MTH1102 - Exercices de la semaine 10

Exercices de routine

Secton 10.2 nos. 23, 25, 29, 43.

Applications des intégrales de surface

Résumé des applications

- Aire :

$$A(S) = \iint_S dS.$$

- Masse d'une plaque mince de densité δ :

$$m = \iint_S \delta(x, y, z)\, dS.$$

- Premiers moments d'une plaque mince de densité δ :

$$M_{xy} = \iint_S z\delta(x, y, z)\, dS, \quad M_{xz} = \iint_S y\delta(x, y, z)\, dS, \quad M_{yz} = \iint_S x\delta(x, y, z)\, dS.$$

- Centre de masse d'une plaque mince de densité δ :

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

- Moment d'inertie d'une plaque mince de densité δ par rapport à un axe :

$$I = \iint_S d^2(x, y, z)\delta(x, y, z)\, dS,$$

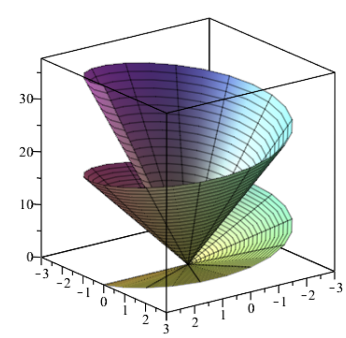
où $d(x, y, z)$ est la distance d'un point à l'axe.

Exercices

1. On considère une plaque mince ayant la forme de la surface S paramétrée par

$$\vec{R}(u, v) = v\cos(u)\vec{i} + v\sin(u)\vec{j} + uv\vec{k}$$

avec $0 \leq u \leq 4\pi$ et $0 \leq v \leq 3$ (illustrée ci-dessous). La plaque mince est constituée d'un matériau de densité variable, qui est proportionnelle au carré de la distance à l'axe central, c'est-à-dire l'axe des z. Calculez la masse de la plaque.



2. Soit S la partie du paraboloïde d'équation $z = 2x^2 + 2y^2$ située en dessous du plan $z = 6$. Une plaque mince a été courbée de façon à prendre la forme de la surface S. La densité de cette plaque est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$. Déterminez les coordonnées du centre de masse de la plaque. Justifiez soigneusement votre réponse.

3. Soit S l'hélicoïde paramétré par

$$\vec{R}(u,v) = u\cos(v)\,\vec{i} + u\sin(v)\,\vec{j} + av\,\vec{k}, \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,4\pi],$$

   où a est une constante positive. Une plaque mince de densité constante a la forme de la surface S. Pour quelles valeurs de a le centre de masse est-il situé au-dessus du plan $z = 1$?

   Indice : le calcul direct n'est pas la meilleure façon de résoudre ce problème.

4. Quelle est la distance moyenne des points de la surface S à l'origine, où S est le cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$?

5. Une plaque mince de densité constante a été courbée de façon à prendre la forme de la S surface paramétrée par

$$\vec{R}(u,v) = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + uv\,\vec{k}, \quad (u,v) \in D = [-1,1] \times [-1,1].$$

   Est-il plus facile de faire tourner la plaque autour de l'axe des z ou autour de l'axe des y ?

   Indice : un calcul direct n'est pas la meilleure façon de répondre à cette question.

Intégrales de surface d'un champ vectoriel

6. Soit $\vec{F}$ le champ défini par $\vec{F}(x,y,z) = xy\sin(x^2-4)\,\vec{i} + x^2y\,\vec{j} + y\ln(z^2+1)\,\vec{k}$ et S la surface du cube $[0,2] \times [0,2] \times [0,2]$. Évaluez l'intégrale

$$J = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

7. Soit S la surface fermée formant la frontière de la région bornée par le paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ et le plan $z = 0$. Calculez le flux du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + (2+z^2)\vec{k}$ à travers S.

8. Soit H la partie de l'hyperboloïde d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ située entre les plans $z = -2$ et $z = 2$. L'aire de S est égale à $\pi(\sqrt{2}\ln(2\sqrt{2}+3) + 12)$.

   (a) Montrez que H peut être paramétrée par

$$\vec{R}(u,v) = \sqrt{1+v^2}\,\cos(u)\,\vec{i} + \sqrt{1+v^2}\,\sin(u)\,\vec{j} + v\,\vec{k}$$

   avec $0 \leq u \leq 2\pi$ et $-2 \leq v \leq 2$.

   (b) Si la surface H est orientée au point $(1,0,0)$ par le vecteur normal $\vec{n} = \vec{i}$, calculez le flux du champ vectoriel $\vec{F}$ défini par

$$\vec{F}(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + z^3\vec{k}$$

   à travers H.

   (c) Si $\vec{G}$ est un champ vectoriel de norme constante et perpendiculaire à la surface H en tout point, que vaut le flux de $\vec{G}$ à travers H ?

   (d) Si $\vec{\Psi}$ est un champ vectoriel tangent à H en chaque point, que vaut le flux de $\vec{\Psi}$ à travers H ?

9. Exercice 10.2.48. Pour une définition du flux thermique, voir la page 448 du livre.

   Indice : un calcul explicite avec la formule 10.2.9 du livre n'est pas la meilleure façon de résoudre ce problème. Utilisez plutôt la définition du flux d'un champ à trvers une surface.

10. Soit S la surface paramétrée par

$$\vec{R}(u,v) = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + a(u+v)\,\vec{k}, \quad 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1,$$

où a est un paramètre, et $\vec{F}$ le champ vectoriel défini par

$$\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + (1-z^2)\,\vec{k}.$$

La surface S est orientée « vers le haut ».

(a) Trouvez l'équation cartésienne de S. De quel type de surface s'agit-il ?

(b) Pour quelle valeur du paramètre a le flux de $\vec{F}$ à travers S est-il maximal ?

Exercices supplémentaires

À faire au besoin.

Section 10.2 nos. 29, 31, 41, 45.