Surfaces paramétrées et intégrales de surface

Flore Caye
D'aprés les documents de cours de Jean Guérin

MTH1102

Polytechnique Montréal

1 Novembre 2024

Sommaire

Définition

Une *surface paramétrée* est une surface définie par une fonction vectorielle $\mathrm{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donnée par

$$\mathrm{R}(u, v) = x(u, v)\mathrm{i} + y(u, v)\mathrm{j} + z(u, v)\mathrm{k},$$

avec $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Définition

Une *surface paramétrée* est une surface définie par une fonction vectorielle $\mathrm{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donnée par

$$\mathrm{R}(u, v) = x(u, v)\mathrm{i} + y(u, v)\mathrm{j} + z(u, v)\mathrm{k},$$

avec $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

On peut aussi définir la surface par des équations paramétriques :

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v), \quad (u, v) \in D.$$

Exemples

Exemple : Plan

Paramétrisation du plan passant par

$$\begin{aligned} P_0 &= (1, 2, 0) \\ \vec{a} &= (4, 5, -1) \\ \vec{b} &= (0, -1, 2) \end{aligned}$$

Exemples

Exemple : 10.1.20

Paramétrisation de la moitié inférieur de l'ellipsoïde

$$2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$$

Exemples

Exemple : 10.1.20

Paramétrisation de la moitié inférieur de l'ellipsoïde

$$2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$$

Exemple : 10.1.24

Paramétrisation de la partie du cylindre $x^2 + z^2 = 9$ située au dessus du plan xy entre les plans $y = -4$ et $y = 4$.

Aire d'une surface

Soit S une surface paramétrée définie par

$$\mathrm{R}(u, v) = x(u, v)\mathrm{i} + y(u, v)\mathrm{j} + z(u, v)\mathrm{k}, \quad (u, v) \in D \subseteq R^2.$$

Aire d'une surface

Soit S une surface paramétrée définie par

$$\mathrm{R}(u,v) = x(u,v)\mathrm{i} + y(u,v)\mathrm{j} + z(u,v)\mathrm{k}, \quad (u,v) \in D \subseteq R^2.$$

Définissons les vecteurs

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_u(u,v) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\mathrm{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\mathrm{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\mathrm{k} \\
\mathrm{R}_v(u,v) &= \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\mathrm{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\mathrm{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\mathrm{k}.
\end{aligned}$$

Aire d'une surface

Soit S une surface paramétrée définie par

$$\mathrm{R}(u,v) = x(u,v)\mathrm{i} + y(u,v)\mathrm{j} + z(u,v)\mathrm{k}, \quad (u,v) \in D \subseteq R^2.$$

Définissons les vecteurs

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_u(u,v) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\mathrm{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\mathrm{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\mathrm{k} \\ \mathrm{R}_v(u,v) &= \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\mathrm{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\mathrm{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\mathrm{k}. \end{aligned}$$

Théorème

L'aire de la surface S est

$$\mathrm{aire}(S) = \iint_D ||\,\mathrm{R}_u(u,v) \times \mathrm{R}_v(u,v)\,||\, dA.$$

Exemples

Exemple : 10.1.40

Calculons l'aire de la surface paramétrée par

$$\mathrm{R}(u, v) = (u+v)\vec{\mathrm{i}} + (2-3u)\vec{\mathrm{j}} + (1+u-v)\vec{\mathrm{k}}$$

correspondant à $0 \leq u \leq 2$, $-1 \leq v \leq 1$

Exemples

Exemple : 10.1.40

Calculons l'aire de la surface paramétrée par

$$R(u, v) = (u + v)\vec{\mathrm{i}} + (2 - 3u)\vec{\mathrm{j}} + (1 + u - v)\vec{\mathrm{k}}$$

correspondant à $0 \leq u \leq 2$, $-1 \leq v \leq 1$

Exemple : 10.1.44

Calculons l'aire de la surface $z = 4 - 2x^2 + y$ au dessus du triangle de sommets $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$.

Sommaire

Intégrale de surface

Définition

Soit S la surface paramétrée par la fonction vectorielle $\mathrm{R}(u, v)$, avec $(u, v) \in D$ et f une fonction de trois variables définie dans un voisinage de S. L'intégrale de f sur S est définie par

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{D} f(\mathrm{R}(u, v))\, ||\, \mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v \,||\, dA.$$

Intégrale de surface

Définition

Soit S la surface paramétrée par la fonction vectorielle $\mathrm{R}(u, v)$, avec $(u, v) \in D$ et f une fonction de trois variables définie dans un voisinage de S. L'intégrale de f sur S est définie par

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_D f(\mathrm{R}(u, v))\, ||\, \mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v \,||\, dA.$$

Théorème

Les propriétés habituelles des intégrales s'appliquent aux intégrales de surface.

Exemples

10.2.6

$$\iint_S xyz dS$$

S est le cône paramétré par

$$\begin{aligned} x =& u \times cos(v) \\ y =& u \times sin(v) \\ z =& u \end{aligned}$$

Avec $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$

Intégrale de surface (2)

Définition

Si

$$\mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v$$

n'est pas toujours nul, alors la surface S est une surface **lisse** .

Intégrale de surface (2)

Définition

Si

$$\mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v$$

n'est pas toujours nul, alors la surface S est une surface **lisse** .

Définition

La surface S est dite **lisse par morceaux** si elle est composée d'un nombre fini de surfaces lisses.

Intégrale de surface (2)

Définition

Si

$$\mathrm{R}_u \times \mathrm{R}_v$$

n'est pas toujours nul, alors la surface S est une surface **lisse** .

Définition

La surface S est dite **lisse par morceaux** si elle est composée d'un nombre fini de surfaces lisses.

Théorème

Soit S une surface lisse par morceaux composée des surfaces lisses S_1 et S_2, Alors

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)\,dS + \iint_{S_2} f(x,y,z)\,dS$$

Exemple

10.2.20

$$\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$$

Avec S la surface bornée par la partie du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ et les plans $z = 0$ et $z = 3 - x$.