Théorème de Stokes et Théorème de flux-divergence

Flore Caye
D'aprés les documents de cours de Jean Guérin

MTH1102

Polytechnique Montréal

19 Novembre 2024

Théorème de Stokes

Soit S une surface orientable et C son bord. L'orientation de S détermine le sens positif de C comme suit :

C est orientée positivement si la surface S est toujours à gauche lorsqu'on parcourt la courbe, la verticale (la "direction de notre tête") étant donnée par le vecteur normal à S en chaque point.

Théorème de Stokes

Soit S une surface orientable et C son bord. L'orientation de S détermine le sens positif de C comme suit :

C est orientée positivement si la surface S est toujours à gauche lorsqu'on parcourt la courbe, la verticale (la "direction de notre tête") étant donnée par le vecteur normal à S en chaque point.

Théorème de Stokes

Soit S une surface orientée lisse par morceaux dont le bord C est orienté positivement. Soit aussi F un champ vectoriel dont les composantes ont des dérivées partielles continues dans un voisinage de S.
Alors

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{R} = \iint_S \operatorname{rot} \mathrm{F} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Interprétation du rotationnel

Soit :

- C : une courbe fermée, orientée
- $\boldsymbol{v}$: un champs vectoriel représentant la vitesse d'un fluide en mouvement
- $\boldsymbol{T}$ le vecteur tangent unitaire à $\boldsymbol{v}$.

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{R}'(t)}{\|\boldsymbol{R}'(t)\|}$$

- P_0 : un point sur la surface (dans le fluide)
- S_a : le disque sur la surface S de centre P_0 et de rayon a, avec a très petit
- C_a : la courbe qui limite le cercle S_a sur la surface S

Interprétation du rotationnel (Suite)

$$\begin{aligned}
\oint_{C_a} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{R} &= \iint_{S_a} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \iint_{S_a} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}(P_0) \cdot \boldsymbol{n}(P_0) dS \\
&= \operatorname{rot} \boldsymbol{v}(P_0) \cdot \boldsymbol{n}(P_0) \pi a^2
\end{aligned}$$

D'où :

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(P_0) \cdot \boldsymbol{n}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \oint_{c_a} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{R}$$

Exemple

Exemple 10.4.4

Soit S l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, orienté vers le haut et

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xy + e^{xz})\boldsymbol{i} + (xz + e^{yz})\boldsymbol{j} + e^{z^2}\boldsymbol{k}$$

Calculons l'intégrale

$$\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Formes vectorielles du théorème de Green

La formule donnée par le théorème de Green peut s'écrire, de façon équivalente, sous les formes vectorielles suivantes.

Théorème

1. Première forme :

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{dr} = \iint_D (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} \, dA$$

2. Deuxième forme :

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{n} \, ds = \iint_D \mathrm{div}\, \boldsymbol{F} \, dA,$$

où n est le vecteur normal unitaire de C pointant vers l'extérieur de la courbe.

Théorème de flux-divergence

Définition

On dit qu'une région E de l'espace est *simple* si c'est une région de type à la fois 1, 2 et 3.

Théorème de flux-divergence

Définition

On dit qu'une région E de l'espace est *simple* si c'est une région de type à la fois 1, 2 et 3.

Théorème de flux-divergence

Soit E une région simple de l'espace et S sa frontière, orientée positivement.

Soit $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ un champ vectoriel dont les composantes P, Q et R possèdent des dérivées partielles continues sur un voisinage de E.

Alors

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_E \operatorname{div}\boldsymbol{F}\, dV.$$

Exemples

Calculer le flux de $\boldsymbol{F}$ à travers la surface S.

8. $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + y^3)\vec{i} + (y^3 + z^3)\vec{j} + (z^3 + x^3)\vec{k}$, S est la sphère centrée à l'origine, de rayon 2.

18. Soit S la boîte ouverte (sans fond ni couvercle) dont les côtés sont définis par $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$ et $y = 3$, $0 \leq z \leq 4$. Les côtés sont orientés par les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $-\vec{i}$, $-\vec{j}$, respectivement. Utilisez le théorème de flux-divergence pour évaluer l'intégrale $\iint_S \vec{F} \bullet d\vec{S}$, où

$$\vec{F}(x, y, z) = \left[x^2 + \arctan\left(z(4 - z)\right)\right]\vec{i} + x(3 - x)z^3\vec{j} + z(z - 4)\vec{k}.$$