Intégrales de surface

Flore Caye
D'aprés les documents de cours de Jean Guérin

MTH1102

Polytechnique Montréal

5 Novembre 2024

Intégrale de surface

Définition

Soit S la surface paramétrée par la fonction vectorielle $\mathrm{R}(u, v)$, avec $(u, v) \in D$ et f une fonction de trois variables définie dans un voisinage de S. L'intégrale de f sur S est définie par

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathrm{R}(u, v))\, ||\, \mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v \,||\, dA.$$

Intégrale de surface

Définition

Soit S la surface paramétrée par la fonction vectorielle $\mathrm{R}(u,v)$, avec $(u,v) \in D$ et f une fonction de trois variables définie dans un voisinage de S. L'intégrale de f sur S est définie par

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_D f(\mathrm{R}(u,v))\,||\,\mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v\,||\,dA.$$

Théorème

Les propriétés habituelles des intégrales s'appliquent aux intégrales de surface.

Surfaces orientées

- Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** (ou **orthogonal**)à la surface S en un point si $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan tangent à S en ce point.

Surfaces orientées

- Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** (ou **orthogonal**)à la surface S en un point si $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan tangent à S en ce point.
- Si S admet un plan tangent en un point alors il existe deux vecteurs unitaires normaux à S en ce point.

Surfaces orientées

- Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** (ou **orthogonal**)à la surface S en un point si $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan tangent à S en ce point.
- Si S admet un plan tangent en un point alors il existe deux vecteurs unitaires normaux à S en ce point.
- Si S est paramétrée par la fonction vectorielle $\mathrm{R}(u, v)$ alors

$$\vec{n} = \frac{\mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v}{||\,\mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v\,||}$$

est un vecteur unitaire normal à S (s'il est non nul).

Surfaces orientées

- Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** (ou **orthogonal**)à la surface S en un point si $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan tangent à S en ce point.
- Si S admet un plan tangent en un point alors il existe deux vecteurs unitaires normaux à S en ce point.
- Si S est paramétrée par la fonction vectorielle $\mathrm{R}(u, v)$ alors

$$\vec{n} = \frac{\mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v}{|| \mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v ||}$$

  est un vecteur unitaire normal à S (s'il est non nul).
- Une surface S paramétrée par la fonction vectorielle $\mathrm{R}(u, v)$ est **lisse** si $\mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v$ existe et est non nul en tout point de S.

  Ceci signifie que S admet un vecteur normal en chaque point.

  Ceci est aussi équivalent à dire que S admet un plan tangent en chaque point.

Surfaces orientées

- Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** (ou **orthogonal**)à la surface S en un point si $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan tangent à S en ce point.
- Si S admet un plan tangent en un point alors il existe deux vecteurs unitaires normaux à S en ce point.
- Si S est paramétrée par la fonction vectorielle $\mathrm{R}(u,v)$ alors

$$\vec{n} = \frac{\mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v}{||\,\mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v\,||}$$

  est un vecteur unitaire normal à S (s'il est non nul).
- Une surface S paramétrée par la fonction vectorielle $\mathrm{R}(u,v)$ est **lisse** si $\mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v$ existe et est non nul en tout point de S.

  Ceci signifie que S admet un vecteur normal en chaque point.

  Ceci est aussi équivalent à dire que S admet un plan tangent en chaque point.
- Une surface est **lisse par morceaux** si elle est constituée d'un nombre fini de surfaces lisses.

Surfaces orientées (2)

Définition

- Une surface paramétrée S est **orientable** s'il est possible de choisir un vecteur unitaire normal $\vec{n}$ en chaque point de S de telle sorte que $\vec{n}$ varie de façon continue.
- Une surface orientable est **orientée** par le choix d'un vecteur unitaire normal en chaque point.

Surfaces orientées (2)

Définition

- Une surface paramétrée S est **orientable** s'il est possible de choisir un vecteur unitaire normal $\vec{n}$ en chaque point de S de telle sorte que $\vec{n}$ varie de façon continue.
- Une surface orientable est **orientée** par le choix d'un vecteur unitaire normal en chaque point.

Définition

Une surface S est **fermée** si elle est la frontière d'une région de l'espace.

Surfaces orientées (2)

Définition

- Une surface paramétrée S est **orientable** s'il est possible de choisir un vecteur unitaire normal $\vec{n}$ en chaque point de S de telle sorte que $\vec{n}$ varie de façon continue.
- Une surface orientable est **orientée** par le choix d'un vecteur unitaire normal en chaque point.

Définition

Une surface S est **fermée** si elle est la frontière d'une région de l'espace.

Définition

L'**orientation positive** d'une surface fermée S correspond au choix d'un vecteur normal pointant toujours vers l'extérieur de S.

Intégrale d'un champ sur une surface

Définition

Soit F un champ vectoriel défini dans le voisinage d'une surface S. Alors l'intégrale de F sur S est

$$\iint_S \mathsf{F} \cdot d\mathsf{S} := \iint_S \mathsf{F} \cdot \vec{\mathsf{n}} \; dS$$

où $\vec{\mathsf{n}}$ est le vecteur normal unitaire de S.

Intégrale d'un champ sur une surface

Définition

Soit F un champ vectoriel défini dans le voisinage d'une surface S. Alors l'intégrale de F sur S est

$$\iint_S \mathrm{F} \cdot d\mathrm{S} := \iint_S \mathrm{F} \cdot \vec{\mathrm{n}} \;\; dS$$

où $\vec{\mathrm{n}}$ est le vecteur normal unitaire de S.

Théorème (Formule de calcul)

Si S est paramétrée par $\mathrm{R}(u, v)$ avec $(u, v) \in D$ alors

$$\iint_S \mathrm{F} \cdot \mathrm{dS} = \iint_D F(\mathrm{R}(u, v)) \cdot (\mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v)\, dA.$$

22. $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$, S est l'hélicoïde de l'exercice 7, orienté vers le haut.

$$\vec{R}(u, v) = ucos(v)\vec{i} + usin(v)\vec{j} + v\vec{k}, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi$$

32. $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + (z - y)\vec{j} + x\vec{k}$, S est la surface du tétraèdre de sommets (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1).

(Si le temps le permet :)

30. $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + 5\vec{k}$, S est la frontière de la région bornée par le cylindre $x^2 + z^2 = 1$ et les plans $y = 0$ et $x + y = 2$.

Définition

On peut utiliser les surfaces paramétrées pour calculer la masse d'une plaque mince et son centre de masse en utilisant les formules suivantes :

$$m = \iint\limits_S \rho(x, y, z)dS$$

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iint\limits_S x\rho(x, y, z)dS$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\iint\limits_S y\rho(x, y, z)dS$$

$$\overline{z} = \frac{1}{m}\iint\limits_S z\rho(x, y, z)dS$$

Applications d'intégrales de surfaces (2)

Définition

On peut utiliser les surfaces paramétrées pour calculer le moment d'inertie par rapport à un axe :

$$I = \iint_S d(x, y, z)^2 \rho(x, y, z) dS$$

Où $d(x, y, z)$ est la distance d'un point (x, y, z) à l'axe considéré.

42. Soit S, la partie de la sphère $x^2+y^2+z^2=25$ située au-dessus du plan $z=4$. Si la densité de S est une constante k, trouvez : a) le centre de masse et b) le moment d'inertie par rapport à l'axe des z.

Applications d'intégrales de surfaces (3)

Définition

On peut utiliser les surfaces paramétrées pour calculer le **flux** (masse par unité de temps) d'un fluide à travers une surface S. On considère un fluide de densité $\rho(x, y, z)$, avec un champs de vitesse $\vec{v}(x, y, z)$ qui représente son écoulement à travers S. Le flux est donc $\rho\vec{v}$. Ainsi, le flux à travers la surface est donné par :

$$\iint\limits_S \rho\vec{v} \cdot \vec{n}dS$$

44. De l'eau de mer d'une densité de $1025\,\mathrm{kg/m^3}$ s'écoule selon un champ de vitesses $\vec{v} = y\vec{i} + x\vec{j}$, où x, y et z sont exprimées en mètres et les composantes de $\vec{v}$, en mètres par seconde. Trouvez le flux vers l'extérieur à travers l'hémisphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$.

Applications d'intégrales de surfaces (4)

Flux particuliers

- **Flux thermique** : Soit $T(x, y, z)$, la température en tout point. L'écoulement thermique est le champ :

$$\vec{F} = -K\nabla T$$

  Où K est la **conductivité** de la substance.

- **Flux électrique** : Selon la loi de Gauss, la charge nette à l'intérieur d'une surface fermée est :

$$Q = \epsilon_0 \iint\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

  Où $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} C^2/N.m^2$ est la **permittivité** du vide et $\vec{E}$, un champ électrique.

Exemple

48. La température en un point d'une boule de conductivité K est inversement proportionnelle à la distance au centre de la boule. Trouvez le flux thermique à travers une sphère S de rayon a et centrée au centre de la boule.

45. Utilisez la loi de Gauss pour trouver la charge contenue dans l'hémisphère solide $x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\ z \geq 0$, sachant que le champ électrique est

$$\vec{E}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}.$$