MTH1102 - Exercices de la semaine 11

Exercices de routine

Section 10.3 nos. 1, 3, 13.
Section 10.4 nos. 3, 9.

Rotationnel et divergence

1. Exercice 10.3.9 du livre.
2. Exercice 10.3.12 du livre.
3. Exercice 10.3.20 du livre.
4. Exercice 10.3.22 du livre.
5. Exercice 10.3.27 du livre.
6. Exercice 10.3.39 du livre.

Théorème de Stokes

7. Soit C la courbe d'intersection des cylindres paraboliques $z = x^2 + 1$ et $z = 5 - y^2$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus. Soit aussi le champ vectoriel $\vec{F}$ défini par
$$\vec{F}(x, y, z) = \left[z^2 + \sin(\pi x^3)\right] \vec{i} + \left[x^3 + \cos(\pi y^3)\right] \vec{j} + \left[z^3 + xz\right] \vec{k}.$$
   (a) Donnez une paramétrisation de la courbe C et montrez qu'elle est fermée.
   (b) Calculez la circulation du champ $\vec{F}$ autour de la courbe C (c'est-à-dire l'intégrale $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$).
8. Soit C la courbe d'intersection des paraboloïdes $z = x^2 + 2y^2$ et $z = 15 - 2x^2 - y^2$, orientée dans le sens antihoraire lorsque vue du dessus. Soit aussi le champ vectoriel $\vec{F}$ défini par
$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \vec{i} - \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \vec{j} + \frac{1}{z^4 + 1} \vec{k}.$$
   (a) Montrez que la courbe C est fermée.
   (b) Décrivez deux façons différentes de calculer l'intégrale $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$. Votre réponse doit être explicite et inclure les éléments importants de chacune des méthodes décrites.
   (c) Calculez la circulation mentionnée en b) avec la méthode de votre choix.
9. Exercice 10.4.24 du livre.
10. Soit S la partie du plan $z = ax + by$ délimitée par une courbe fermée simple C et $\vec{F}$ le champ vectoriel défini par
$$\vec{F}(x, y, z) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j} + \alpha z\,\vec{k}$$
    où a, b, α sont des constantes.

    Montrez que le travail de $\vec{F}$ autour de C est indépendant de la courbe C qu'il dépend seulement de l'aire délimitée par cette courbe et de l'angle entre le plan et l'axe des z.

    Rappels :
    - *L'angle entre un plan et un vecteur $\vec{v}$ donné est l'angle entre le vecteur normal au plan et $\vec{v}$.*
    - *L'angle θ entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini comme étant le plus petit des deux angles vérifiant l'équation*
$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||\ ||\vec{v}||}.$$

Exercices supplémentaires

À faire au besoin.

Section 10.3 nos. 11, 15, 21, 25.

Section 10.4 nos. 11, 19, 25, 29.