Rotationnel,divergence et Théorème de Stokes

Flore Caye

D'aprés les documents de cours de Jean Guérin

MTH1102

Polytechnique Montréal

12 Novembre 2024

Le rotationnel

Définition

Soit $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ un champ vectoriel. Si les dérivées partielles premières de P, Q et R existent, on définit le **rotationnel** de $\boldsymbol{F}$ par

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \boldsymbol{k}.$$

Le rotationnel de $\boldsymbol{F}$ est un champ de vecteurs.

Le rotationnel (2)

Notation

Soit l'opérateur

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

On note symboliquement

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Le rotationnel (3)

Interprétation du rotationnel

Si $\boldsymbol{F}$ est le champ de vitesses d'un fluide en mouvement alors en un point où le rotationnel est non nul, le fluide a tendance a tourner autour d'un axe ayant la direction de $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ en ce point, et la norme du vecteur rotationnel est une mesure de la vitesse de rotation.

Si $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ alors on dit que $\boldsymbol{F}$ est **irrotationnel**.

Exemple

10.3.2

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^3yz^2\boldsymbol{j} + y^4z^3\boldsymbol{k}$$

Le rotationnel (4)

Théorème

Soit $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ un champ vectoriel dont les composantes P, Q et R ont des dérivées partielles continues sur un domaine simplement connexe D.

Alors $\boldsymbol{F}$ est conservatif sur D si et seulement si $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = 0$.

Preuve partielle :

$$\boldsymbol{F} \text{ conservatif } \Rightarrow \operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) = \vec{0}$$

Exemples

10.3.18,16

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = e^x \sin(yz)\boldsymbol{i} + ze^x\cos(yz)\boldsymbol{j} + ye^x\cos(yz)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \boldsymbol{i} + \sin(z)\boldsymbol{j} + y\cos(z)\boldsymbol{k}$$

La divergence

Définition

Soit $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ un champ vectoriel. Si les dérivées partielles premières de P, Q et R existent, on définit la **divergence** de $\boldsymbol{F}$ par

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

La divergence de $\boldsymbol{F}$ est un scalaire.

Notation : On note symboliquement

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}.$$

Exemple

10.3.2

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^3yz^2\boldsymbol{j} + y^4z^3\boldsymbol{k}$$

La divergence (2)

Interprétation de la divergence

Si $\boldsymbol{F}$ est le champ de vitesses d'un fluide en mouvement alors la divergence en un point donné mesure la tendance à s'éloigner du point (si elle est positive) ou à s'en approcher (si la divergence est négative).

Si $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$ alors on dit que $\boldsymbol{F}$ est **incompressible**.

La divergence (3)

Théorème

Si $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$, où P, Q et R ont des dérivées partielles continues alors

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0.$$

Preuve

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\boldsymbol{F})) = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F})$$

Exemple

12. Soit un champ scalaire f et un champ vectoriel $\vec{F}$. Déterminez si chacune des expressions suivantes a un sens. Si elle n'en a pas, expliquez pourquoi ; dans le cas contraire, déterminez s'il s'agit d'un champ scalaire ou d'un champ vectoriel.

a) $\operatorname{rot} f$

b) $\operatorname{grad} f$

c) $\operatorname{div} \vec{F}$

d) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$

e) $\operatorname{grad} \vec{F}$

f) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F})$

g) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$

h) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} f)$

i) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F})$

j) $\operatorname{div}(\operatorname{div} \vec{F})$

k) $(\operatorname{grad} f) \times (\operatorname{div} \vec{F})$

l) $\operatorname{div}\big(\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)\big)$

Formes vectorielles du théorème de Green

La formule donnée par le théorème de Green peut s'écrire, de façon équivalente, sous les formes vectorielles suivantes.

Théorème

1. Première forme :

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = \iint_D (\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} \, dA$$

2. Deuxième forme :

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, dA,$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur normal unitaire de C pointant vers l'extérieur de la courbe.

Surfaces orientables : la suite 10.4

Soit S une surface orientable et C son bord. L'orientation de S détermine le sens positif de C comme suit :

C est orientée positivement si la surface S est toujours à gauche lorsqu'on parcourt la courbe, la verticale (la "direction de notre tête") étant donnée par le vecteur normal à S en chaque point.

Soit S une surface orientable et C son bord. L'orientation de S détermine le sens positif de C comme suit :

C est orientée positivement si la surface S est toujours à gauche lorsqu'on parcourt la courbe, la verticale (la "direction de notre tête") étant donnée par le vecteur normal à S en chaque point.

Théorème de Stokes

Soit S une surface orientée lisse par morceaux dont le bord C est orienté positivement. Soit aussi $\boldsymbol{F}$ un champ vectoriel dont les composantes ont des dérivées partielles continues dans un voisinage de S.
Alors

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

8. $\vec{F}(x,y,z)=\vec{i}+(x+yz)\vec{j}+\left(xy-\sqrt{z}\right)\vec{k}$, C est la frontière de la partie du plan $3x+2y+z=1$ située dans le premier octant.

12. $\vec{F}(x,y,z)=-(x+z)\vec{i}+y^2\vec{j}+(y+z^2)\vec{k}$, C est la courbe d'intersection du paraboloïde $z=x^2+y^2$ avec le plan $z=1-2y$, orientée dans le sens horaire lorsqu'on la regarde du dessus.