MTH1102 - Exercices de la semaine 13

Applications du théorème de flux-divergence

1. Démontrez les identités suivantes. Vous pouvez supposer que toutes les hypothèses du théorème de flux-divergence sont satisfaites. La surface S est fermée et E est la région bornée par S.

   (a) Si $\vec{a}$ est un champ vectoriel constant alors $\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = 0$.

   (b) $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$.

   (c) $\operatorname{vol}(E) = \frac{1}{3} \iint_S \left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \right) \cdot d\vec{S}$.

2. Soit B un solide borné par une surface S et dont la densité est proportionnelle au carré de la distance au plan $z = 0$. On suppose que le solide est entièrement situé au-dessus du plan des (x, y).

   (a) ontrez que la masse de B peut être calculée à l'aide de la formule

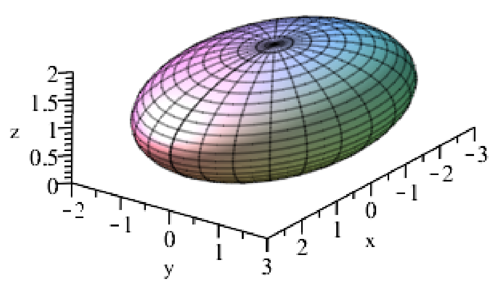
   $$m = \frac{k}{3} \oiint_S z^3\, \vec{k} \cdot d\vec{S},$$

   où k est une constante de proportionnalité.

   (b) Utilisez la formule trouvée en a) pour calculer la masse du solide délimité par l'ellipsoïde paramétré par

   $$\vec{R}(u, v) = [3 \sin(u) \cos(v)]\, \vec{i} + [2 \sin(u) \sin(v)]\, \vec{j} + [1 + \cos(u)]\, \vec{k}, \quad 0 \leq u \leq \pi,\ 0 \leq v \leq 2\pi$$

   si ce solide a une densité proportionnelle au carré de la distance au plan $z = 0$. Le solide B est représenté ci-dessous.



3. *Pour cet exercice, vous pouvez utiliser un logiciel pour évaluer les intégrales.*

   Soit B un solide de densité constante δ et de masse m, délimité par une surface S.

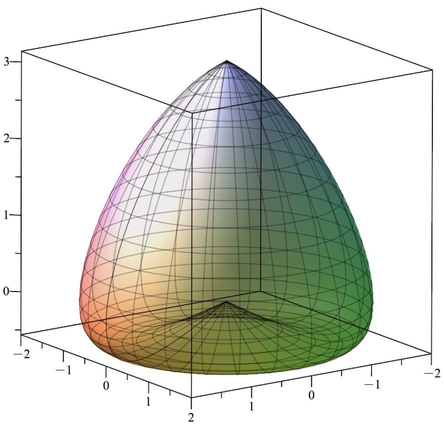
   (a) Montrez que le centre de masse de B est donné par les formules suivantes :

   $$\bar{x} = \frac{\delta}{2m} \oiint_S x^2\, \vec{i} \cdot d\vec{S}, \quad \bar{y} = \frac{\delta}{2m} \oiint_S y^2\, \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad \bar{z} = \frac{\delta}{2m} \oiint_S z^2\, \vec{k} \cdot d\vec{S}.$$

   (b) Utilisez les formules en a) pour déterminer le centre de masse du solide B délimité par la surface S paramétrée par

   $$\vec{R}(u, v) = 2 \sin(u) \cos(v)\vec{i} + 2 \sin(u) \sin(v)\vec{j} - u \cos(u)\vec{k}, \quad 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi.$$

   Supposez que $\delta = 1$ et utilisez $m = 8\pi^2/3$. Le centre de masse est-il situé à l'intérieur de B ?
   La surface S est représentée ci-dessous.



4. Montrez que le flux à travers une surface fermée d'un champ vectoriel de la forme

$$\vec{F}(x,y,z) = [ax + A(y,z)]\,\vec{i} + [by + B(x,z)]\,\vec{j} + [cz + C(x,y)]\,\vec{k},$$

   où a, b, c sont des constantes et A, B, C des fonctions, est proportionnel au volume de la région à l'intérieur de la surface.

5. Exercice 10.5.39 du livre.
6. Exercice 10.5.42 du livre. *Utilisez le résultat de l'exercice précédent.*
7. Exercice 10.5.41 du livre.

Exercices supplémentaires

À faire au besoin.

Section 10.5 nos. 23, 37.