POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

NeuroPoly

Représentation des images dans le domaine fréquentiel

Eva Alonso Ortiz

ELE8812

23 janvier 2025

Plan

1. Cadre 1D
   - Révision
   - Séries de Fourier : interprétation géométrique
   - Extension : approche géométrique de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Transformée de Fourier à temps discret et transformée de Fourier discrète

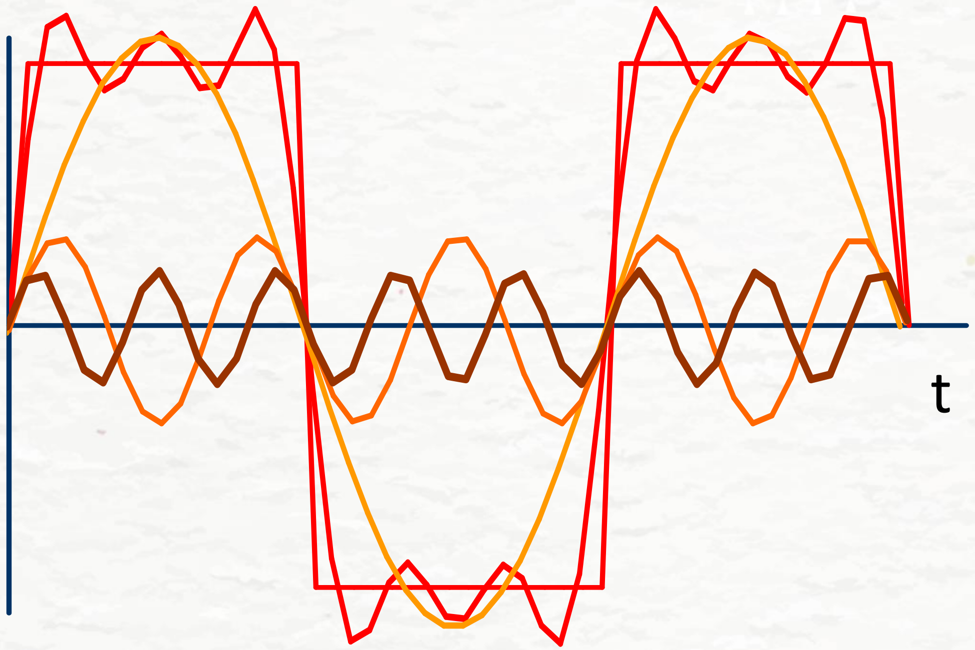
2. Cadre 2D
   - Extension 2D de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Aspects practiques

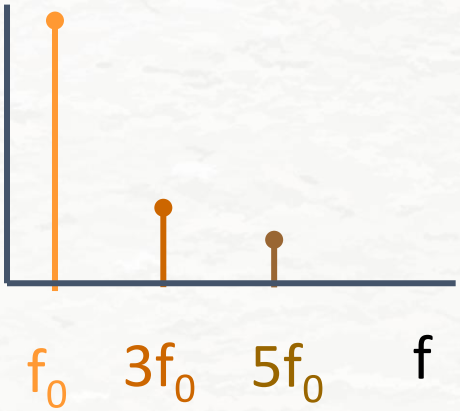
Plan

1. **Cadre 1D**
   - Révision
   - Séries de Fourier : interprétation géométrique
   - Extension : approche géométrique de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Transformée de Fourier à temps discret et transformée de Fourier discrète

2. **Cadre 2D**
   - Extension 2D de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Aspects practiques

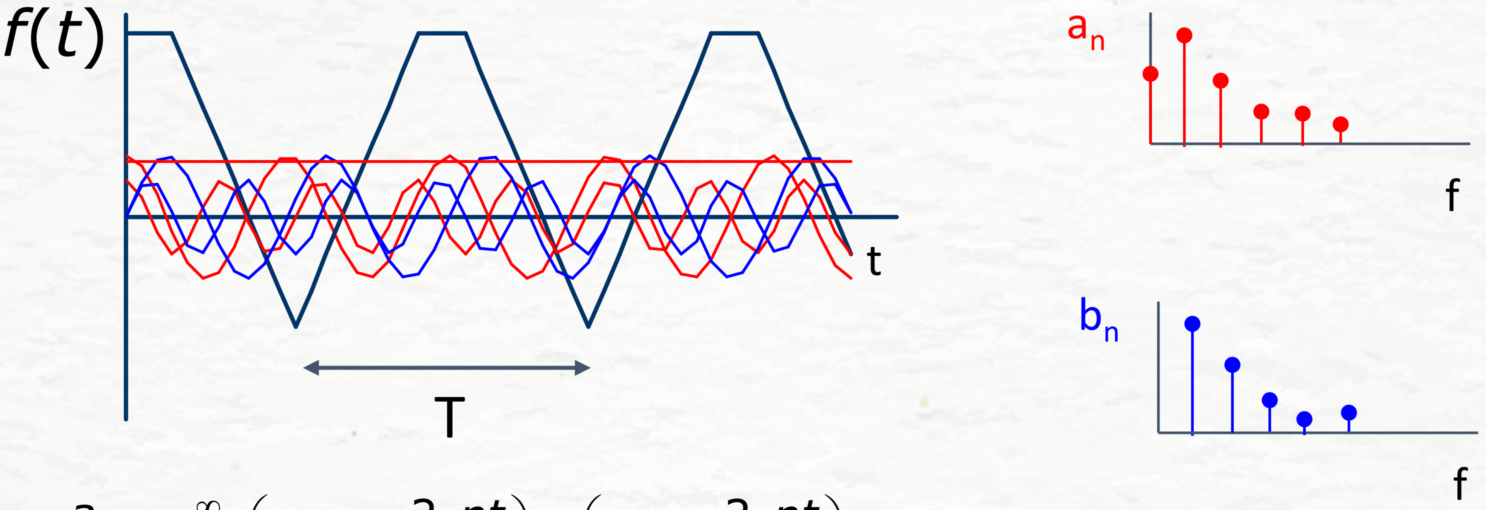
Rappel : Signaux périodiques – décomposition du signal





f_0 : fréquence fondamentale
nf_0: harmoniques

Rappel : Signaux périodiques – série de Fourier



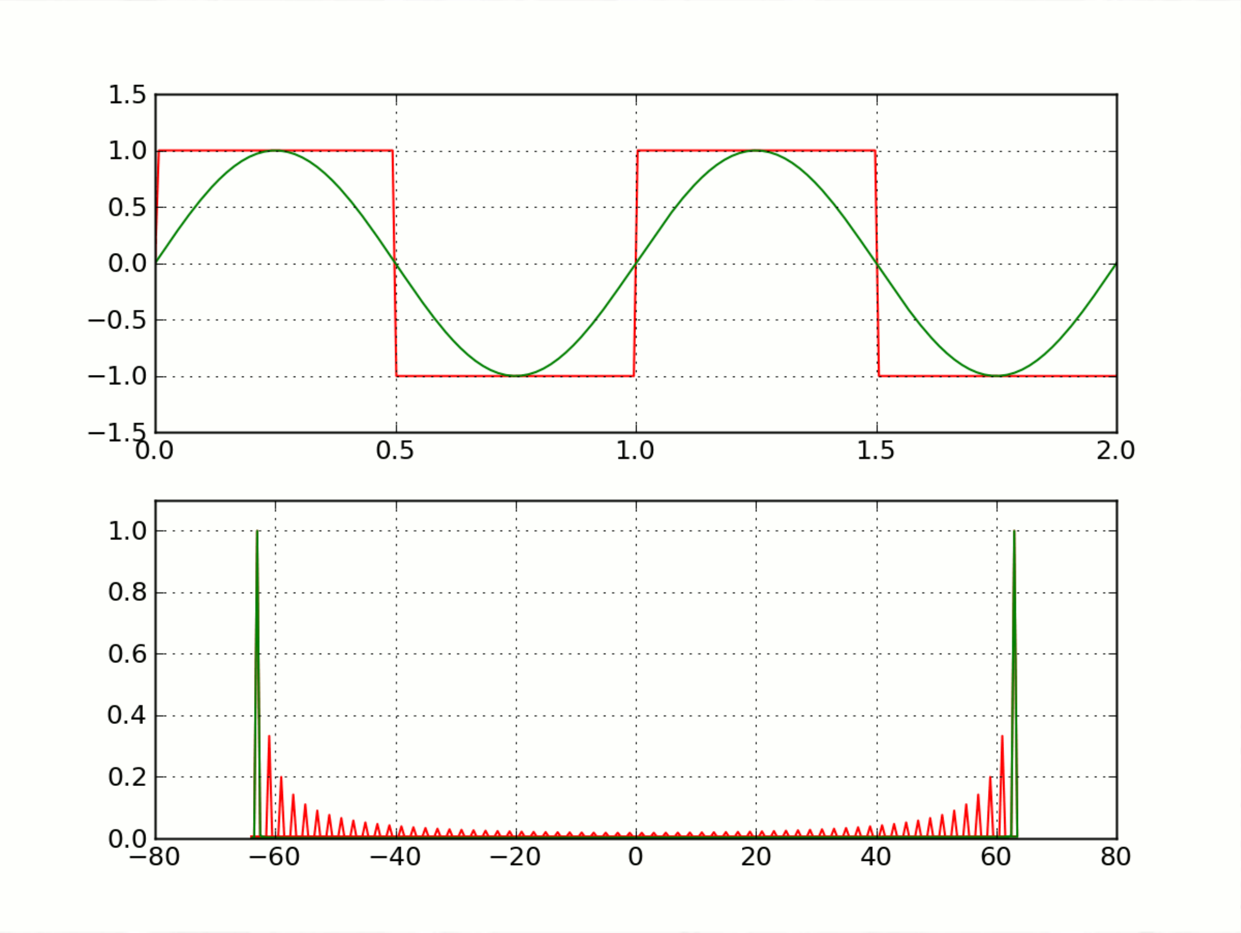
$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} \right) + \left(b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

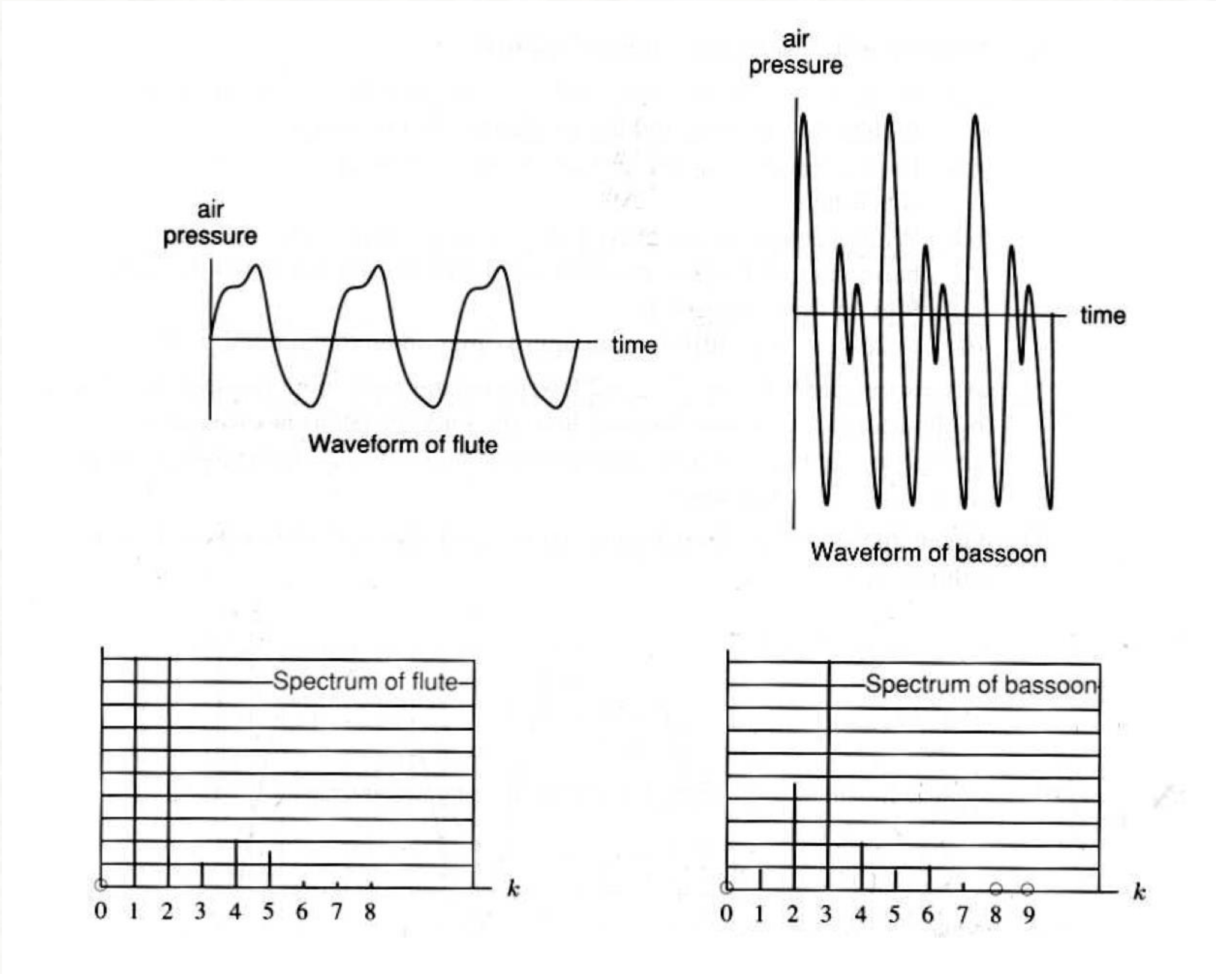
Formalisme utilisé dans le cours:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_k e^{2i\pi kt/T} \quad F_k = \frac{1}{T} \int_I f(t) e^{-2i\pi kt/T} dt$$

Rappel : Onde carré – série de Fourier

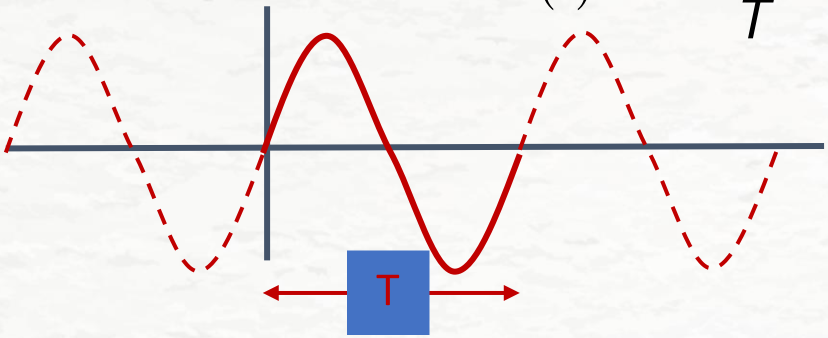


Rappel : Ondes de son – séries de Fourier

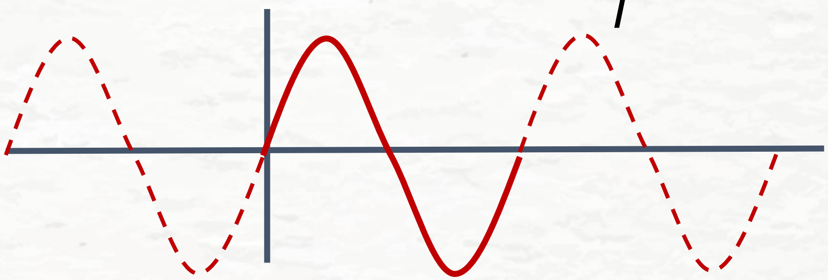


Rappel : Principe du calcul des coefficients

Fonction à reproduire: $f(t) = \sin \frac{2\pi t}{T}$

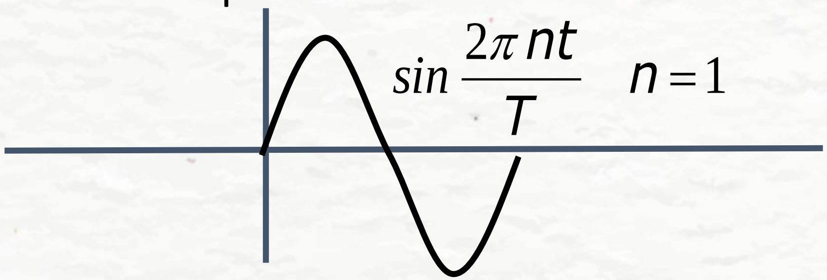


$f(t) = \sin \frac{2\pi t}{T}$

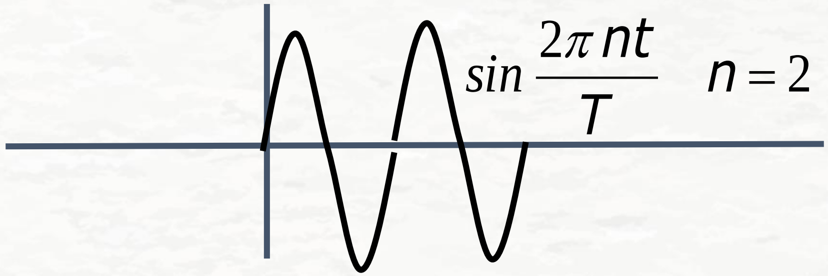


Harmonique:

$\sin \frac{2\pi n t}{T} \quad n = 1$

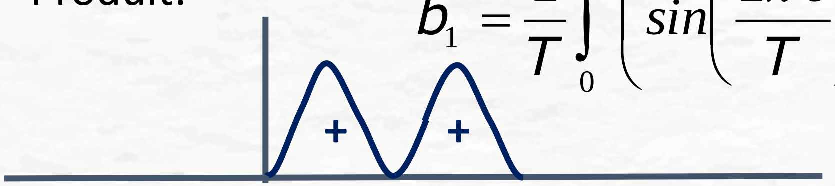


$\sin \frac{2\pi n t}{T} \quad n = 2$

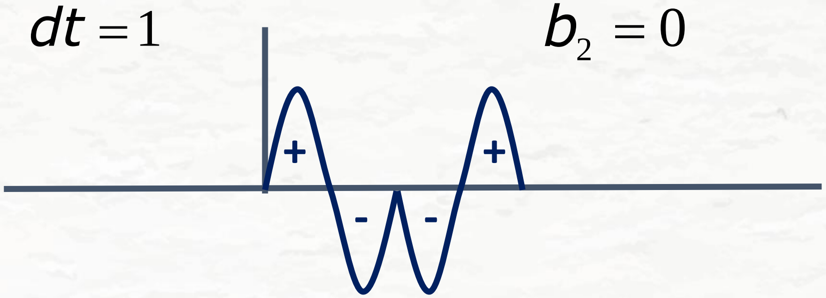


Produit:

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T \left(\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)^2 dt = 1$$



$$b_2 = 0$$



Rappel : développement en série de Fourier

Resumé

- f : fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle I de longueur T
- Développement de f en série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_k e^{2i\pi kt/T}$$

- Calcul des F_k , coefficients de la série de Fourier :

$$F_k = \frac{1}{T} \int_I f(t) e^{-2i\pi kt/T} dt$$

- F_k : *composante fréquentielle* de f à la fréquence $\nu = k/T$

Plan

1. Cadre 1D
   - Révision
   - Séries de Fourier : interprétation géométrique
   - Extension : approche géométrique de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Transformée de Fourier à temps discret et transformée de Fourier discrète

2. Cadre 2D
   - Extension 2D de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Aspects practiques

Développement en série de Fourier (1)

Cadre géométrique

Ex: fonction périodique sur une période

Cadre

- ε : ensemble des fonctions définies sur I de carré sommable
- Produit « scalaire » sur ε :

$$< f|g > = \frac{1}{T} \int_I f(t) g^*(t) dt$$

- Décomposition sur une base orthonormale $\{u_k(t)\,;k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_k u_k(t) \\ F_k &= < f|u_k > \end{aligned}$$

Développement en série de Fourier (2)

Interprétations

Décomposition de *f* sur une « base fréquentielle »

- Base fréquentielle orthonormée : $\{u_k = e^{2i\pi kt/T};\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k u_k(t)\ ;\quad F_k = < f|u_k >$

composante fréquentielle de f à la fréquence $v = k/T$, généralement complexe

Fonction périodique avec fréquence $v = k/T$

$$\boxed{f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k e^{2i\pi kt/T} \quad F_k = \frac{1}{T}\int_I f(t) e^{-2i\pi kt/T} dt}$$

Plan

1. ## Cadre 1D

- Revision
- Séries de Fourier : interprétation géométrique
- Extension : approche géométrique de la transformée de Fourier
- Échantillonnage
- Transformée de Fourier à temps discret et transformée de Fourier discrète

2. ## Cadre 2D

- Extension 2D de la transformée de Fourier
- Échantillonnage
- Aspects pratiques

Transformée de Fourier

Ex: fonctions non-periodiques

Cadre géométrique

- ε : ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de carré sommable
- Produit « scalaire » sur ε :

$$< f|g >= \int_{\mathbb{R}} f(t)g^*(t)dt$$

« Base fréquentielle »

- $\{e^{2i\pi\nu t};\ \nu \in \mathbb{R}\}$: base fréquentielle orthonormale
- Décomposition :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(\nu)e^{2i\pi\nu t}d\nu$$

transformée de Fourier inverse

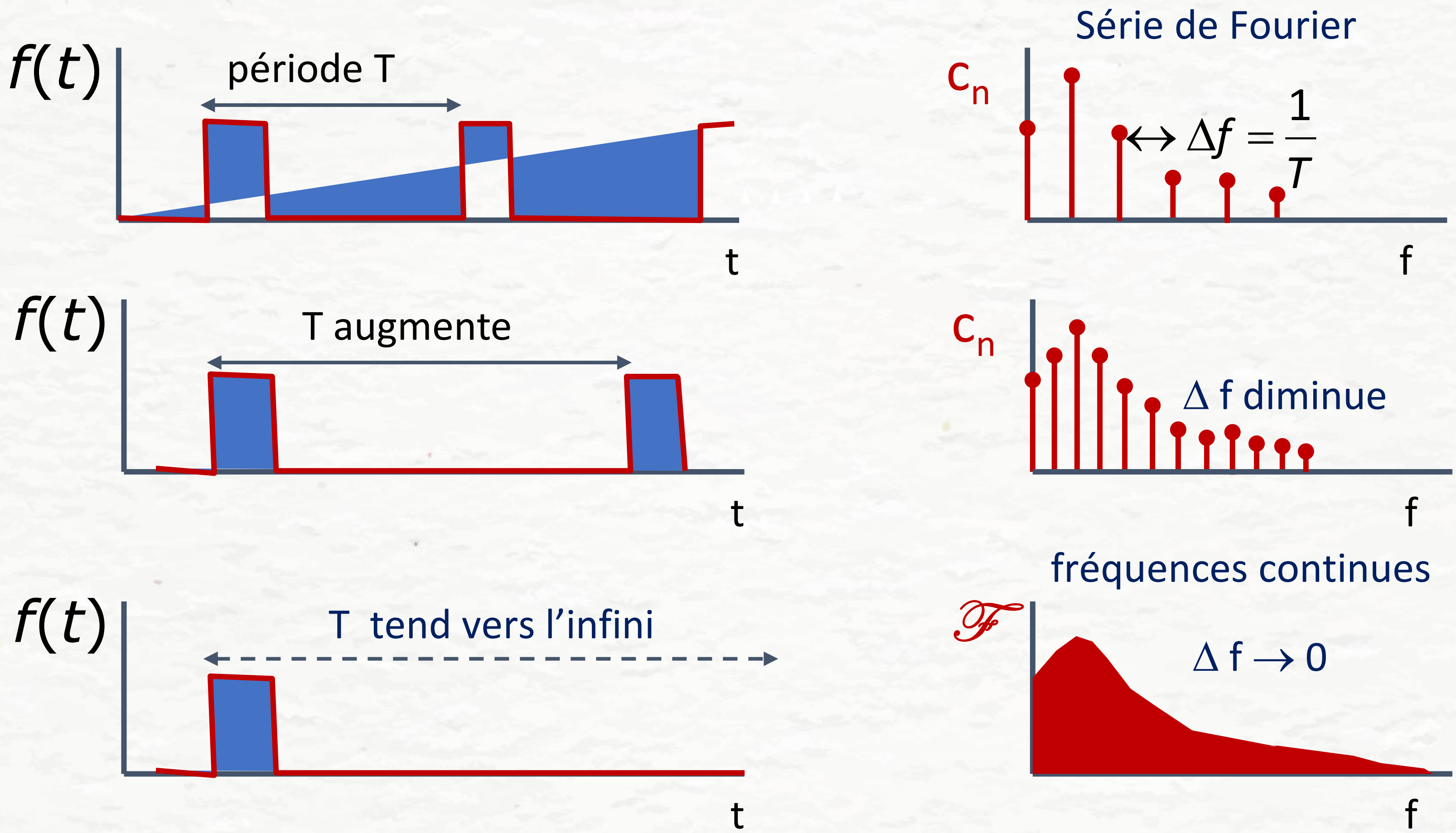
- Calcul des « coefficients » :

$$F(\nu) =< f|e^{2i\pi\nu t} >= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt$$

transformée de Fourier

fonction continue

Lien entre série de Fourier de *f* périodique et TF de *f* non-périodique



La transformée de Fourier correspond à une série de Fourier ayant une période tendant vers l'infini et s'applique ainsi à des signaux non-périodiques. Plutôt que d'avoir des composantes à des fréquences discrètes, le nombre de composantes tend vers l'infini et la transformée a un spectre de fréquences continues.

Transformée de Fourier de fonctions périodiques (1)

Position du problème

- Si *f* est périodique: $F(\nu) = < f | e^{2i\pi\nu t} > = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$ ne converge pas.
- Pas de transformée de Fourier pour les fonctions périodiques ?

Solutions

- Approche rigoureuse : changement de cadre mathématique
- Approche pratique : impulsion de Dirac $\delta(t)$

Impulsion de Dirac

- $\delta(t)$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$
- $\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$
- $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$
- $\int_{\mathbb{R}} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$

Transformée de Fourier de fonctions périodiques (2)

Impulsion de Dirac et transformée de Fourier

- TF : $\delta(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-2i\pi\nu t_0} \quad \Rightarrow \quad \delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1_\nu$
- TF : $e^{2i\pi\nu_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \delta(\nu-\nu_0) \quad \Rightarrow \quad 1_t \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \delta(\nu)$

Rappel:

TF

$$F(\nu) =< f|e^{2i\pi\nu t} >= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt$$

Fonctions périodiques

- f $T-$périodique $\Leftrightarrow$ f décomposable en série de Fourier

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k e^{2i\pi kt/T} \qquad F_k = \frac{1}{T}\int_I f(t)e^{-2i\pi kt/T}dt$$

- Propriété de linéarité

$$F(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k\delta(\nu - k/T)$$

Transformée de Fourier de fonctions à temps continu

f de carré sommable (non-périodique)

- TF : $F(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$
- TFI : $f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$

f périodique de période *T*

- TF : $F(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k \delta(\nu - k/T)$ $\qquad F_k = \frac{1}{T}\int_I f(t) e^{-2i\pi kt/T} dt$

- TFI : $f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k e^{2i\pi kt/T}$

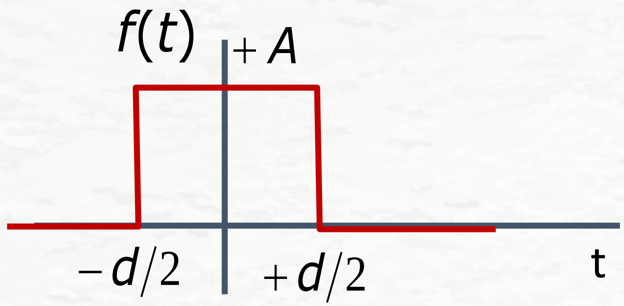
$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

Transformée de Fourier de fonctions usuelles

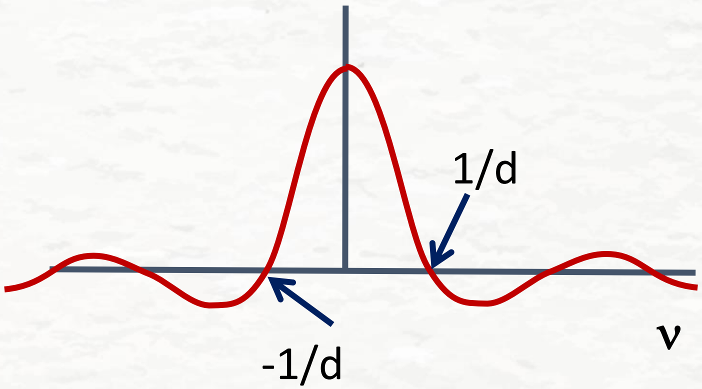
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi \nu^2}$
$e^{-a\|t\|}$	$2a/(a^2 + 4\pi^2\nu^2)$
$e^{\pm 2i\pi\nu_0 t}$	$\delta(\nu \mp \nu_0)$
$\cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_0)$	$\left(e^{i\varphi_0}\delta(\nu - \nu_0) + e^{-i\varphi_0}\delta(\nu + \nu_0)\right)/2$
$\mathrm{sgn}\ t$	$1/(i\pi\nu)$
1	$\delta(\nu)$
$(-2i\pi t)^m$	$\delta^{(m)}(\nu)$
$1/t$	$-i\,\pi\,\mathrm{sgn}\nu$
$\|t\|$	$-1/2\pi^2\nu^2$
$\mathrm{Rect}(-T/2, T/2)$	$T\,(\sin \pi T\nu)/\pi T\nu$
$\max\{0, 1 - \|t\|/T\}$	$T\,((\sin \pi T\nu)/\pi T\nu)^2$
$\nu_o(\sin \pi\nu_0 t)/\pi\nu_0 t$	$\mathrm{Rect}(-\nu_0/2, \nu_0/2)$
$\delta(t)$	1
$\delta^{(m)}(t)$	$(2i\pi\nu)^m$
$\delta(t \pm T)$	$e^{\pm 2i\pi T\nu}$
$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT)$	$(1/T)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\nu - n/T)$
$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(t - nT)$	$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-2i\pi nT\nu}$

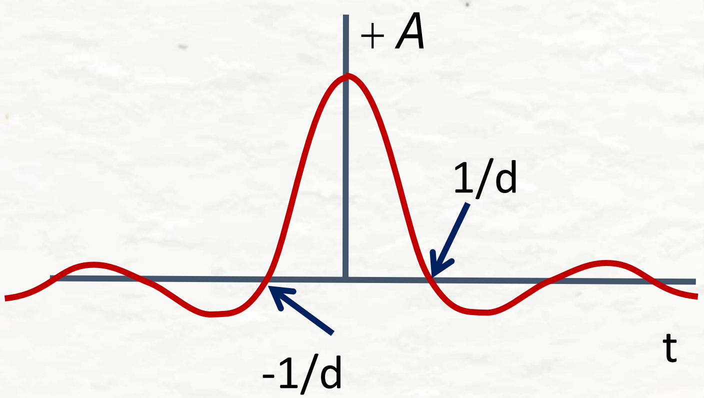
TF de fonctions usuelles : sinus cardinal

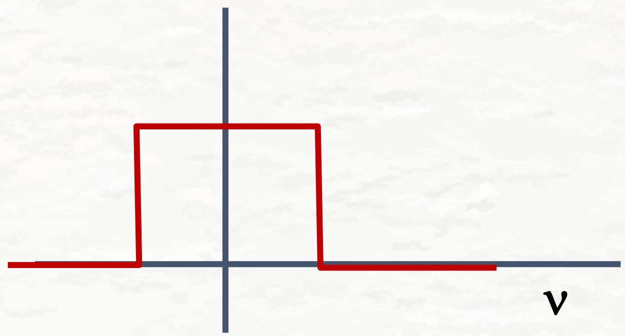
domaine du temps



domaine de la fréquence



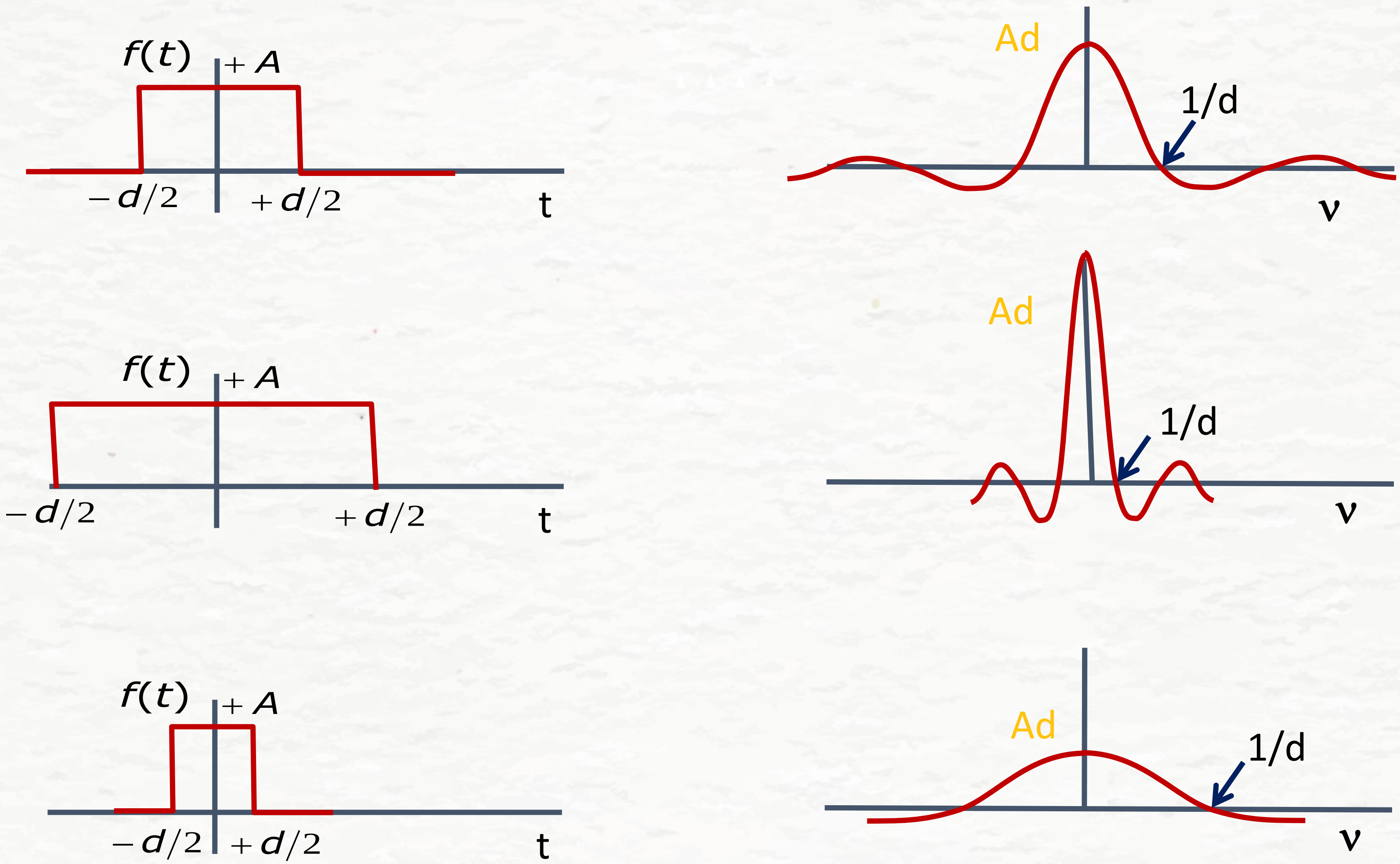




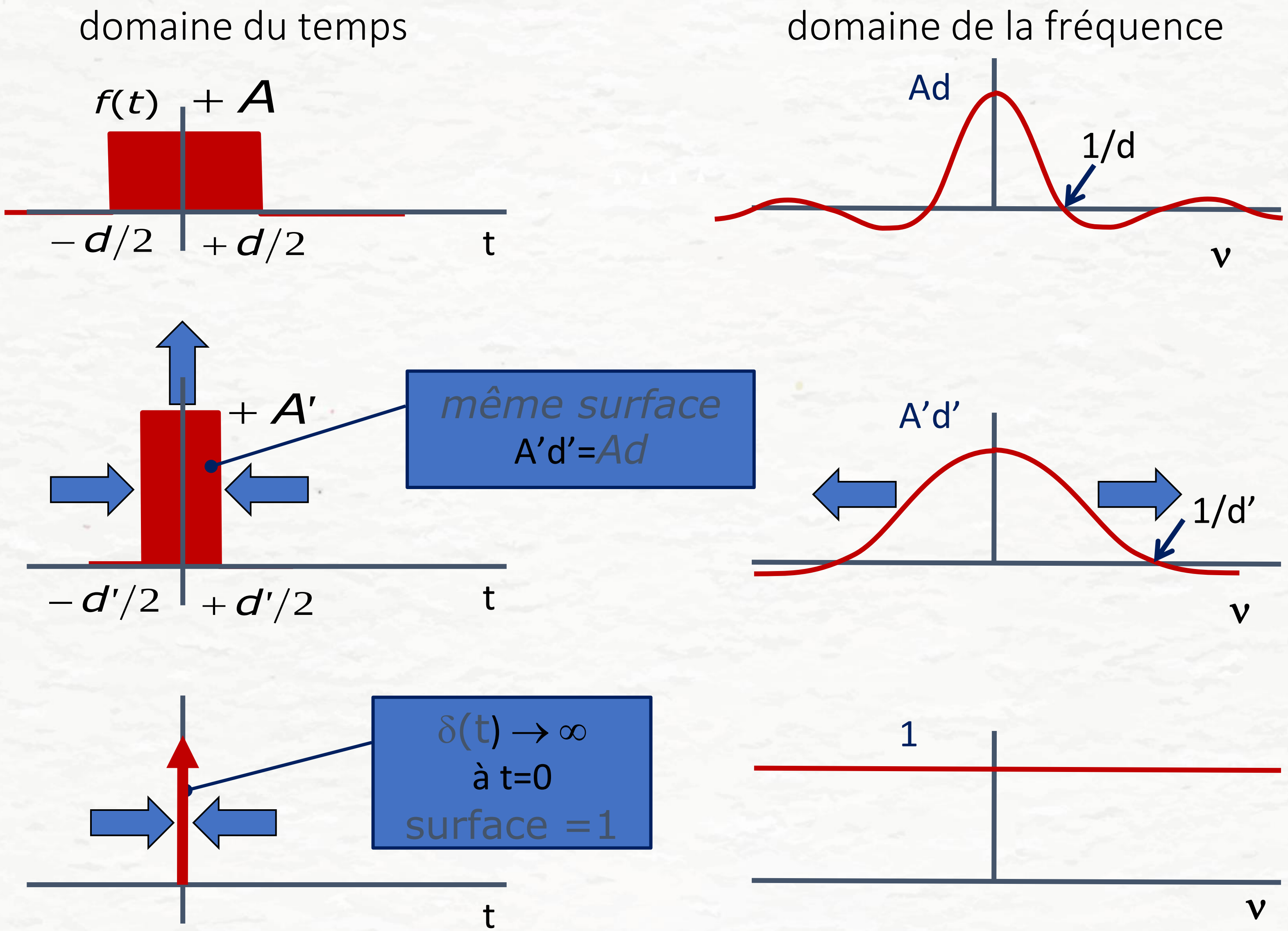
TF de fonctions usuelles : sinus cardinal

domaine du temps

domaine de la fréquence

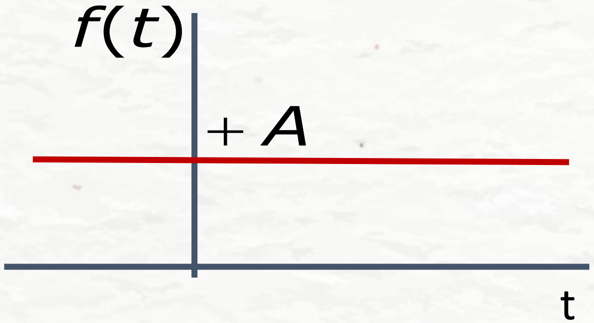


TF de fonctions usuelles : Impulsion de Dirac

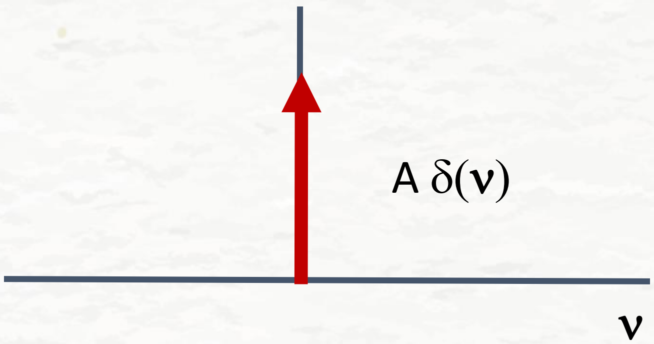


TF de fonctions usuelles : une constante

domaine du temps



domaine de la fréquence

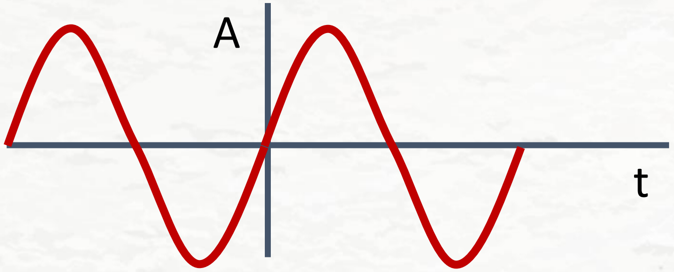


TF de fonctions usuelles : sinus et cosinus

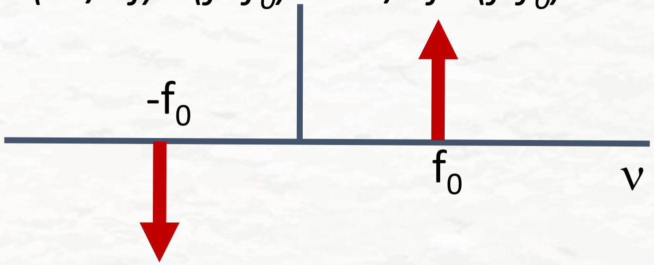
domaine du temps

domaine de la fréquence

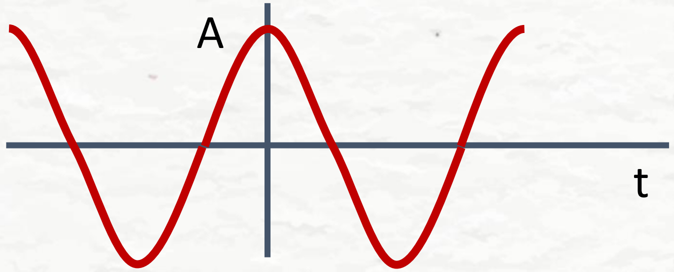
A sin(2πf₀t)



(-A/2j) δ(f+f₀) *+A/2j δ(f-f₀)*



A cos(2πf₀t)



A/2 δ(f+f₀) *A/2 δ(f-f₀)*

Rappel:

$$\text{TF}: F(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k \delta(\nu - k/T) \qquad F_k = \frac{1}{T}\int_I f(t) e^{-2i\pi kt/T} dt$$

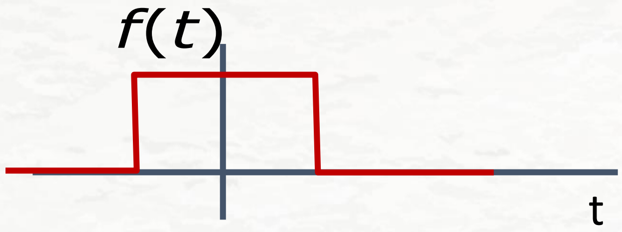
Propriétés de la transformée de Fourier

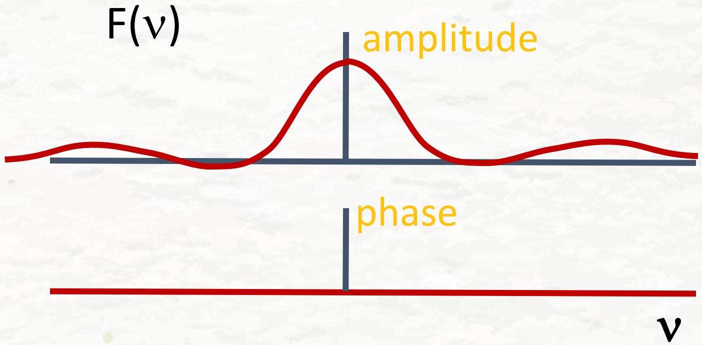
Propriété	Dom. des temps		Dom. des fréquences
	$x(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$X(\nu)$
	$y(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$Y(\nu)$
Linéarité	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$\alpha X(\nu) + \beta Y(\nu)$
Translation (t)	$x(t-\tau)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$X(\nu)e^{-2i\pi\nu\tau}$
Homothétie (t)	$x(\alpha t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} X(\nu/\alpha)$
Translation (ν)	$x(t)e^{2i\pi ft}$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$X(\nu - f)$
Homothétie (ν)	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} x(t/\alpha)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$X(\alpha\nu)$
Conjugaison	$x^*(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$X^*(-\nu)$
Convolution	$[x * y](t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$X(\nu)\,Y(\nu)$
Produit	$x(t)\,y(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$[X * Y](\nu)$
Dérivation	$d^m x(t)/dt^m$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$(2i\pi\nu)^m X(\nu)$

Propriété de la transformée de Fourier : décalage

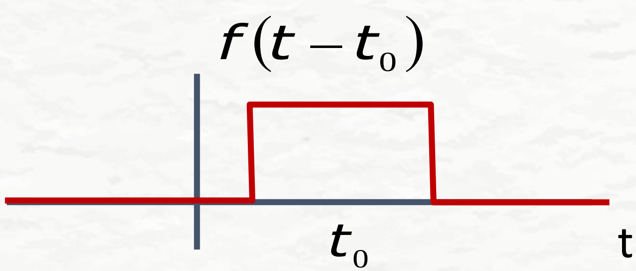
domaine du temps

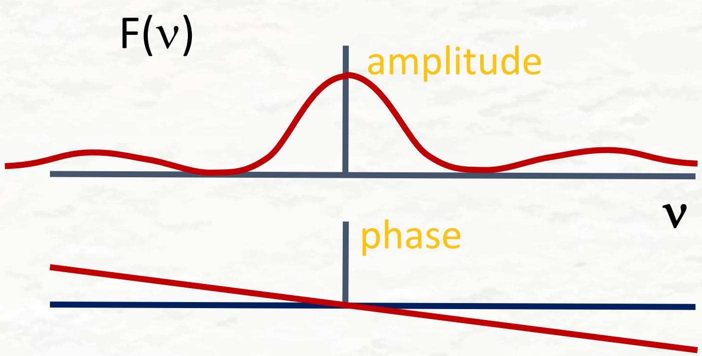
domaine de la fréquence





$$e^{i\vartheta} = cos\vartheta + isin\vartheta$$





Propriété de la transformée de Fourier : convolution

domaine du temps	domaine de la fréquence
$x(t)$	$X(\nu)$
$h(t)$	$H(\nu)$

convolution $\Leftrightarrow$ produit

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

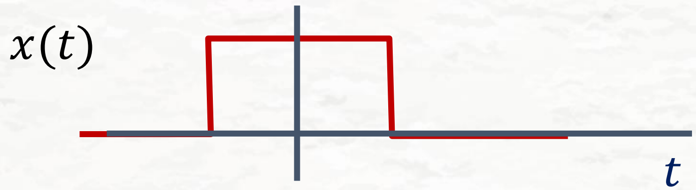
$$X(\nu) \cdot H(\nu)$$

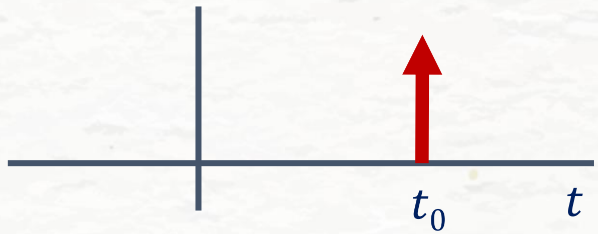
produit $\Leftrightarrow$ convolution

$$x(t) \cdot h(t)$$

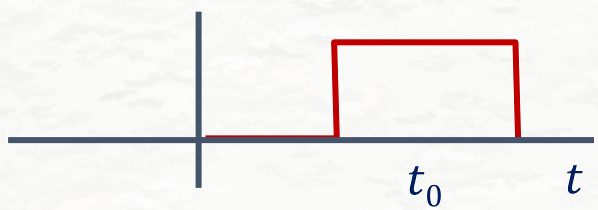
$$X(\nu) * H(\nu)$$

Convolution par une impulsion de Dirac





convolution: $x(t) * \delta(t - t_0)$



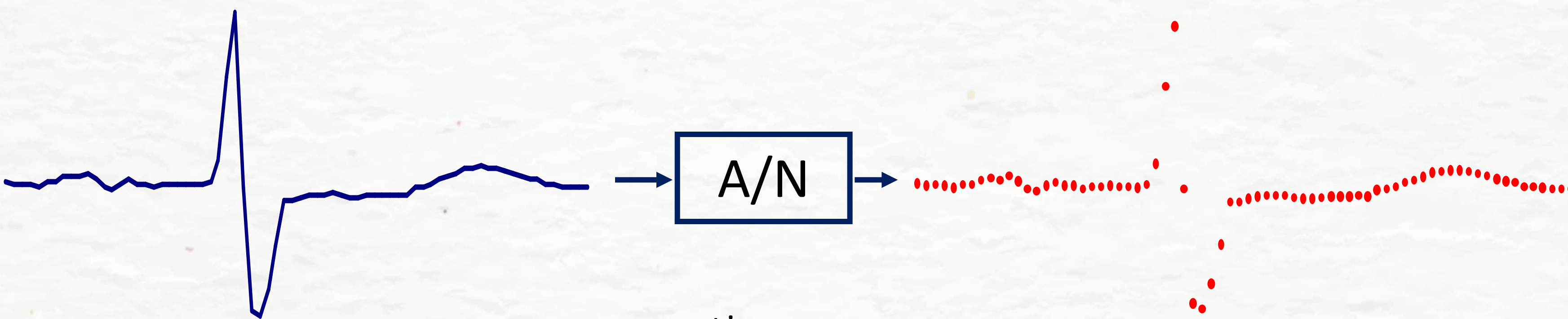
Plan

1. ## Cadre 1D
   - Révision
   - Séries de Fourier : interprétation géométrique
   - Extension : approche géométrique de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Transformée de Fourier à temps discret et transformée de Fourier discrète

2. ## Cadre 2D
   - Extension 2D de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Aspects practiques

Échantillonnage

signal continu $v(t)$ signal discret v_i

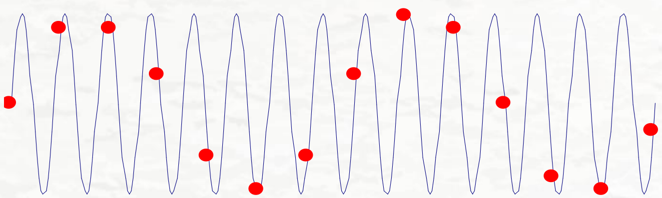


convertisseur
analogue/numérique

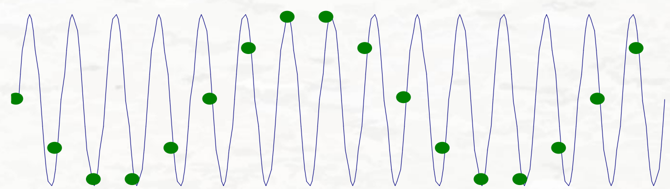
Repliement

F_{signal} =1 Hz

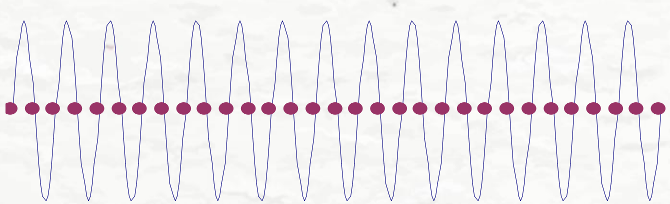
$F_{éch}$=0.87 Hz $F_{observée}$=0.11 Hz



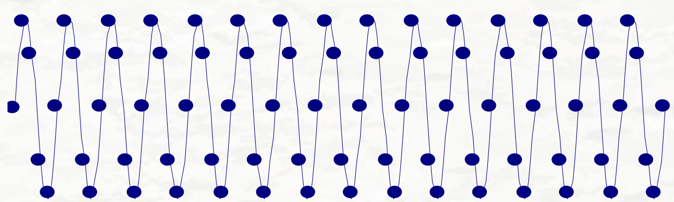
$F_{éch}$=1.11 Hz $F_{observée}$=0.11 Hz



$F_{éch}$= 2 Hz



$F_{éch}$=5 Hz → correctement échantillonné



fréquence d'échantillonnage pour éviter l'aliasing: > $2f_{max}$

slido

slido

Please download and install the Slido app on all computers you use

La fréquence la plus élevé que les humains peuvent entendre est autour de 20kHz.
Pour encoder la musique quelle est la fréquence minimale à laquelle on devrait échantillonner les ondes de pression?

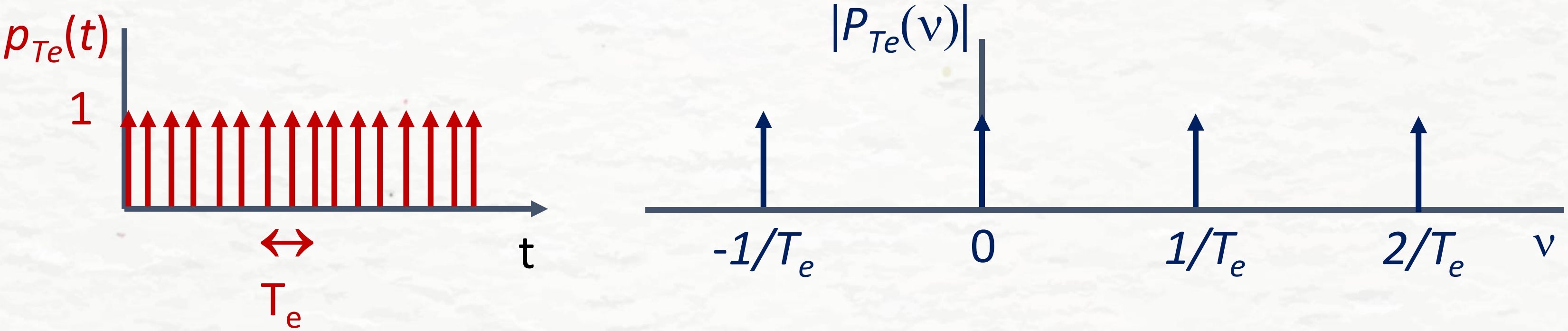
ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Transformée de Fourier d'un train d'impulsions

Représentation mathématique de l'échantillonnage :

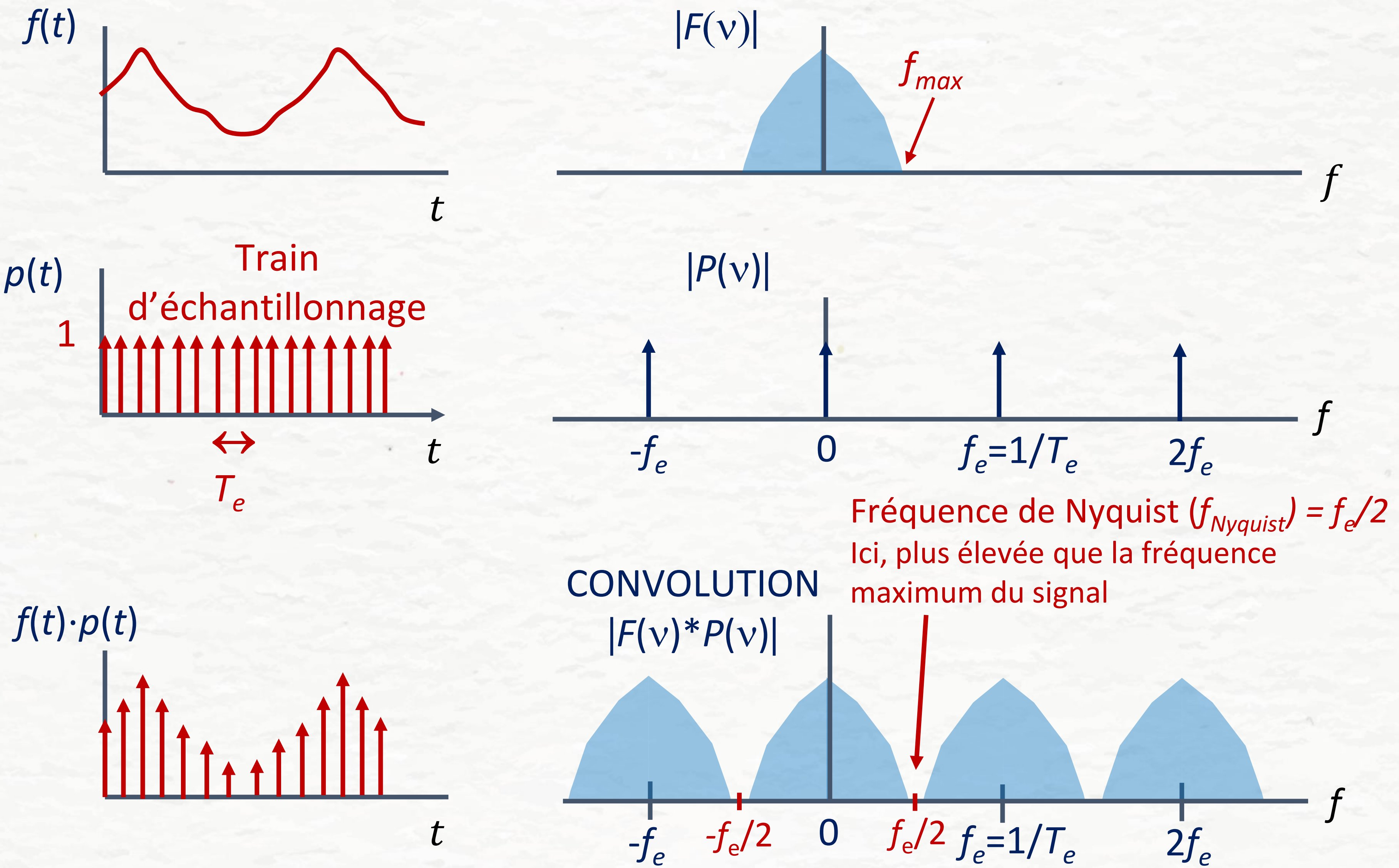
$p_{Te}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)$

domaine du temps ⇔ domaine de la fréquence

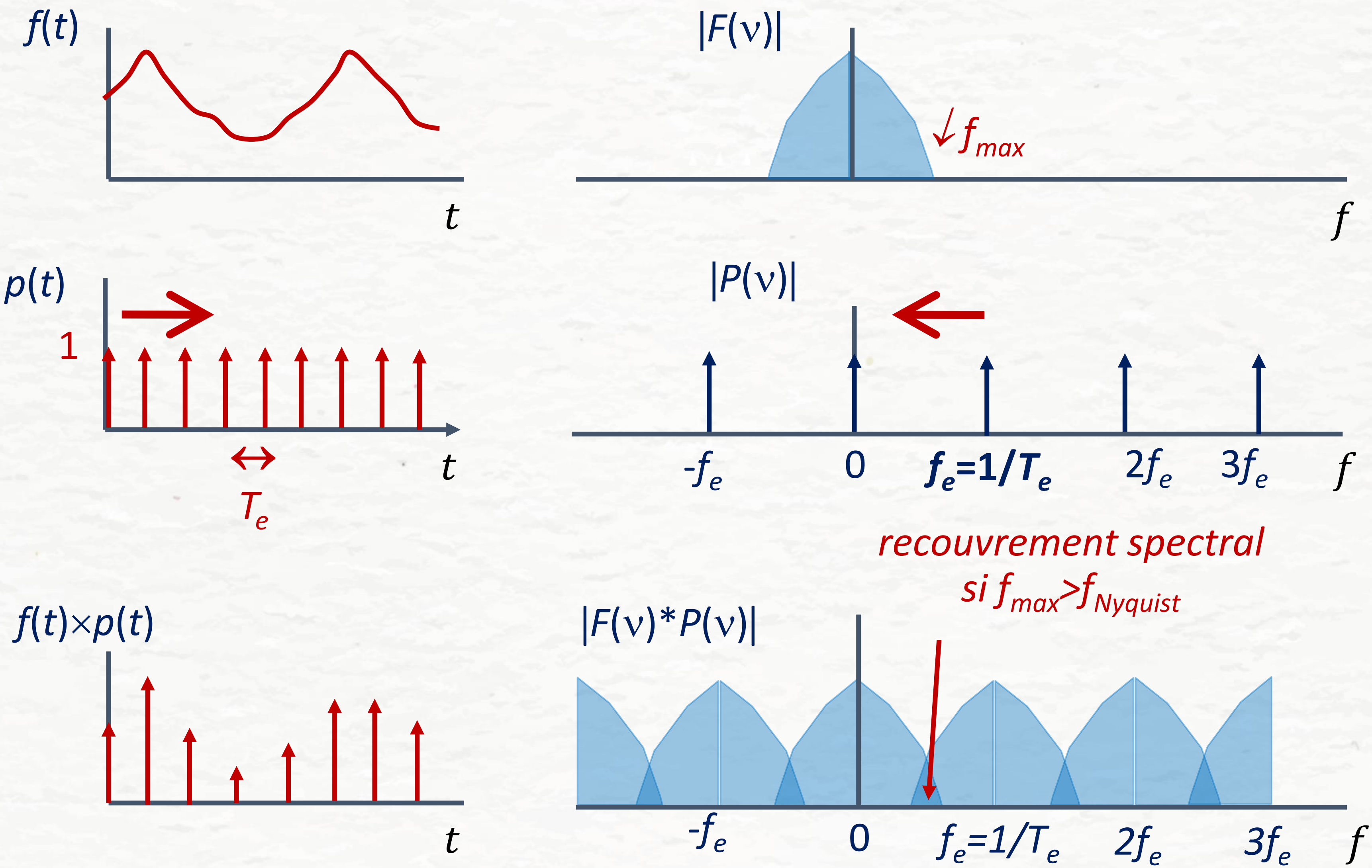


$$p_{T_e}(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} P_{T_e}(\nu) = 1/T_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\nu - k/T_e)$$

Conséquences spectrales de l'échantillonnage ($f_e > 2f_{max}$)



Conséquences spectrales de l'échantillonnage ($f_e<2f_{max}$)



Transformée de Fourier de signaux échantillonnés

Synthèse

- $f_e(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \delta(t - nT_e) \iff F_e(\nu)$ périodique de période $1/T_e$
- TF : $F_e(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{-2i\pi\nu n T_e}$

$$F_e(\nu) = \int f_e(t) e^{\{-2i\pi\nu t\}} dt$$
$$= \int \sum f_n \delta(t - nT_e) e^{\{-2i\pi\nu t\}} dt = \sum f_n e^{\{-2i\pi\nu n T_e\}}$$

- TFI : $f_n = T_e \int_0^{\frac{1}{T_e}} F_e(\nu) e^{2i\pi\nu n T_e} d\nu$

Rappel diapo 16 →

Fonctions périodiques

- f $T-$périodique $\Leftrightarrow$ f décomposable en série de Fourier

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k e^{2i\pi kt/T} \qquad F_k = \frac{1}{T}\int_I f(t) e^{-2i\pi kt/T} dt$$

- Propriété de linéarité

$$F(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k \delta(\nu - k/T)$$

- Si $f_n = f(nT_e)$ avec $f(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F(\nu)$, alors $F_e(\nu)$ est obtenu par périodisation de $F(\nu)$ à la période $1/T_e$: $F_e(\nu) = \frac{1}{T_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}} F\left(\nu - \frac{n}{T_e}\right)$

Échantillonnage (1)

Principe

Échantillonnage à la période T_e

- En pratique : $f(t) \longrightarrow \{f(nT_e)\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$
- Représentation mathématique : $p_{T_e}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT_e)$

$$f(t) \longrightarrow f_e(t) = p_{T_e}(t)\ f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

- Remarque : $p_{T_e}(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} P_{T_e}(\nu) = 1/T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\nu - k/T_e)$

Échantillonnage (2)

Interprétation fréquentielle : $f(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F(v)$

$$
\begin{aligned}
f_e(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F_e(\nu) &= P_{T_e}(\nu) * F(\nu) \\
&= \left(1/T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\nu - k/T_e)\right) * F(\nu) \\
&= 1/T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(\nu - k/T_e)
\end{aligned}
$$

- $F_e(v)$ obtenu par « périodisation » de $F(v)$ à la période $1 / T_e$
- Calcul direct : $F_e(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT_e)e^{-2i\pi\nu n T_e}$

On retrouve que $F_e(v)$ est périodique de période $1 / T_e$

Échantillonnage (3)

Interprétation fréquentielle : réciproque

$F(\nu)$ périodique de période 1 / Te

- DSF ("Discrete Fourier Series") de $F(\nu)$:

$$F(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k e^{-2i\pi\nu k T_e} \quad ; \quad F_k = T_e \int_0^{\frac{1}{T_e}} F(\nu) e^{2i\pi\nu k T_e} d\nu$$

F_k : coefficient du DSF d'indice $-k$

- TFI de $F(\nu)$: $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k \delta(t - kT_e)$

Conséquence

$f(t)$ échantillonné à la période T_e

$$f(nT_e) = T_e \int_0^{\frac{1}{T_e}} F(\nu) e^{2i\pi\nu n T_e} d\nu$$

Théorème d'échantillonnage (1)

Position du problème

Possibilité de passer de manière réversible (sans perte d'information) de $f_e(t)$ à $f(t)$?

Solution

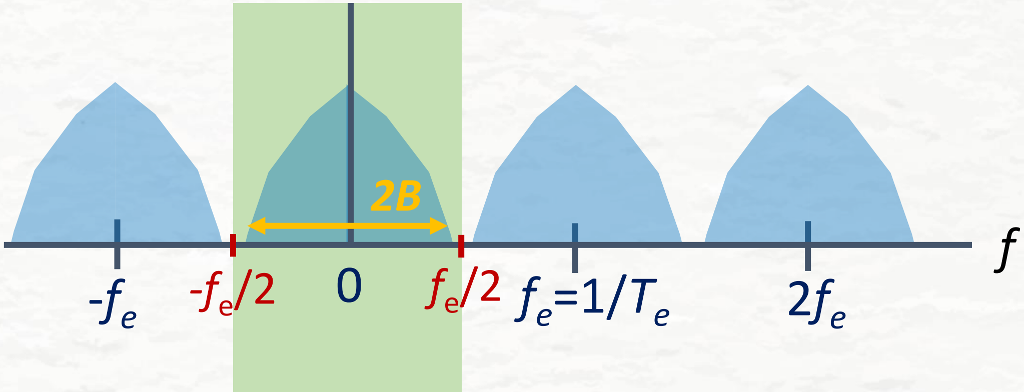
- Domaine temporel
  - $f(t)$ —> $f_e(t)$: immédiat
  - $f_e(t)$ —> $f(t)$: ? ? ?
- Domaine fréquentiel
  - $F(v)$ —> $F_e(v)$: $1/T_{e-}$ périodisation
  - $F_e(v)$ —> $F(v)$: retrouver $F(v)$ dans sa version périodisée $F_e(v)$

Possible si la périodisation de $F(v)$ se fait sans recouvrement

Théorème d'échantillonnage (2)

Condition suffisante

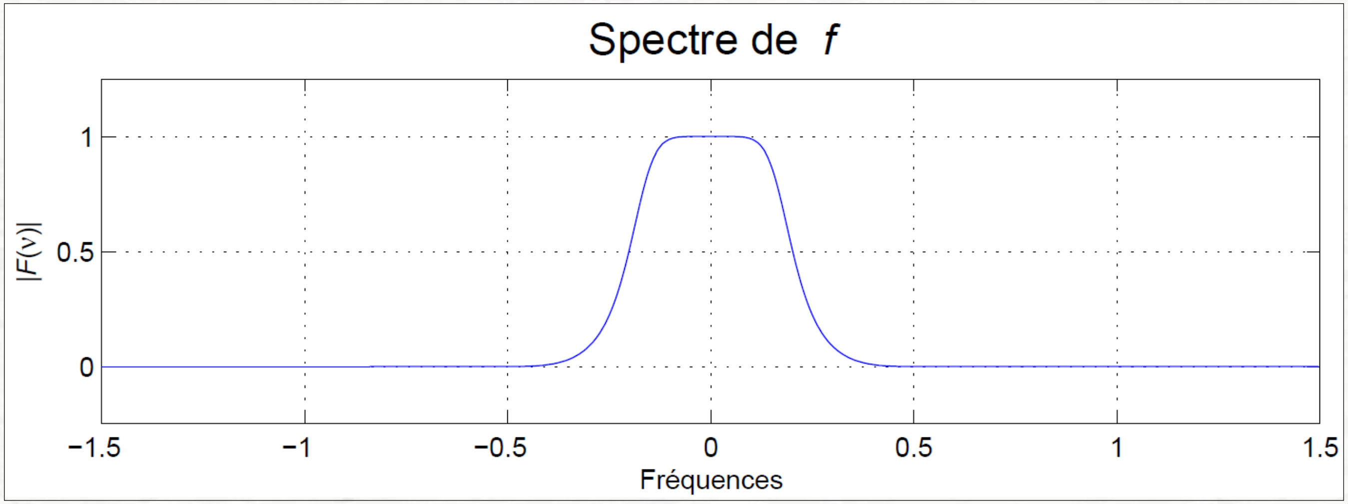
- $F(\nu)$ à bande limitée [$-B,B$]: $F(\nu) = 0$ si $|\nu| > B$
- Si $2B < 1/T_e$, $f(t)$ peut être échantillonné sans perte d'information

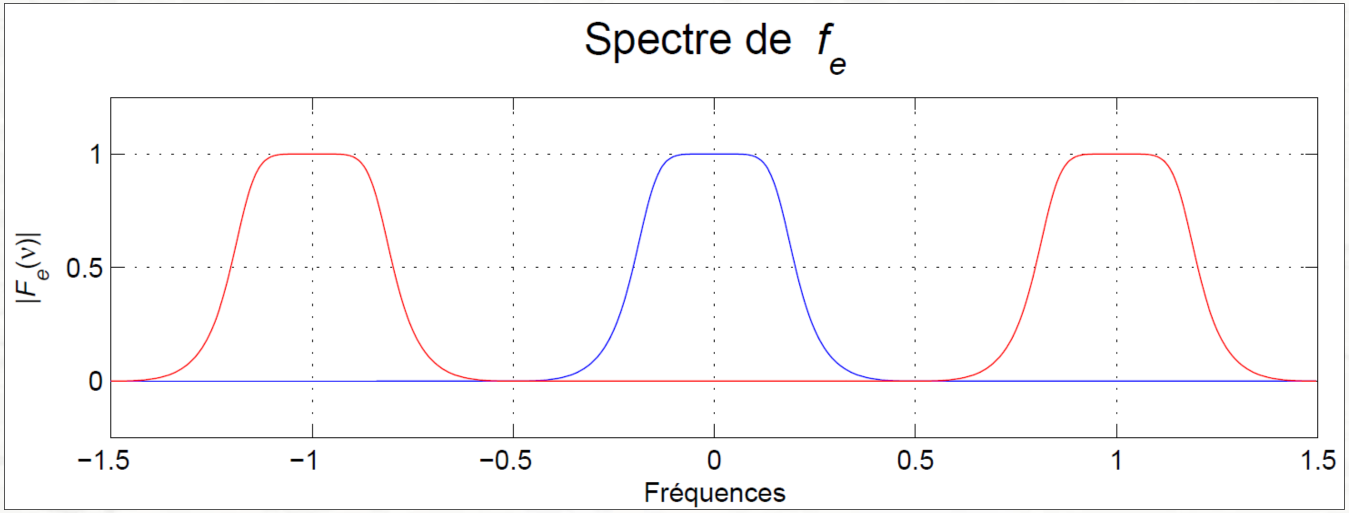


En pratique

- $F_e(\nu)$ défini à partir de sa « période centrale » $\left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right]$

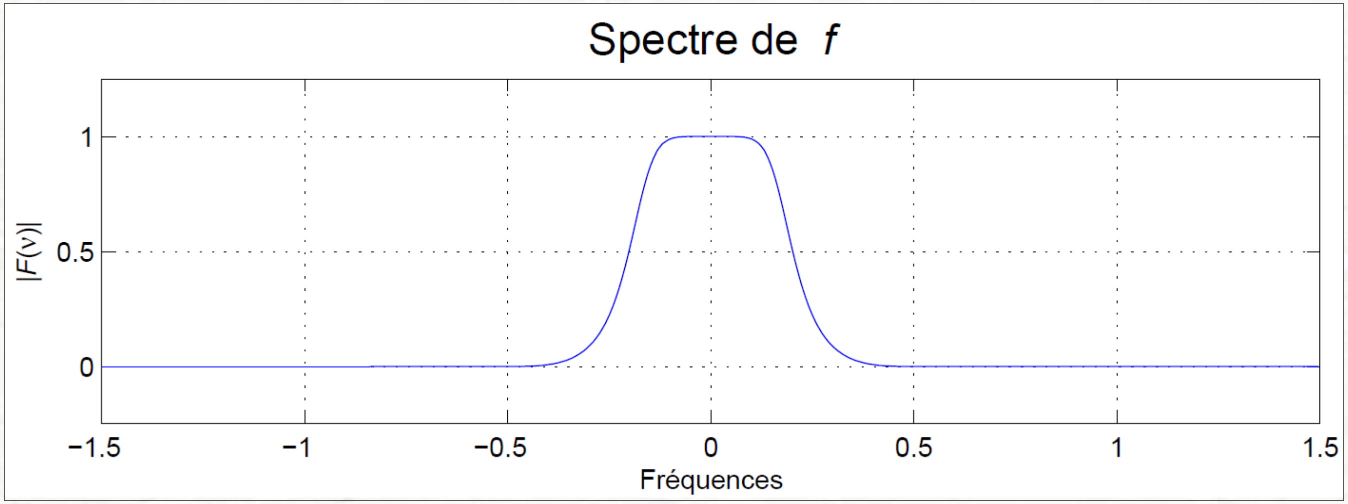
Théorème d'échantillonnage : illustration

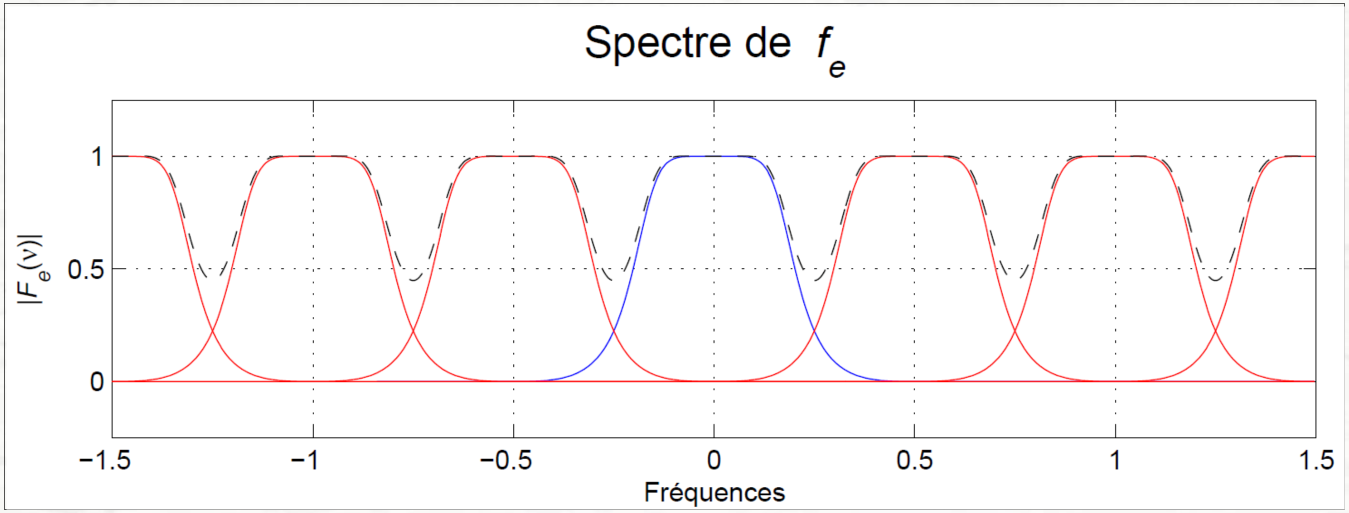




$T_e = 1$: échantillonnage sans recouvrement

Théorème d'échantillonnage : illustration





$T_e = 2$: échantillonnage avec recouvrement

Échantillonnage et reconstruction : synthèse

Échantillonnage

- $$F(\nu) \longrightarrow F_e(\nu) = 1/T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(\nu - k/T_e) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT_e) e^{-2i\pi\nu nT_e}$$
- $$f(t) \longrightarrow f_e(t) = p_{T_e}(t)\ f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

Reconstruction (si le théorème d'échantillonnage est satisfait)

- $$F_e(\nu) \longrightarrow F(\nu) = T_e\ F_e(\nu)\ \mathrm{Rect}_{[-1/(2T_e)\ ,\ 1/(2T_e)]}(\nu)$$

$$f_e(t) \longrightarrow f(t) = f_e(t) * \frac{sin(\pi t/T_e)}{\pi t/T_e} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT_e) \frac{sin(\pi(t - nT_e)/T_e)}{\pi(t - nT_e)/T_e}$$

Illustration

Voir démonstration demo_replie1D

Aspects pratiques

Situations typiques

- Souvent impossible d'éviter le recouvrement spectral

Filtrage passe-bas anti-repliement avant l'échantillonnage

https://www.youtube.com/watch?v=p08WDDNjwAE&ab_channel=SimonHutchinson

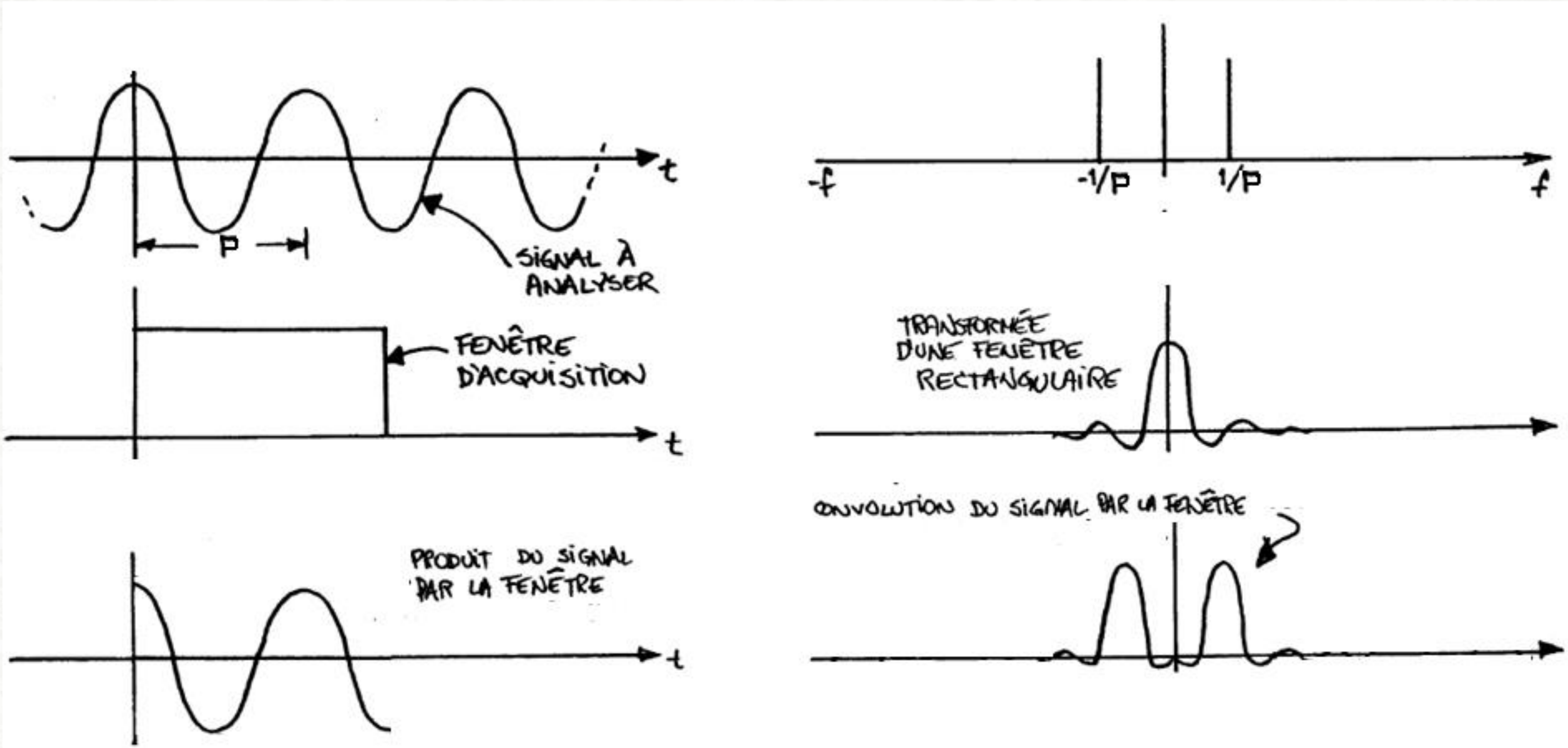
- Manipulation de quantités numérisées
  - Domaine temporel ou spatial : nécessité de données discrétisées
  - Passage au domaine fréquentiel : variable ν continue !
  - Outil disponible : transformée de Fourier rapide (FFT)

Comment obtenir, interpréter et manipuler des fréquences discrètes ?

Aspects pratiques : Durée finie de la fenêtre d'acquisition

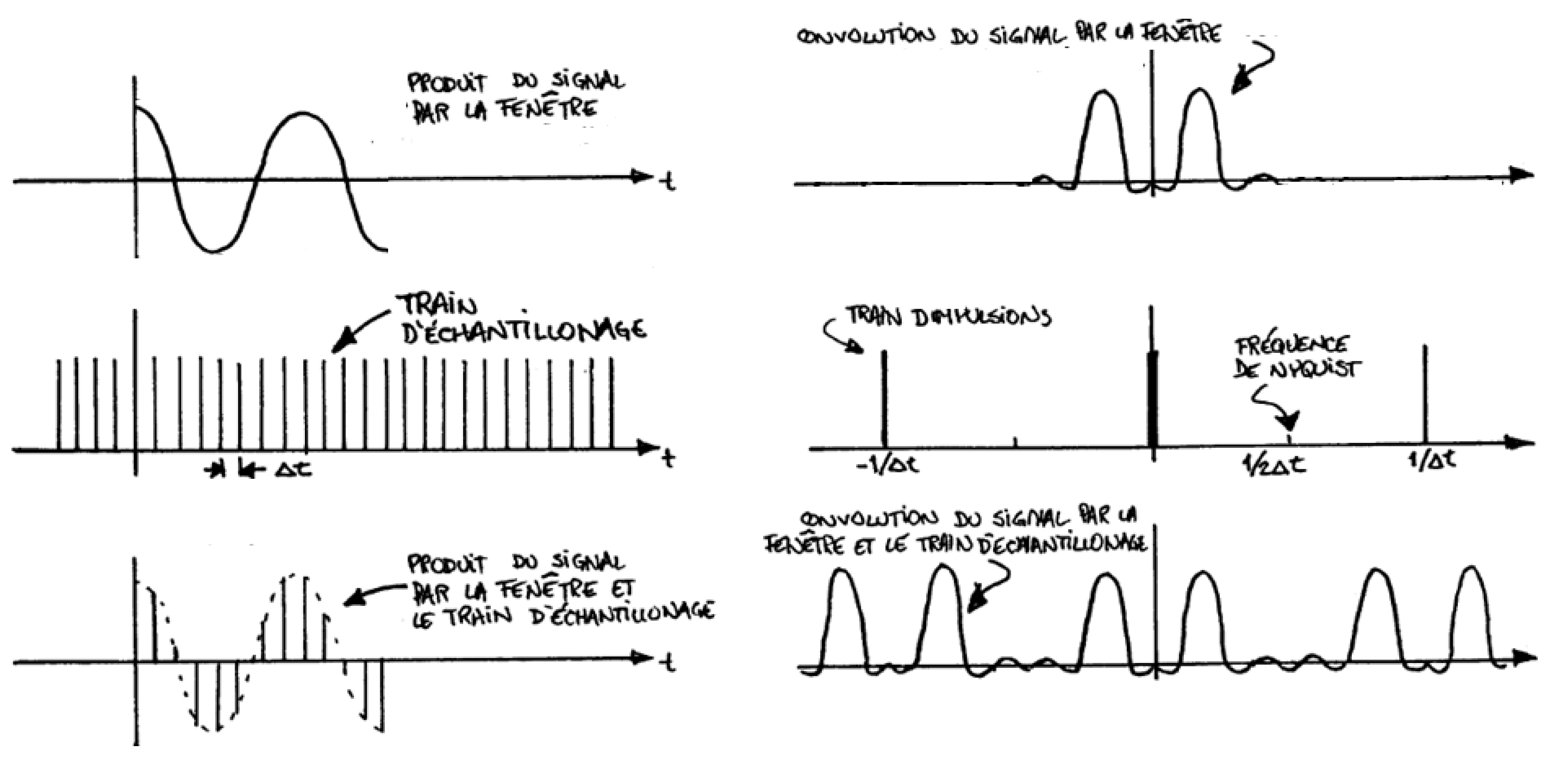
domaine du temps

domaine de la fréquence



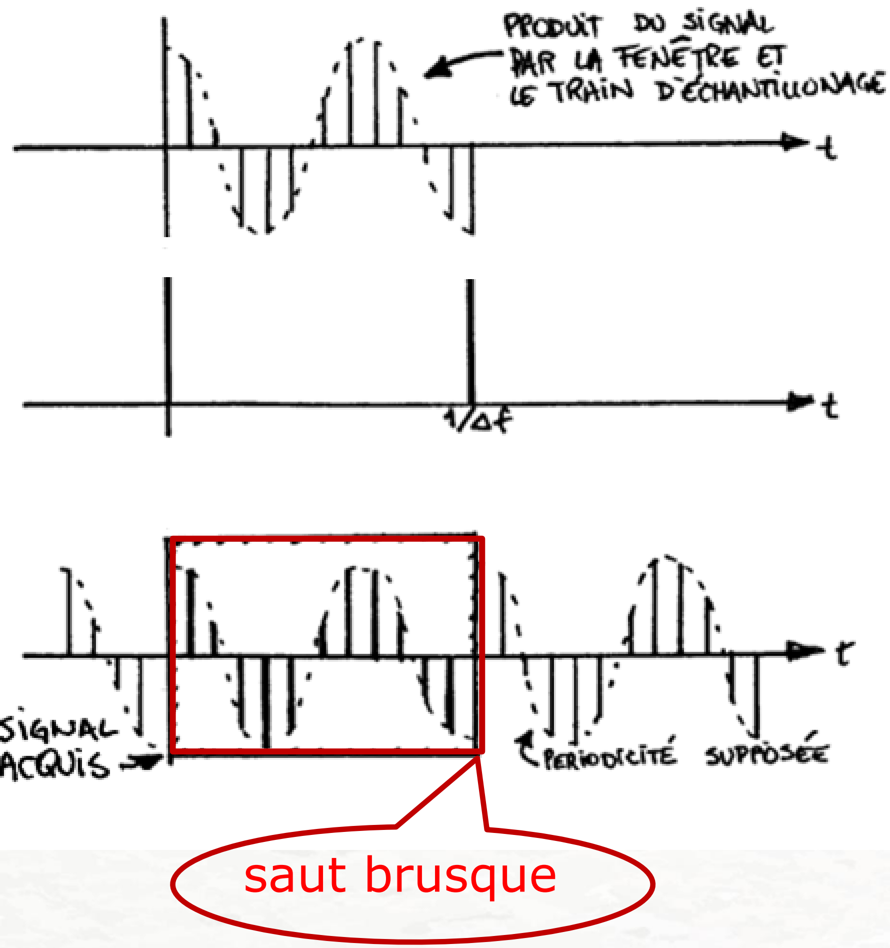
Aspects pratiques : Durée finie de la fenêtre d'acquisition

domaine du temps | domaine de la fréquence

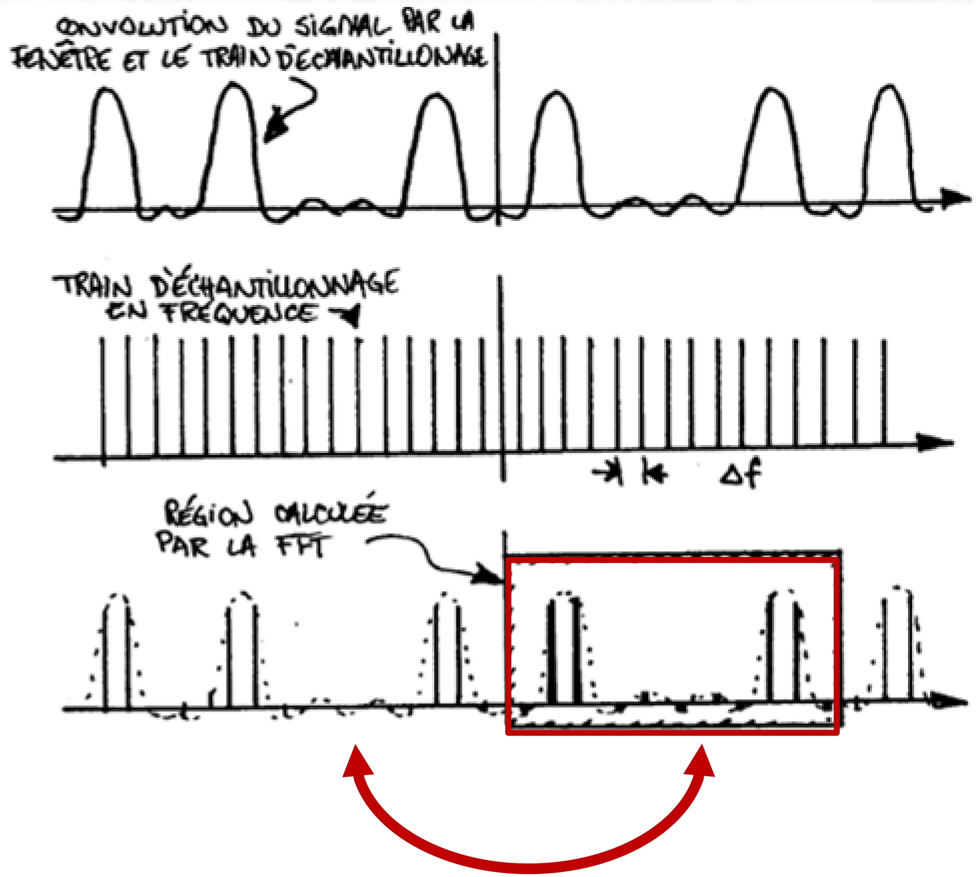


Aspects pratiques : échantillonnage fréquentiel et périodicité implicite

domaine du temps

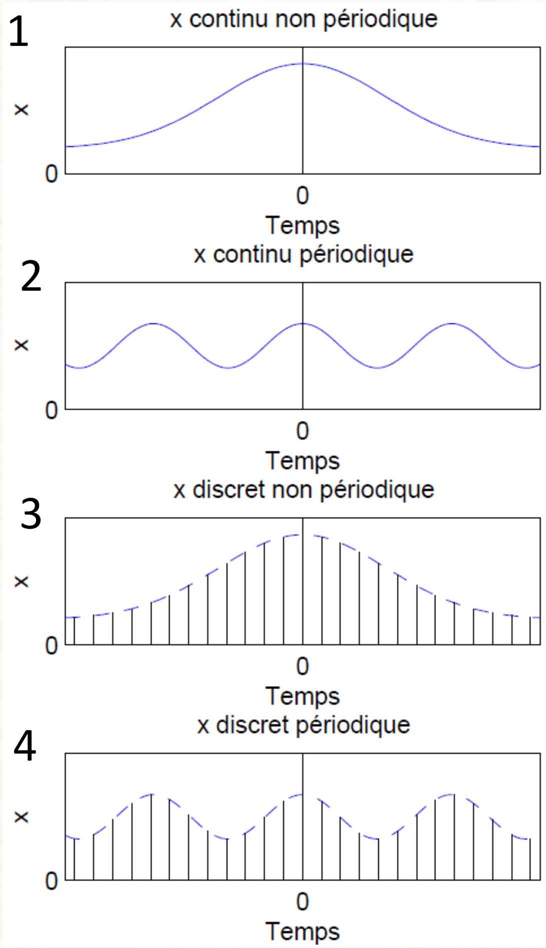


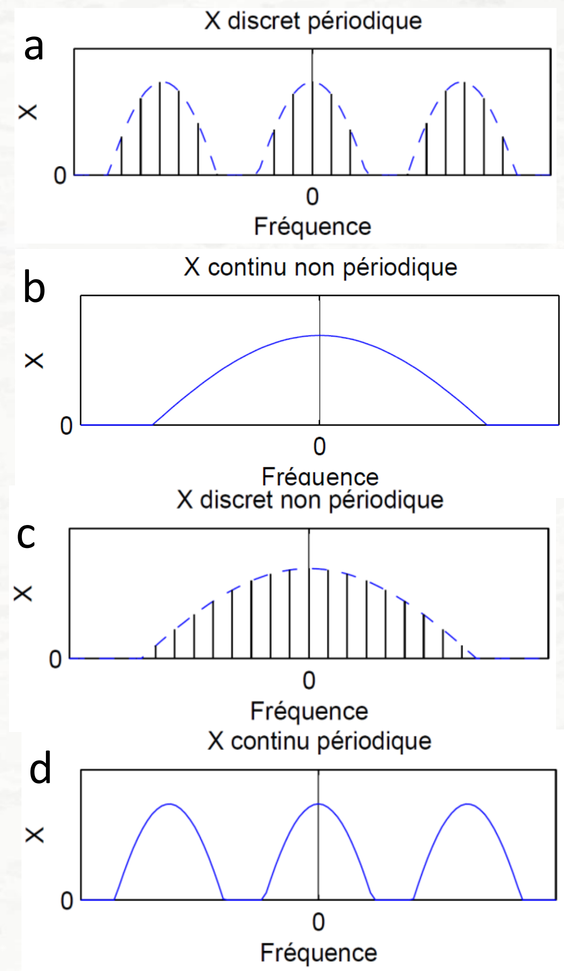
domaine de la fréquence



Caractéristiques de la transformée de Fourier

slido





slido

Please download and
install the Slido app on
all computers you use

Associez les signaux a leur TF

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Plan

1. **Cadre 1D**
   - Révision
   - Séries de Fourier : interprétation géométrique
   - Extension : approche géométrique de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Transformée de Fourier à temps discret et transformée de Fourier discrète

2. **Cadre 2D**
   - Extension 2D de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Aspects practiques

Signaux à temps discret

Définitions et propriétés

- Signal à temps discret :

  $\{ f_n \ ; \ n \in \mathbb{Z} \}$

Rappel diapo 35 →

Transformée de Fourier de signaux échantillonnés

Synthèse

- $f_e(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \delta(t - nT_e) \iff F_e(\nu)$ périodique de période $1/T_e$
- TF : $F_e(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{-2i\pi\nu n T_e}$
- TFI : $f_n = T_e \int_0^{\frac{1}{T_e}} F_e(\nu) e^{2i\pi\nu n T_e} d\nu$

- Transformé de Fourier à temps discret :

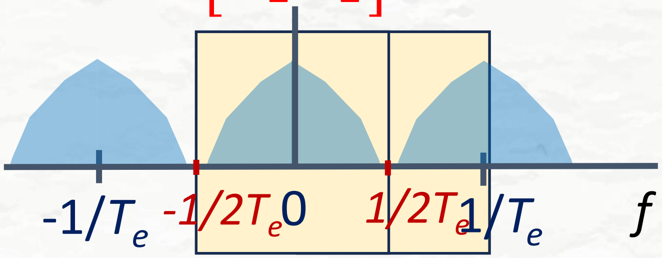
v_r : fréquence réduite à valeurs continues

$$F(\nu_r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{-2i\pi n \nu_r}$$

$$v_r \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

- Transformée de Fourier inverse à temps discret:

$$f_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(\nu_r) e^{2i\pi n \nu_r} d\nu_r$$

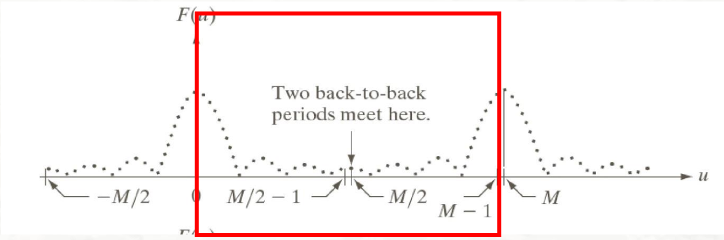


Transformée de Fourier discrète

Formalisation

ν_r : fréquence réduite à valeurs continues

$$F(\nu_r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-2i\pi n \nu_r}$$



- N échantillons dans l'intervalle $[0\,,1]$
- Fréquences discrétisées : $\nu = \frac{k}{N}\,, k = 0,1, \dots, N-1$

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2i\pi kn/N}$$ Transformée de Fourier discrète

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{2i\pi kn/N}$$ Inverse transformée de Fourier discrète

Mise en œuvre

Calcul rapide par FFT si N est une puissance entière de 2

TF discrète et problèmes pratiques (1)

TF discrète et représentation spectrale

- N échantillons f_n ; $0 \leq n \leq N-1$. Que représente sa TFD F_k ; $0 \leq k \leq N-1$?
- Si f exactement périodique de période N

F_k : transformée de Fourier « exacte »

- Si f nulle à l'extérieur de $[0, N-1]$

$$F_k = F(v_r) \text{ pour } v_r = k/N$$

TF discrète et problèmes pratiques (2)

Conséquences

- *f* périodique, mais la fenêtre d'acquisition ne contient pas un nombre entier de périodes de *f* : erreur de représentation du spectre

Illustration : voir démonstration **demo_sin**

- Si *f* nulle à l'extérieur de $[0\,, N-1]$: on peut obtenir une meilleure représentation du spectre, $F(v_r)$, en prolongeant $\{fn\ ;\ 0 \leq n \leq N-1\}$ par des 0.

Illustration : voir démonstration **demo_bourrage**

- Symétriquement : ré-échantillonnage de *f* en prolongeant F_k par des 0

TF discrète et problèmes pratiques (3)

Convolution par FFT

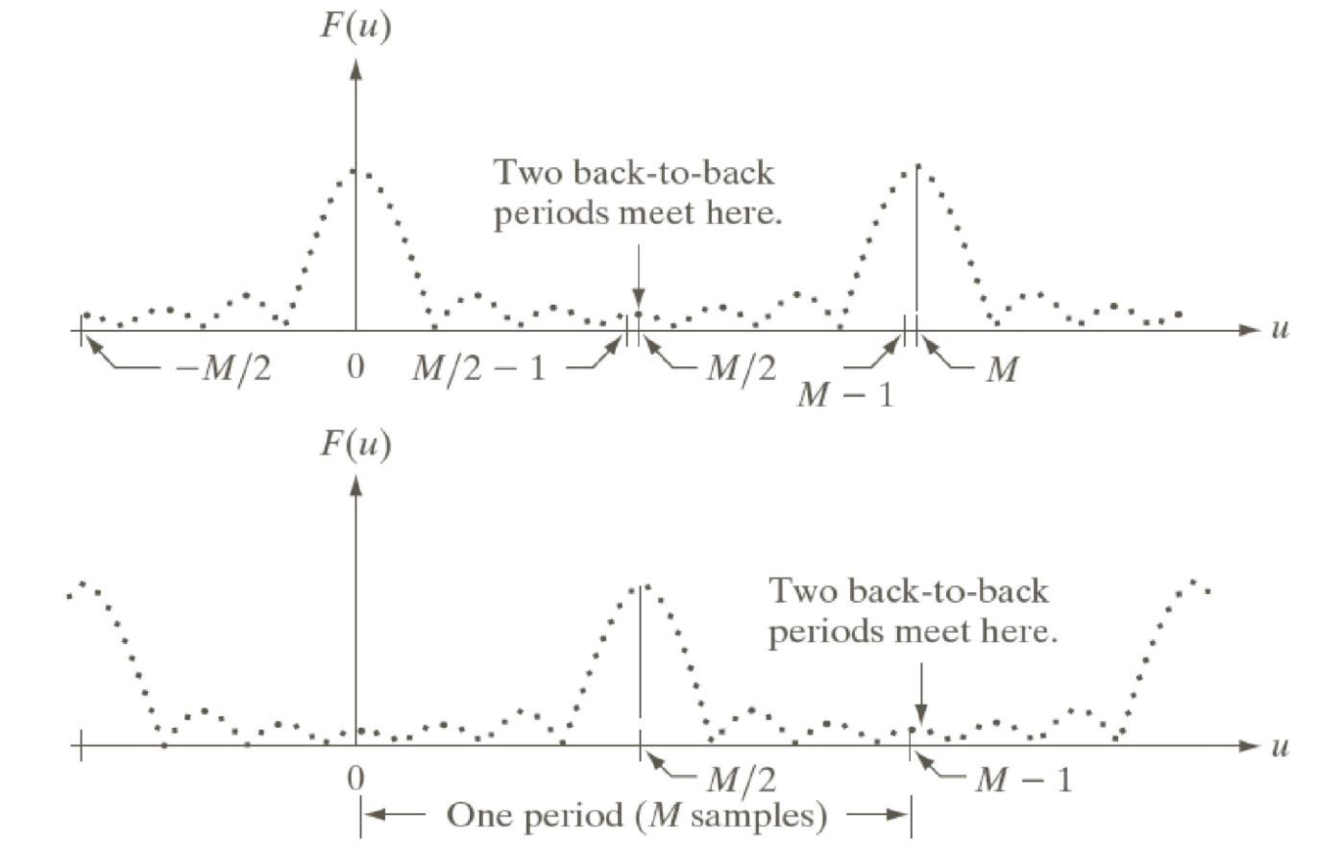
- Convolution : $(f * h)(n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$ Produit : $F_k H_k$
- F et H doivent avoir la même taille $\Leftrightarrow$ f et h doivent avoir la même taille
- Hypothèse sur f et h : périodicité
  - convolution « circulaire »
  - Si f et h pas periodique: prolongement de f et h par des zéros pour obtenir une taille $P \geq taille(f) + taille(h) - 1$
- Quantités réelles $\Leftrightarrow$ TF paire

Rééchantillonnage (décimation)

Nécessité d'un filtrage passe-bas pour éviter le recouvrement spectral

TF discrète et problèmes pratiques (4)

Indexation de la TFD

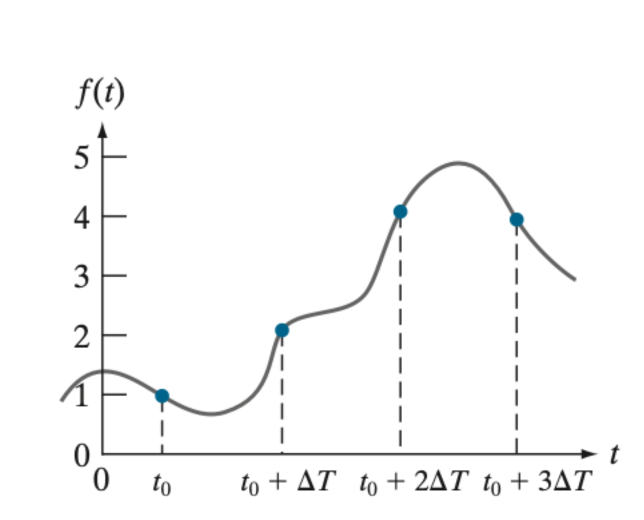


Exemple

Considérez le signal échantillonné *f(t)* ci-bas. Quel seront les valeurs F_k obtenue avec la TFD (en format x+iy)?

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2i\pi kn/N}$$

slido



slido

Please download and install the Slido app on all computers you use

Considérez le signal échantillonné f(t) ci-bas. Quel seront les valeurs Fk obtenue avec la TFD?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Devoir

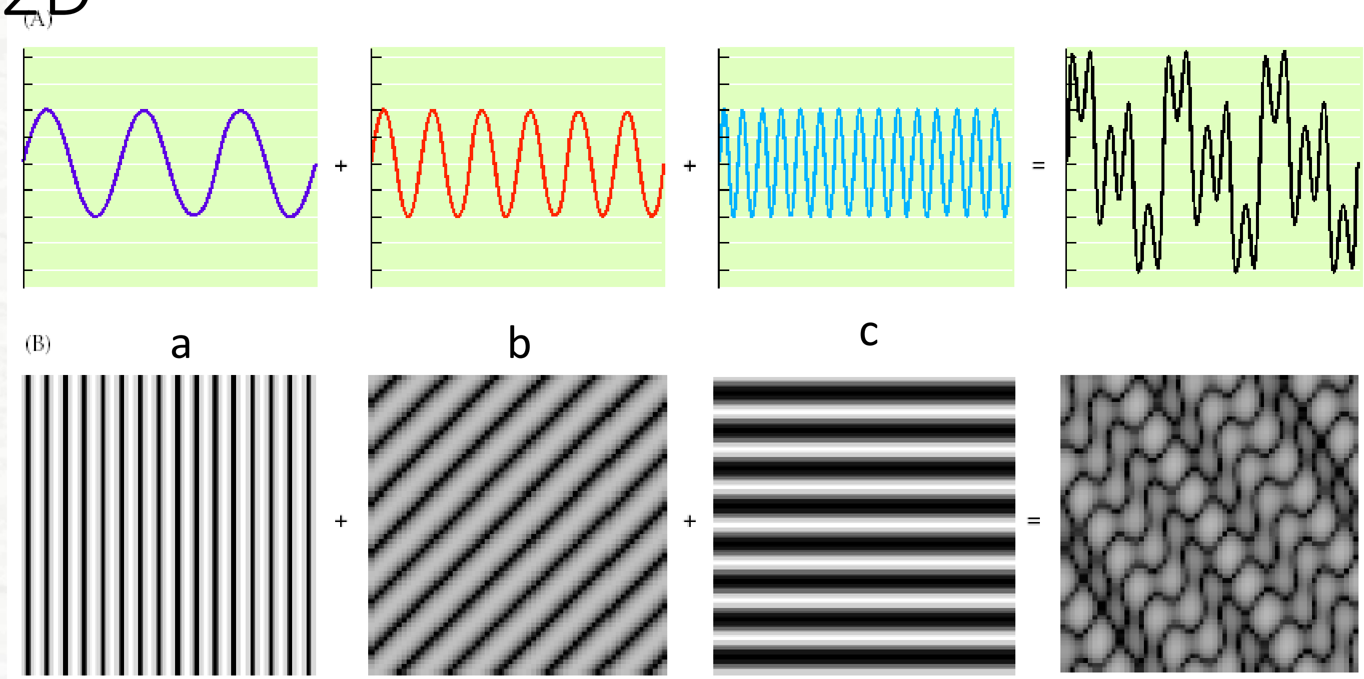
Montrez que la transformée de Fourier continue est une opération linéaire. Vous pouvez faire la preuve en 1D.

Plan

1. **Cadre 1D**
   - Révision
   - Séries de Fourier : interprétation géométrique
   - Extension : approche géométrique de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Transformée de Fourier à temps discret et transformée de Fourier discrète

2. **Cadre 2D**
   - Extension 2D de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Aspects practiques

Représentation spectrale – extension à 2D



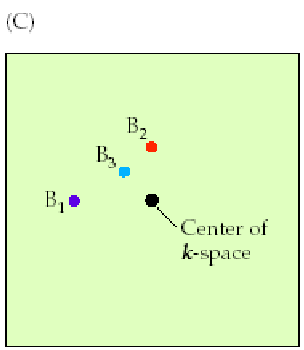


Figure 4.5 Constructing a complex waveform or image from simpler components. Any data, no matter how complex, can be constructed from simpler components. Shown in (A) are three sine waves, each with a different frequency. When combined, they form the waveform at right. By combining more and more sine waves of different frequencies and phases, very complex waveforms can be created, such as that of music. The same principle holds for two-dimensional data (B), except that here the components are gratings of particular spatial frequencies (i.e., how closely spaced are the bars), phases, and angles. By combining a very large number of these gratings, complex images can be created, such as those used in MRI. Shown in (C) is the *k*-space plot of the summed image; the individual gratings are associated with the three bright pixels.

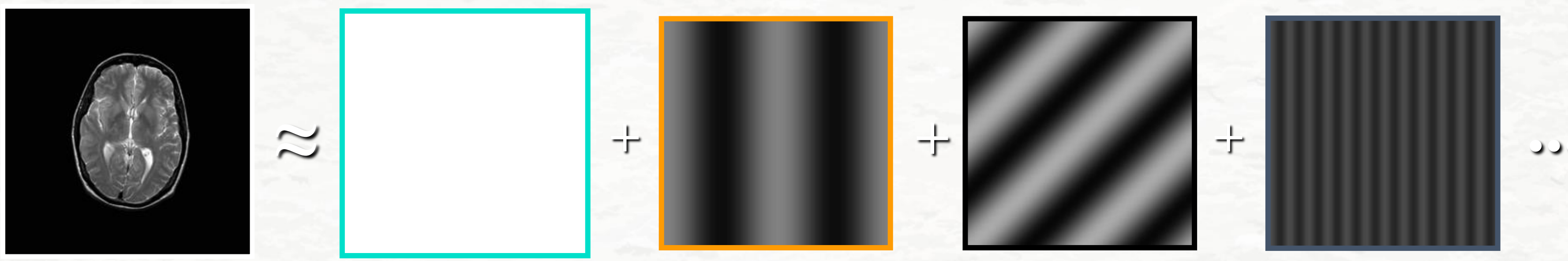
slido

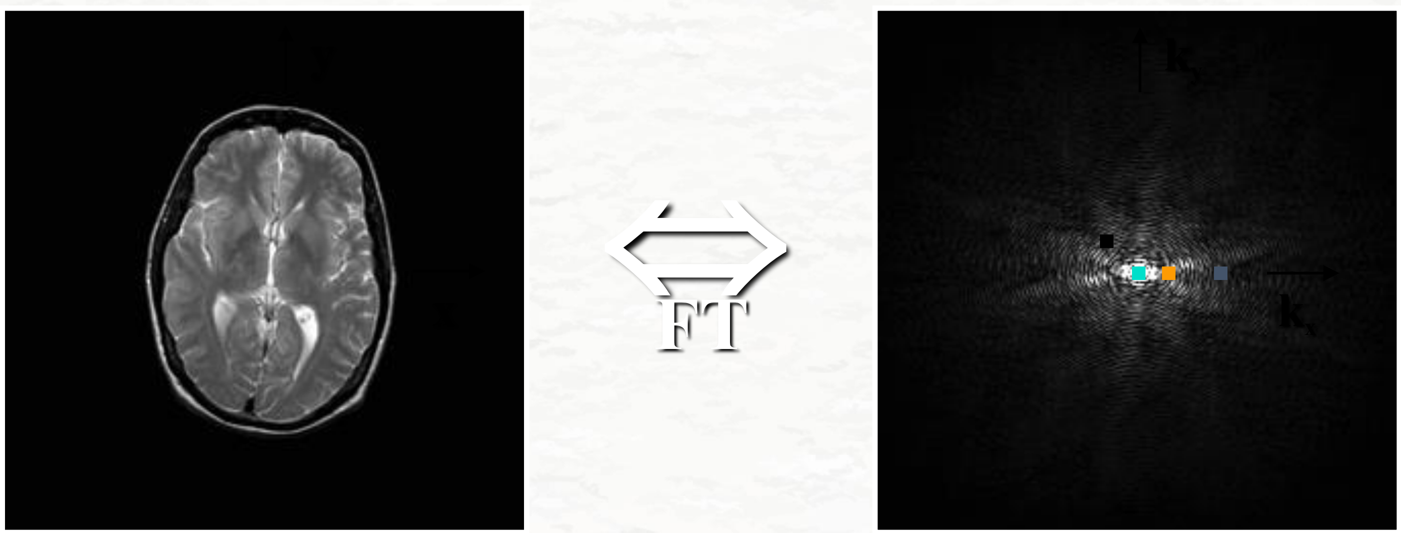
Please download and install the Slido app on all computers you use

Quels points sur l'image du spectre correspondent aux images ?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Représentation spectrale – extension à 2D





Slide courtesy of Elfar Adalsteinsson

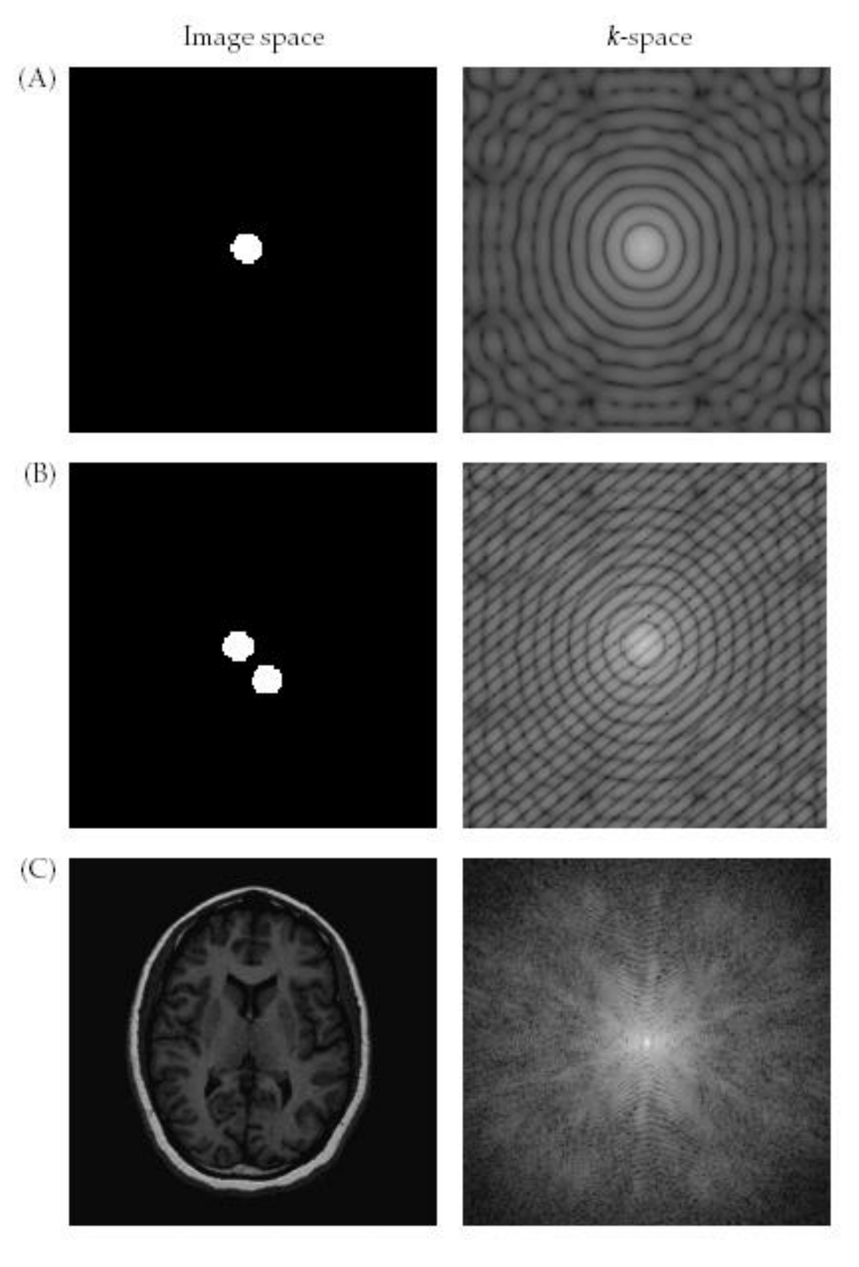


Image space
k-space
(A)
(B)
(C)

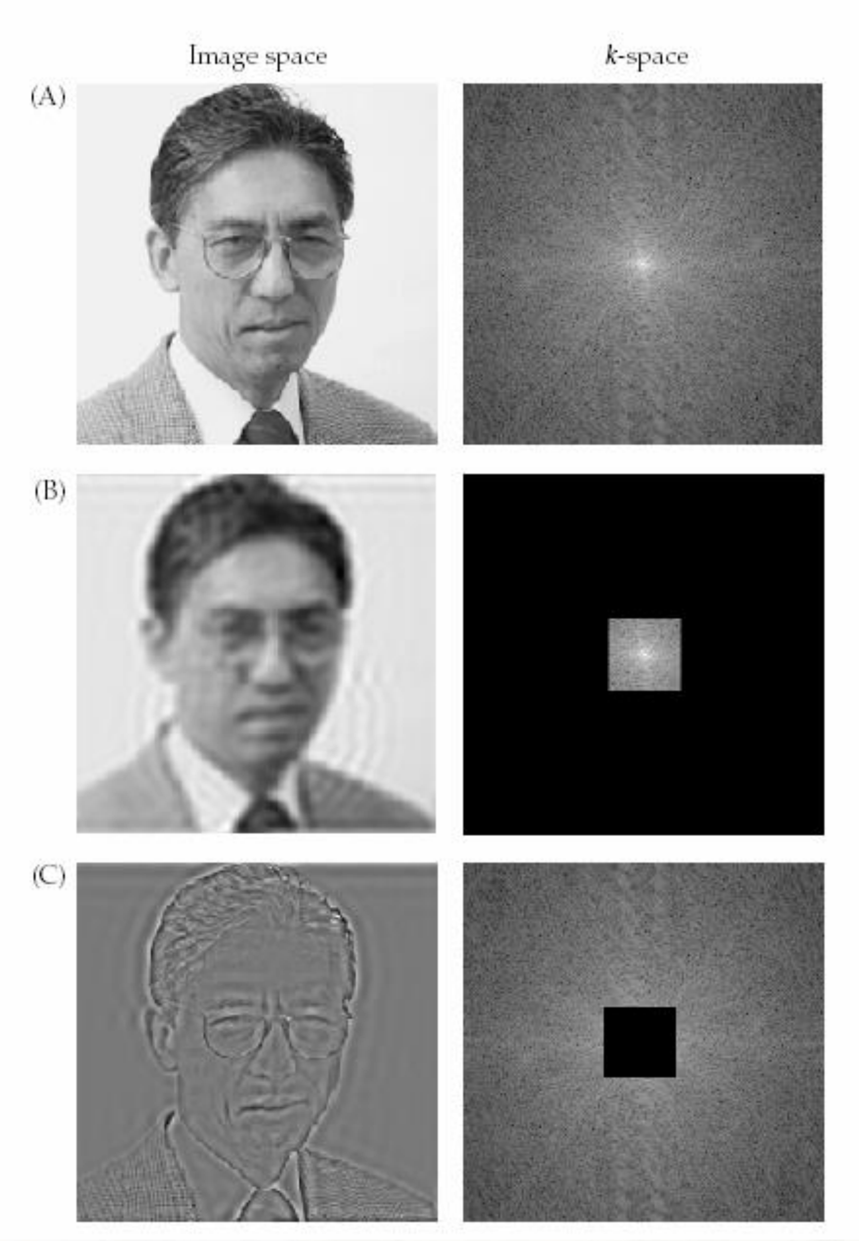
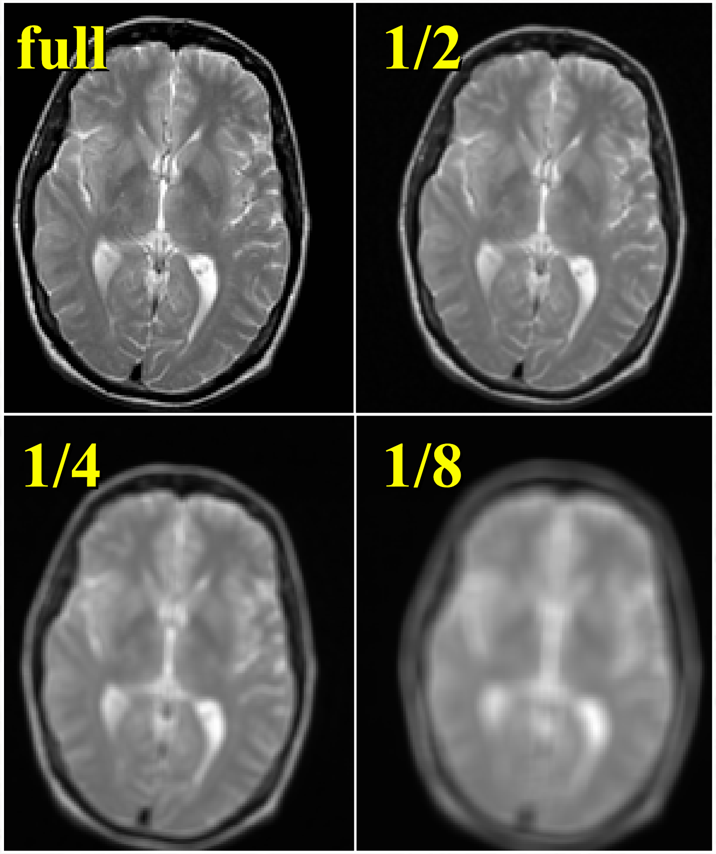
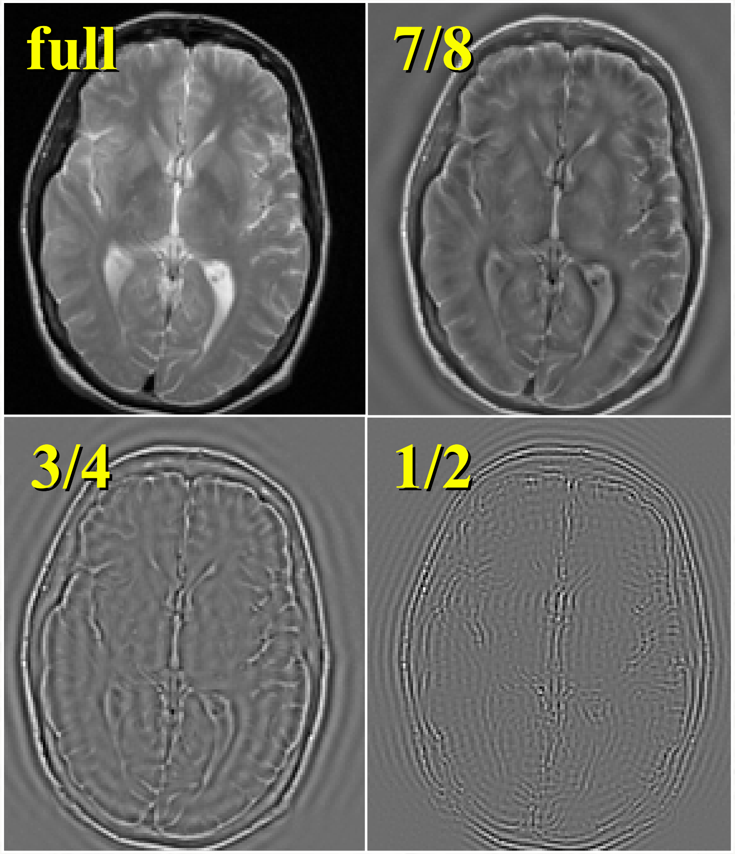


Image space
k-space
(A)
(B)
(C)

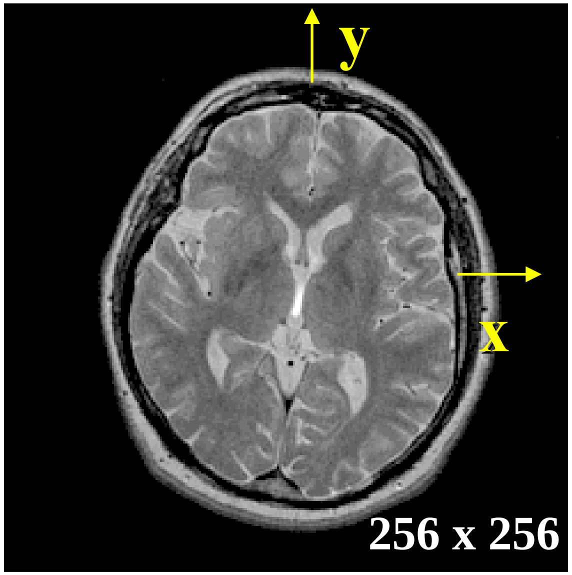
Low Spatial Frequencies



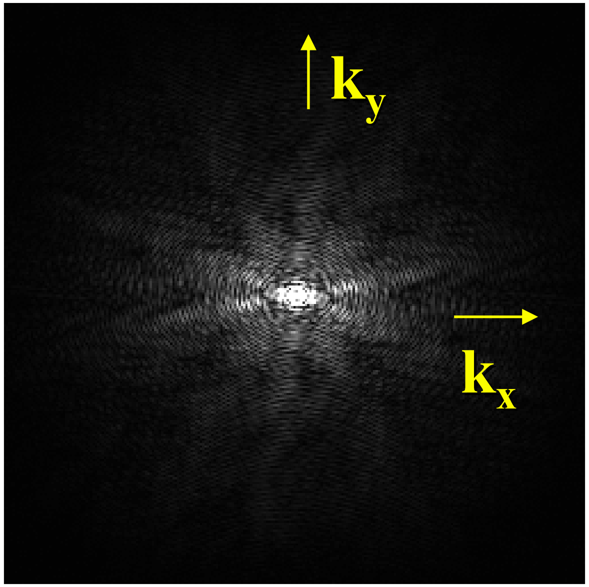
High Spatial Frequencies

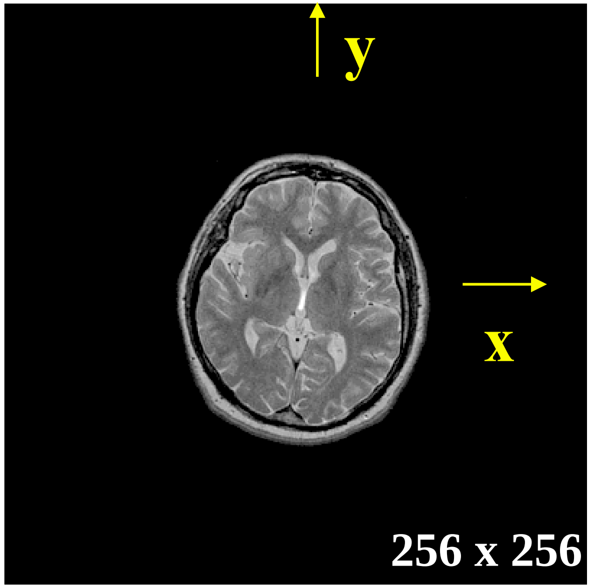


Slide courtesy of Elfar Adalsteinsson

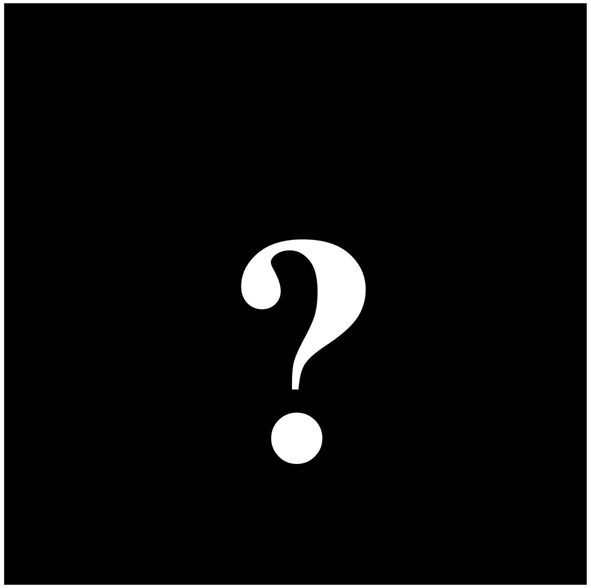


FT





FT



slido

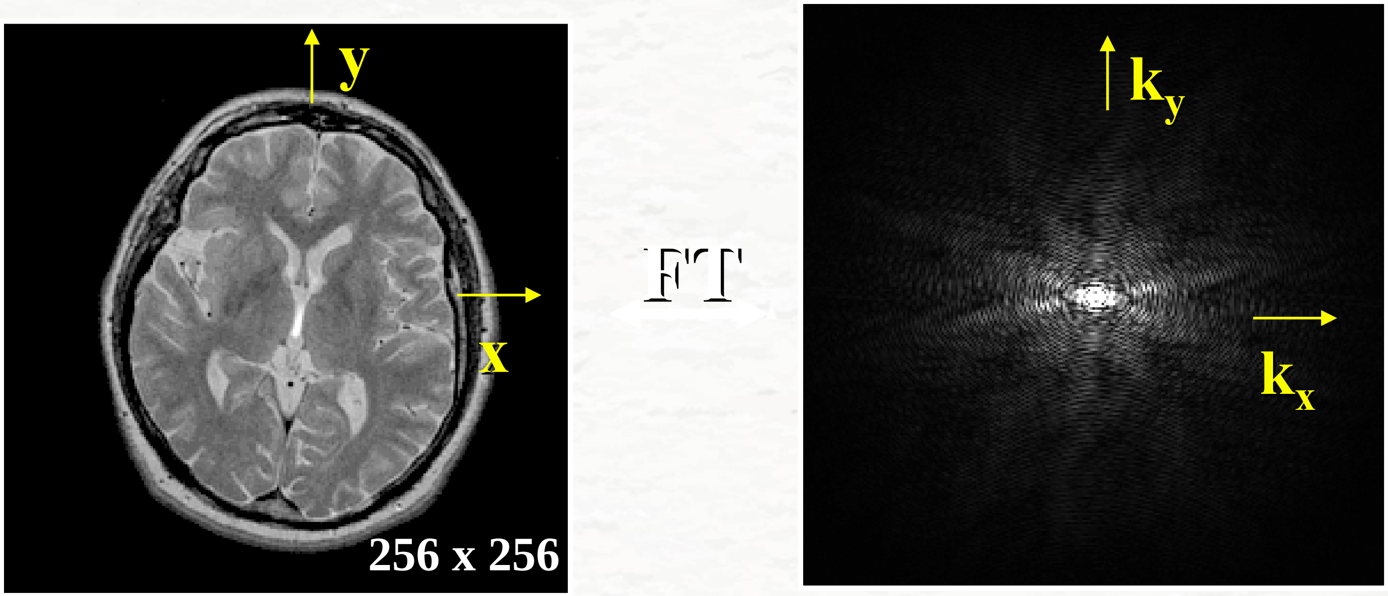
Slide courtesy of Elfar Adalsteinsson

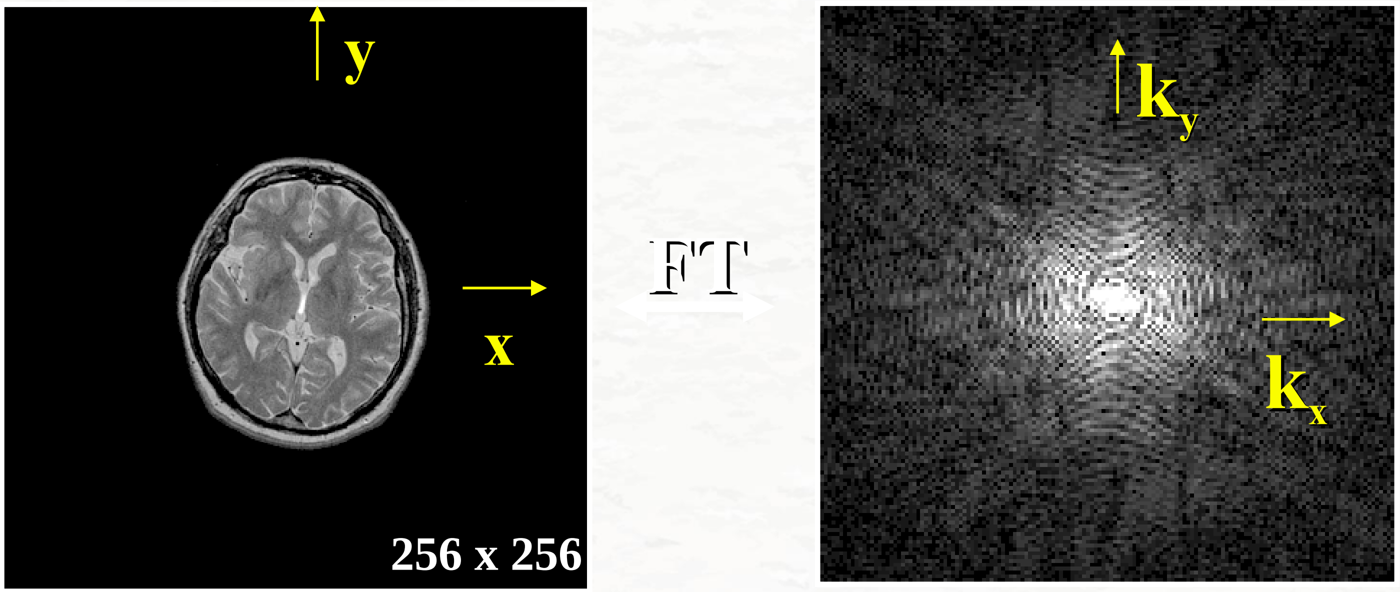
slido

Please download and install the Slido app on all computers you use

De quoi aura l'air la TF de l'image "zoomed-out" / sous échantillonnée ?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.





$\uparrow \Delta x$

$\downarrow \frac{fe}{2}$

$\downarrow f_{nyquist}$

Slide courtesy of Elfar Adalsteinsson

Extension 2D

Représentation fréquentielle

- Notion de fréquence : projection sur une « base fréquentielle »
- En 1D : une variable dans le domaine de départ et une variable fréquentielle
- En 2D: deux variables dans le domaine de départ $\Rightarrow$ deux variables fréquentielles.

Représentation fréquentielle

Hypothèses

- $f(x_1, x_2)$ de carré sommable (i.e., $\iint |f(x_1, x_2)|^2 \, dx_1 \, dx_2$ converge)
- Produit scalaire : $< f, g >= \iint f(x_1, x_2) g^*(x_1, x_2) dx_1 dx_2$
- « Base fréquentielle » : $\{e^{2i\pi(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)} \; ; \; (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2\}$

Transformée de Fourier 2D

Démarche intuitive par succession d'operations:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) \xrightarrow{\mathcal{F}_{\nu_1}} \overline{F}(\nu_1, x_2) &= \int f(x_1, x_2) e^{-2i\pi\nu_1 x_1} dx_1 \\
F(\nu_1, x_2) \xrightarrow{\mathcal{F}_{\nu_2}} F(\nu_1, \nu_2) &= \int F(\nu_1, x_2) e^{-2i\pi\nu_2 x_2} dx_2 \\
&= \iint f(x_1, x_2) e^{-2i\pi(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)} dx_1 dx_2
\end{aligned}
$$

Représentation fréquentielle

Transformée de Fourier 2D

- TF 2D : $F(\nu_1, \nu_2) = \iint f(x_1, x_2) e^{-2i\pi(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)} dx_1 dx_2$
- TFI 2D : $f(x_1, x_2) = \iint F(\nu_1, \nu_2) e^{2i\pi(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)} d\nu_1 d\nu_2$

Propriétés importantes

- Ordre d'intégration indifférent (théorème de Fubini).
- Séparabilité : $e^{2i\pi(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)} = e^{2i\pi\nu_1 x_1} e^{2i\pi\nu_2 x_2}$

Fonctions périodiques

Il faut préciser la variable par rapport à laquelle *f* est périodique

- *f* périodique par rapport à x_1 et x_2, aux périodes T_1 et T_2.
- Décomposition de *f* : $$f(x_1, x_2) = \sum_{k_1,k_2} a_{k_1 k_2} e^{2i\pi\left(\frac{k_1 x_1}{T_1} + \frac{k_2 x_2}{T_2}\right)}$$

avec $$a_{k_1 k_2} = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{I_1} \int_{I_2} f(x_1, x_2) e^{-2i\pi\left(\frac{k_1 x_1}{T_1} + \frac{k_2 x_2}{T_2}\right)} dx_1 dx_2$$

- TF 2D : $$F(\nu_1, \nu_2) = \sum_{k_1,k_2} a_{k_1 k_2} \delta\left(\nu_1 - \frac{k_1}{T_1}\right) \delta\left(\nu_2 - \frac{k_2}{T_2}\right)$$

Impulsions disposées régulièrement sur une grille cartésienne, à des intervalles de $\frac{1}{T_1}$ dans la direction ν_1, et $\frac{1}{T_2}$ dans la direction ν_2

Propriété supplémentaire de la TF 2D

Rotation

- Image $f(x_1, x_2) \longleftrightarrow F(v_1, v_2)$
- $g(x_1, x_2) = f[\mathcal{R}_{-\theta}(x_1, x_2)]$; $\mathcal{R}_{-\theta}$: rotation d'angle $-\theta$
- Image tournée de $-\theta$: $g(x_1, x_2) \longleftrightarrow G(v_1, v_2)$
- On montre que $G(\nu_1, \nu_2) = F[\mathcal{R}_{-\theta}(\nu_1, \nu_2)]$
- Principe de la démonstration : changement de variable dans l'intégrale double de Fourier

Illustration

Voir démonstration **demo_rotTF**

Plan

1. **Cadre 1D**
   - Révision
   - Séries de Fourier : interprétation géométrique
   - Extension : approche géométrique de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Transformée de Fourier à temps discret et transformée de Fourier discrète

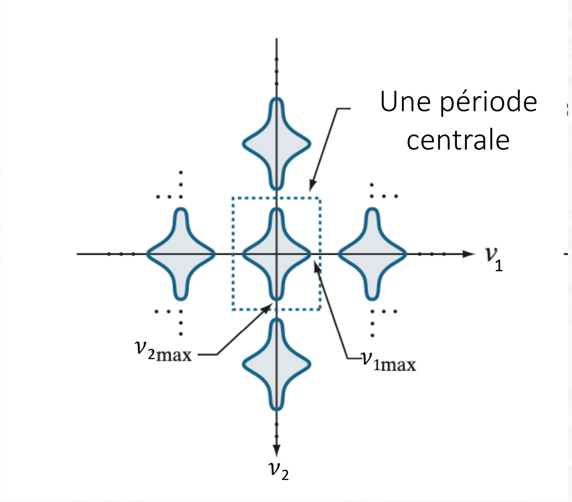
2. **Cadre 2D**
   - Extension 2D de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Aspects practiques

TF 2D de signaux échantillonnés

Extension directe des résultats 1D

- $f_e(x_1, x_2)$ échantillonné $(T_{e1}, T_{e2}) \Rightarrow F_e(v_1, v_2)$ périodique $(1/T_{e1}, 1/T_{e2})$

- $F_e(v_1, v_2)$ obtenu par périodisation de $F(v_1, v_2)$
  - période $1/T_{e1}$ dans la direction v_1
  - période $1/T_{e2}$ dans la direction v_2



Théorème d'échantillonnage (1)

Échantillonnage sans perte d'information

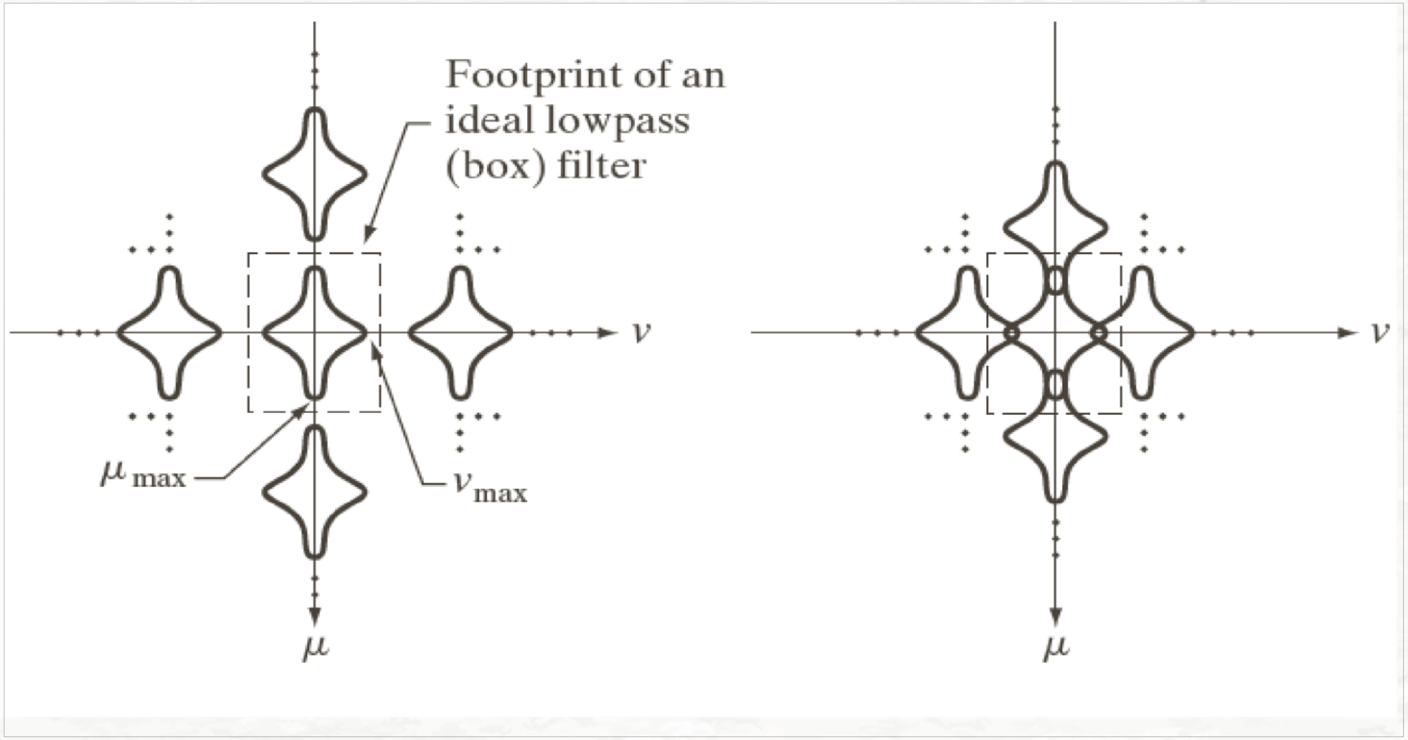
- Principe : éviter le recouvrement spectral
- Condition suffisante : si $F\,(v_1\,, v_2)$ à bande limitée ($[-B_1, B_1], [-B_2, B_2]$)

  Échantillonnage sans perte si les périodes d'échantillonnage T_{e_1} et T_{e_2} selon x_1 et x_2 vérifient respectivement

$$\left.\begin{array}{lcl} \frac{1}{T_{e_1}} = \nu_{e_1} & > & 2B_1 \\ \frac{1}{T_{e_2}} = \nu_{e_2} & > & 2B_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} T_{e_1} & < & \frac{1}{2B_1} \\ T_{e_2} & < & \frac{1}{2B_2} \end{array}\right.$$

Théorème d'échantillonnage (2)

Illustration



Exemple

Voir démonstrations demo_alias

Question

Considérons une image en damier dans laquelle chaque carré mesure 1 x 1 mm. En supposant que l'image s'étende à l'infini dans les deux directions de coordonnées, quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale (en échantillons/mm) requise pour éviter le repliement ?

slido

slido

Please download and
install the Slido app on
all computers you use

Considérons une image (infinie) en damier dans laquelle chaque carré mesure 1 x 1 mm. Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale (en échantillons/mm) requise pour éviter le repliement ?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

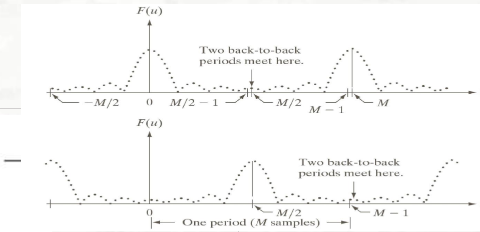
Plan

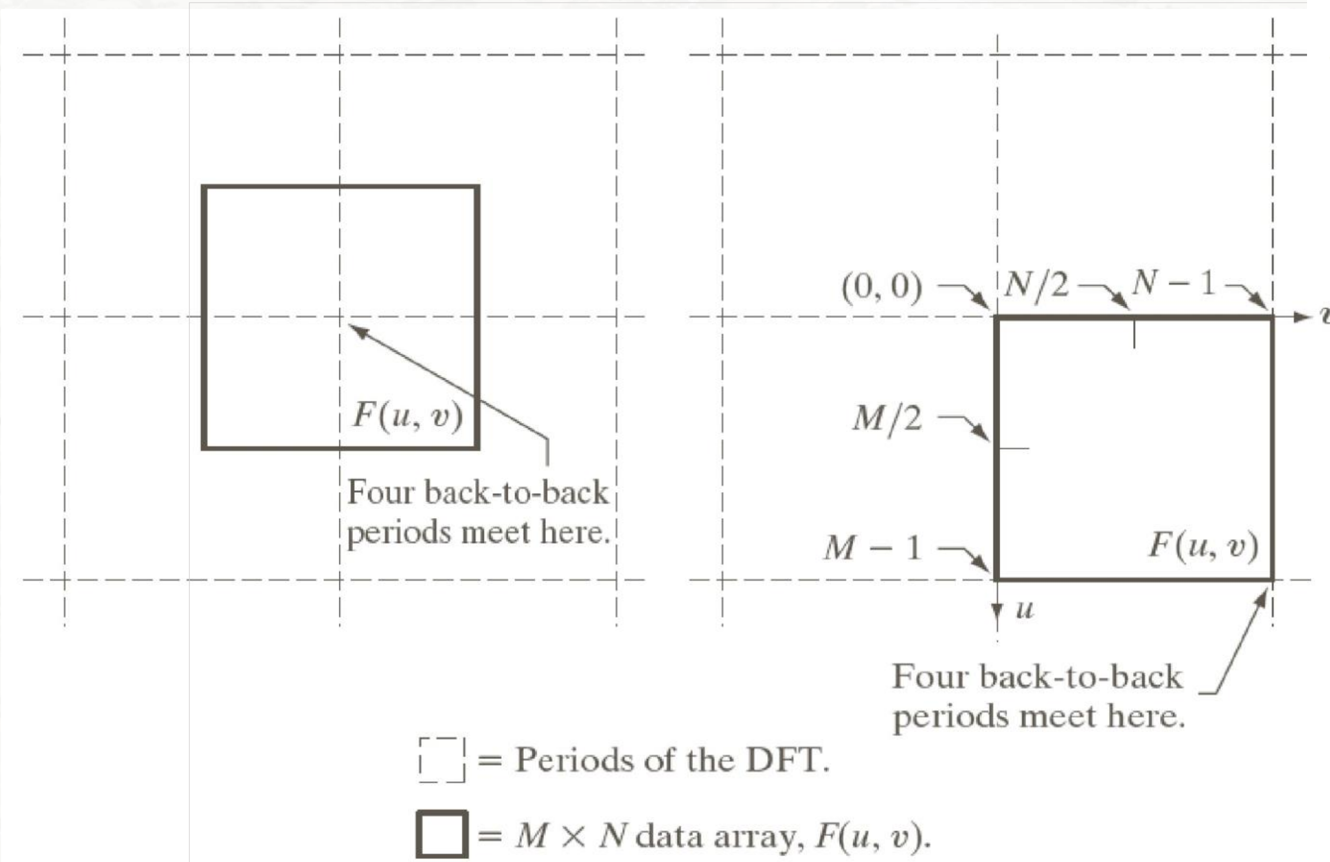
1. Cadre 1D
   - Révision
   - Séries de Fourier : interprétation géométrique
   - Extension : approche géométrique de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Transformée de Fourier à temps discret et transformée de Fourier discrète

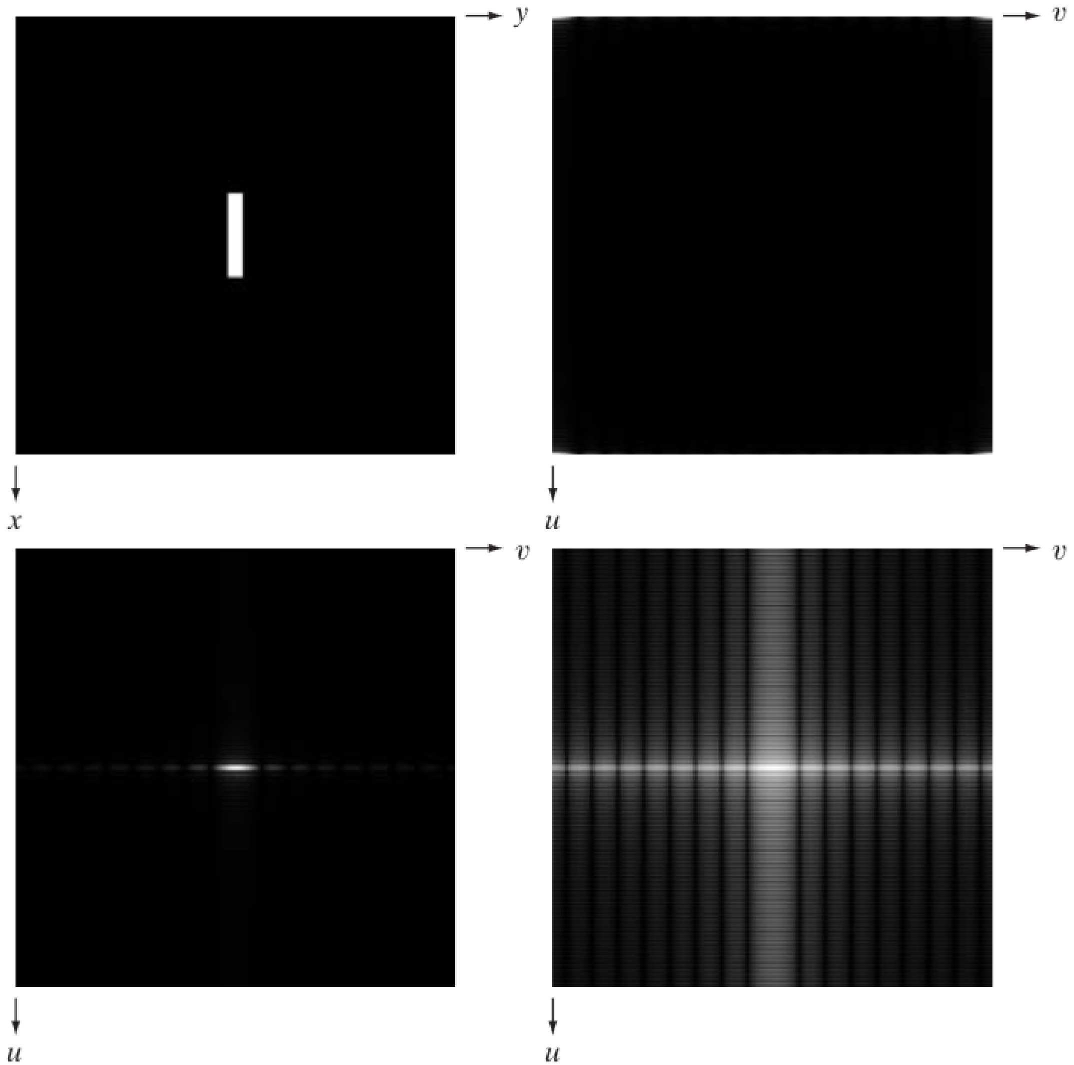
2. Cadre 2D
   - Extension 2D de la transformée de Fourier
   - Échantillonnage
   - Aspects pratiques

Représentation fréquentielle, TF discrète et problèmes pratiques

Indexation de la TFD







a b
c d

FIGURE 4.24
(a) Image.
(b) Spectrum showing bright spots in the four corners.
(c) Centered spectrum. (d) Result showing increased detail after a log transformation. The zero crossings of the spectrum are closer in the vertical direction because the rectangle in (a) is longer in that direction. The coordinate convention used throughout the book places the origin of the spatial and frequency domains at the top left.

👉 demo_shift