de l'échantillon.
- **Exemple Numérique** : Si $\hat{p} = 0.6$, $n = 100$, et $1 - \alpha = 95\%$, alors :

$$z_{\alpha/2} = 1.96, \quad IC = [0.6 - 1.96 \cdot 0.049, 0.6 + 1.96 \cdot 0.049],$$

$$IC = [0.502, 0.698].$$

Estimation par Intervalle : Applications et Remarques

- **Applications :**

- Comparaison entre groupes (par exemple, différence de moyennes).
- Mesure de la précision des estimations.
- Analyse de la robustesse des modèles statistiques.

- **Remarques :**

- La largeur de l'intervalle de confiance dépend de la taille de l'échantillon (n) et du niveau de confiance ($1 - \alpha$).
- Un intervalle de confiance plus étroit indique une estimation plus précise.

Merci!

E-mail: chiheb.trabelsi@polymtl.ca

Annexe

Annexe 1 : Dérivation du Pas Optimale η^* pour la Fonction Quadratique

Annexe 1 : Dérivation du Pas Optimale η^*

- **Considérons une fonction quadratique générale :**

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \text{où :}$$

- \mathbf{H} est la matrice Hessienne (**symétrique** et **définie positive**),
- \mathbf{x}_0 est le **minimum global**.
- **Gradient :**

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Mise à Jour avec la Descente de Gradient

- **Formule d'itération :**

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t - \eta \nabla f(\mathbf{x}_t),$$

où η est la **taille de pas**.

- **Objectif :** Trouver η^* qui minimise $f(\mathbf{x}_{t+1})$.
- **Substitution dans $f(\mathbf{x})$:**

$$f(\mathbf{x}_{t+1}) = \frac{1}{2} [(\mathbf{d} - \eta \nabla f(\mathbf{x}_t))^T \mathbf{H}(\mathbf{d} - \eta \nabla f(\mathbf{x}_t))],$$

où $\mathbf{d} = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_0$.

Développement de $f(\mathbf{x}_{t+1})$

- En développant l'expression :

$$f(\mathbf{x}_{t+1}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} - \eta (\nabla f(\mathbf{x}_t))^T \mathbf{H} \mathbf{d} + \frac{\eta^2}{2} (\nabla f(\mathbf{x}_t))^T \mathbf{H} \nabla f(\mathbf{x}_t).$$

- Minimisation par dérivation :**

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_{t+1})}{\partial \eta} = -(\nabla f(\mathbf{x}_t))^T \mathbf{H} \mathbf{d} + \eta (\nabla f(\mathbf{x}_t))^T \mathbf{H} \nabla f(\mathbf{x}_t).$$

- En imposant $\frac{\partial f(\mathbf{x}_{t+1})}{\partial \eta} = 0$, on obtient :

$$\eta^* = \frac{(\nabla f(\mathbf{x}_t))^T \mathbf{H} \mathbf{d}}{(\nabla f(\mathbf{x}_t))^T \mathbf{H} \nabla f(\mathbf{x}_t)}.$$

Expression Finale de η^*

- En substituant $\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}_t)$, on obtient :

$$\eta^* = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_t)\|^2}{\nabla f(\mathbf{x}_t)^T \mathbf{H} \nabla f(\mathbf{x}_t)}.$$

- **Interprétation :**

- Le **numérateur** $\|\nabla f(\mathbf{x}_t)\|^2$ reflète l'intensité du gradient (pente locale).
- Le **dénominateur** $\nabla f(\mathbf{x}_t)^T \mathbf{H} \nabla f(\mathbf{x}_t)$ tient compte de la courbure locale dans la direction du gradient.

Avantages de la Taille de Pas Optimale

- **Pourquoi utiliser η^* ?**
 - Évite les oscillations dans les directions de **forte courbure**.
 - Accélère la convergence dans les directions de **faible courbure**.
 - Garantie de convergence rapide pour les fonctions quadratiques.
- Cette taille de pas est idéale pour des fonctions quadratiques où la matrice Hessienne \mathbf{H} est définie positive.