Coordonnées cylindriques et sphériques

Flore Caye
D'aprés les documents de cours de Jean Guérin

MTH1102

Polytechnique Montréal

22 octobre 2024

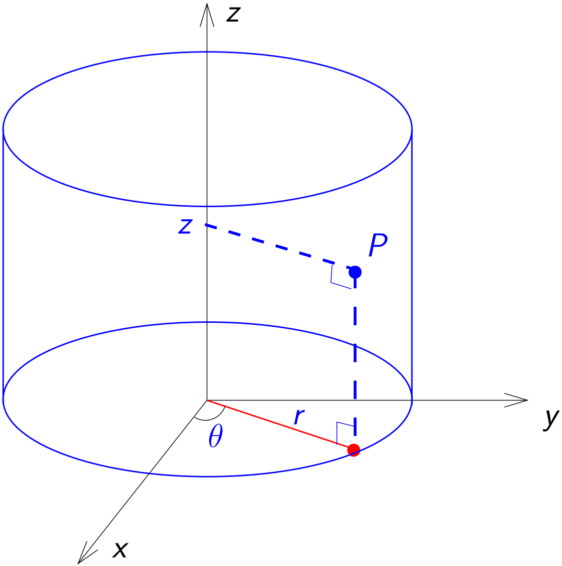
Sommaire

Coordonnées cylindriques

Un point P dans l'espace $\mathbb{R}^3$ peut être représenté en coordonnées cylindriques (r, θ, z), où

- (r, θ) sont les coordonnées polaires de la projection de P dans le plan $z = 0$.
- z est distance du point P au plan $z = 0$.

Coordonnées cylindriques (2)



Coordonnées cylindriques (3)

Relations entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes

$x = r\cos(\theta)$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\sin(\theta)$	$\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$
$z = z$	$z = z$

Exemples

2. a) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 2)$ b) $(1, 1, 1)$

4. a) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ b) $(2, 2, 2)$ **10.** $r = 2\sin(\theta)$

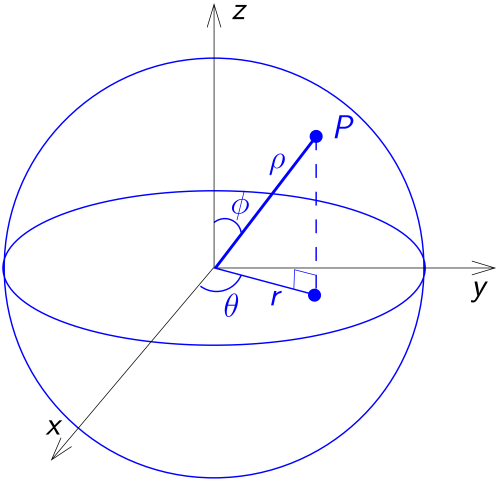
14. $0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad r \leq z \leq 2$

Coordonnées sphériques

Un point P dans l'espace $\mathbb{R}^3$ peut être représenté en coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ), où

- ρ est la distance de P à l'origine
- θ est l'angle formé par l'axe Ox et le segment joignant l'origine à la projection de P dans le plan $z = 0$.
- ϕ est l'angle formé par l'axe Oz et le segment joignant l'origine à P.

Coordonnées sphériques (2)



Relations entre coordonnées sphériques et cartésiennes

$x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta)$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta)$	$\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$
$z = \rho \cos(\phi)$	$\cos(\phi) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Sommaire

Intégrale triple en coordonnées cylindriques

Théorème

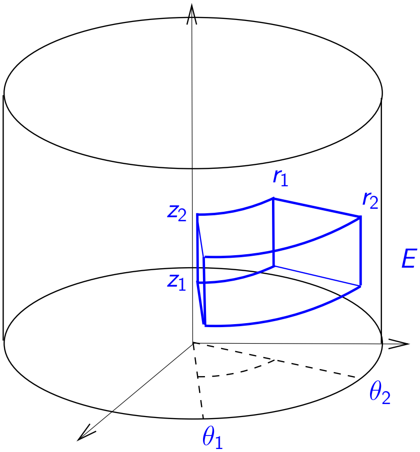
Soit E une région de l'espace $\mathbb{R}^3$ et f une fonction continue définie sur E.
Si E est décrite en coordonnées cylindriques par

$$E = \left\{ (r, \theta, z) \,|\, \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad r_1 \le r \le r_2, z_1 \le z \le z_2 \right\}$$

alors

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, \textcolor{red}{r}\, dz\, dr\, d\theta.$$

Intégrale triple en coordonnées cylindriques (2)



Intégrale triple en coordonnées cylindriques (3)

Théorème

Soit E une région de l'espace $\mathbb{R}^3$ et f une fonction continue définie sur E.
Si E est décrite en coordonnées cylindriques par

$$E = \left\{ (r, \theta, z) \,|\, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \;\; h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta), u_1(r,\theta) \leq z \leq u_2(r,\theta) \right\}$$

alors

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r,\theta)}^{u_2(r,\theta)} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Exemples

6. Calculez $\iiint_E (x-y)\,dV$, où E est le solide compris entre les cylindres $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 16$, au-dessus du plan des xy et sous le plan $z = y + 4$.

18. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2}\;dz\,dy\,dx$

Intégrale triple en coordonnées sphériques

Théorème

Soit E une région de l'espace $\mathbb{R}^3$ et f une fonction continue définie sur E. Si E est décrite en coordonnées sphériques par

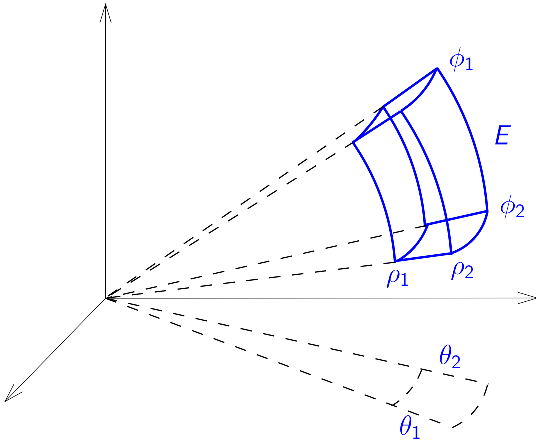
$$E = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \,|\, \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2,\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_1,\ \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2 \right\}$$

alors

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dV =$$

$$\int_\gamma^\delta \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \cos(\phi))\, \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

Intégrale triple en coordonnées sphériques (2)



Intégrale triple en coordonnées sphériques (3)

Théorème

Soit E une région de l'espace $\mathbb{R}^3$ et f une fonction continue définie sur E. Si E est décrite en coordonnées sphériques par

$$E = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \,|\, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\ \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2,\ u_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq u_2(\theta, \phi) \right\}.$$

Alors

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV =$$

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{u_1(\theta,\phi)}^{u_2(\theta,\phi)} f(\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \cos(\phi))\, \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

Exemples

10. Calculez $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV$, où E est situé entre les sphères $x^2+y^2+z^2=1$ et $x^2+y^2+z^2=4$, et au-dessus du cône $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

12. Calculez la distance moyenne d'un point d'une boule de rayon a à son centre.

30. $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2z+y^2z+z^3)\, dz\, dx\, dy$