MTH1102 - Exercices de la semaine 12

Exercices de routine

Section 10.5 nos. 7, 11, 13.

Application du théorème de Stokes

1. Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j} + [\cos^2(t) - a\sin^2(t)]\,\vec{k},$$

$0 \le t \le 2\pi$, où a est une constante. Pour quelle(s) valeur(s) de a la circulation du champ défini par

$$\vec{F}(x,y,z) = [\sin(x^2) + z]\,\vec{i} + [\cos(y^2) - z]\,\vec{j} + axy\,\vec{k}$$

autour de C est-elle maximale ?

Indice : trouvez une surface délimitée par C.

2. Soit S la surface constituée des 5 faces du cube $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ qui ne sont pas contenues dans le plan $z = 1$. La surface S est orientée au point $(0,0,0)$ par le vecteu $\vec{n} = \vec{k}$.

   (a) Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel ayant des dérivées partielles continues dans $\mathbb{R}^3$ et Σ la sixième face du cube (celle dans le plan $z = 1$). Montrez que

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma \mathrm{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S},$$

   où C est le carré délimitant la face Σ, orienté dans le sens antihoraire.

   (b) Soit $\vec{F} = [\ln(4 + z^4) - yz]\,\vec{i} + [\ln(4 + z^4) + xz]\,\vec{j} + [4 + x^4 + y^4]\,\vec{k}$. Calculez

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

3. Soit C une courbe lisse par morceaux, fermée, simple et située dans un plan dont le vecteur normal unitaire est $\vec{n} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$, orienté de façon compatible avec l'orientation de C.

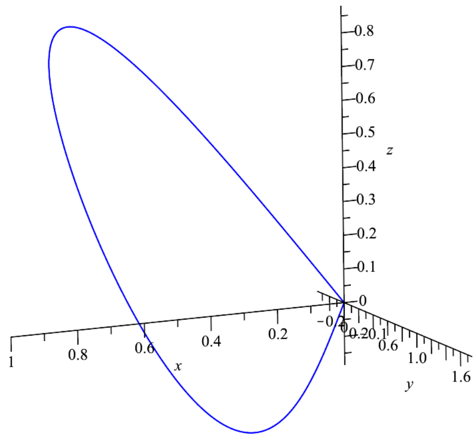
   (a) Montrez que l'aire de la région S du plan délimitée par C est égale à

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (bz - cy)\,dx + (cx - az)\,dy + (ay - bx)\,dz.$$

   (b) Soit C la courbe plane paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\,\vec{i} + [\cos(t) + \sin(2t)]\,\vec{j} + \frac{1}{2}[\cos(t) - \sin(2t)]\,\vec{k},$$

   avec $-\pi/2 \le t \le \pi/2$ et représentée ci-dessous.



Trouvez d'abord l'équation du plan contenant C puis calculez l'aire délimitée par C dans ce plan.

4. Exercice 10.4.30 du livre.

Théorème de flux-divergence

5. Soit E la région de l'espace à l'extérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ et S la frontière de E. Calculez le flux du champ vectoriel défini par

$$\vec{F}(x,y,z) = \left[x^3 + \exp(y^2/z)\right]\,\vec{\jmath} + \left[y^3 + \exp(x^2/z)\right]\,\vec{\jmath} + \left[z^2 + \exp(x^2y^2)\right]\,\vec{k}$$

à travers S.

6. Soit E le solide occupant la région de l'espace bornée par le paraboloïde $z = x^2 + y^2 - 3$ et le plan $z = 13$.
   (a) Calculez le volume de E.
   (b) Soit $\vec{F}$ le champ vectoriel défini par

   $$\vec{F}(x,y,z) = [4x + \sin(e^z)]\,\vec{\imath} + [-5y + \cos(e^z)]\,\vec{\jmath} + [7z + xy]\,\vec{k}$$

   et S la surface du solide E défini en a), orientée positivement. Calculez le flux de $\vec{F}$ à travers S.
   (c) Sachant que le flux vers le haut à travers la portion plane de S est $\Phi_{\text{plan}} = 416\pi$, calculez le flux vers le haut à travers la partie parabolique de S.

7. Soit S la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ située au-dessus du plan $z = 0$, orientée au point $(0,0,2)$ par le vecteur normal unitaire $\vec{n} = \vec{k}$. Notez que S n'est pas une surface fermée. Soit aussi $\vec{F}$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{F}(x,y,z) = [x^3 + \exp(\sqrt{y^2+z^2})]\,\vec{\imath} + [y^3 + \exp(\sqrt{x^2+z^2})]\,\vec{\jmath} + [z^3 + \exp(\sqrt{x^2+y^2})]\,\vec{k}.$$

Calculez le flux de $\vec{F}$ à travers S.

8. Soit S une surface fermée lisse par morceaux et $\vec{F}$ un champ vectoriel constant. Que pouvez-vous dire à propos du flux de $\vec{F}$ à travers S ?

Exercices supplémentaires

À faire au besoin.

Section 10.4 nos. 23, 25.

Section 10.5 nos. 17, 25.