Intégrales triples et applications

Flore Caye
D'aprés les documents de cours de Jean Guérin

MTH1102

Polytechnique Montréal

8 octobre 2024

Intégrale triple sur un parallélépipède

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables et E le parallélépipède

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\right\}.$$

Intégrale triple sur un parallélépipède

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables et E le parallélépipède

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\right\}.$$

Soit les partitions régulières des intervalles :

$$\begin{array}{lcl} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b & \text{et} & \Delta x = x_{i+1} - x_i \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m < y_{m+1} = d & \text{et} & \Delta y = y_{j+1} - y_j \\ e = z_0 < z_1 < \cdots < z_k < z_{p+1} = f & \text{et} & \Delta z = z_{k+1} - z_k \end{array}$$

Intégrale triple sur un parallélépipède

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables et E le parallélépipède

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\right\}.$$

Soit les partitions régulières des intervalles :

$$\begin{array}{lcl} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b & \text{et} & \Delta x = x_{i+1} - x_i \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m < y_{m+1} = d & \text{et} & \Delta y = y_{j+1} - y_j \\ e = z_0 < z_1 < \cdots < z_k < z_{p+1} = f & \text{et} & \Delta z = z_{k+1} - z_k \end{array}$$

et E_{ijk} la sous-région

$$E_{ijk} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_i \leq x \leq x_{i+1},\ y_j \leq y \leq y_{j+1},\ z_k \leq z \leq z_{k+1}\right\}.$$

Intégrale triple sur un parallélépipède

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables et E le parallélépipède

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ r \le z \le s\right\}.$$

Soit les partitions régulières des intervalles :

$$\begin{array}{lcl} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b & \text{et} & \Delta x = x_{i+1} - x_i \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m < y_{m+1} = d & \text{et} & \Delta y = y_{j+1} - y_j \\ e = z_0 < z_1 < \cdots < z_k < z_{p+1} = f & \text{et} & \Delta z = z_{k+1} - z_k \end{array}$$

et E_{ijk} la sous-région

$$E_{ijk} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_i \le x \le x_{i+1},\ y_j \le y \le y_{j+1},\ z_k \le z \le z_{k+1}\right\}.$$

Le volume de E_{ijk} est $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$.

Intégrale triple sur un parallélépipède

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables et E le parallélépipède

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\right\}.$$

Soit les partitions régulières des intervalles :

$$\begin{array}{lcl} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b & \text{et} & \Delta x = x_{i+1} - x_i \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m < y_{m+1} = d & \text{et} & \Delta y = y_{j+1} - y_j \\ e = z_0 < z_1 < \cdots < z_k < z_{p+1} = f & \text{et} & \Delta z = z_{k+1} - z_k \end{array}$$

et E_{ijk} la sous-région

$$E_{ijk} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_i \leq x \leq x_{i+1},\ y_j \leq y \leq y_{j+1},\ z_k \leq z \leq z_{k+1}\right\}.$$

Le volume de E_{ijk} est $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$.

Pour chaque sous-région, soit $(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \in E_{ijk}$ un point quelconque.

Intégrale triple sur un parallélépipède (2)

Définition

On définit l'**intégrale triple** de f sur E par

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \lim_{m,n,p\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\,\Delta V$$

si cette limite existe.

Intégrale triple sur un parallélépipède (2)

Définition

On définit l'**intégrale triple** de f sur E par

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \lim_{m,n,p\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\,\Delta V$$

si cette limite existe.

Théorème

Si f est une fonction continue de trois variables définie sur le parallélépipède E alors

$$\iiint_E f(x,y,z) = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Exemples

Exemple : 7.1.2

2. Calculez l'intégrale $\iiint_E (xy + z^2)\,dV$, où

$$E = \left\{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 3\right\}$$

en utilisant trois ordres d'intégration différents.

Intégrale triple sur un domaine général (1)

Définition

La région $E \subset \mathbb{R}^3$ est de **type 1** si

$$E = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

où D est un domaine du plan Oxy (de type I ou II).

Théorème

Dans ce cas on a

$$\iiint\limits_E f(x, y, z) = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right] dA.$$

Intégrale triple sur un domaine général (2)

Définition

La région $E \subset \mathbb{R}^3$ est de **type 2** si

$$E = \{(x, y, z) \,|\, (y, z) \in D,\; u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\},$$

où D est un domaine du plan Oyz (de type I ou II).

Théorème

Dans ce cas on a

$$\iiint\limits_E f(x, y, z) = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx\right] dA.$$

Intégrale triple sur un domaine général (3)

Définition

La région $E \subset \mathbb{R}^3$ est de **type 3** si

$$E = \{(x, y, z) \,|\, (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\},$$

où D est un domaine du plan Oxz (de type I ou II).

Théorème

Dans ce cas on a

$$\iiint\limits_E f(x, y, z) = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\right] dA.$$

Exemples

Exemple : 7.1.10

10. $\iiint_E e^{z/y}\, dV$, où

$$E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq xy\}.$$

Exemples

Exemple : 7.1.10

10. $\iiint_E e^{z/y}\, dV$, où

$$E = \{(x,y,z) \mid 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1,\ 0 \le z \le xy\}.$$

Exemple : 7.1.14

14. $\iiint_E xy\, dV$, où E est délimité par les surfaces $z = x^2 - 1$, $z = 1 - x^2$, $y = 0$ et $y = 2$.

Exemples

Exemple : 7.1.16

16. $\iiint_T xz \, dV$, où T est le tétraèdre solide de sommets $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ et $(0, 0, 1)$.

Applications des intégrales triples

Soit E un solide occupant une région de l'espace $\mathbb{R}^3$. Alors le **volume** de E est donné par

$$\text{Vol}(E) = \iiint_E dV.$$

Applications des intégrales triples

Soit E un solide occupant une région de l'espace $\mathbb{R}^3$. Alors le **volume** de E est donné par

$$\mathrm{Vol}(E) = \iiint\limits_E dV.$$

Soit E un solide occupant une région de l'espace $\mathbb{R}^3$ et dont la densité en chaque point (x, y, z) est donnée par la fonction $\sigma(x, y, z)$. Alors la **masse** de E est

$$m = \iiint\limits_E \sigma(x, y, z)\, dV.$$

Applications des intégrales triples (2)

Définition

Soit E un solide occupant une région de l'espace $\mathbb{R}^3$ et dont la densité en chaque point (x, y, z) est donnée par la fonction $\sigma(x, y, z)$.
On définit les **moments** de E par rapport aux plans de coordonnées par

1. $$M_{yz} = \iiint\limits_E x\sigma(x, y, z)\, dV$$
2. $$M_{xz} = \iiint\limits_E y\sigma(x, y, z)\, dV$$
3. $$M_{xy} = \iiint\limits_E z\sigma(x, y, z)\, dV.$$

Applications des intégrales triples (3)

Définition

Le **centre de masse** du solide E est le point de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, où

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Applications des intégrales triples (4)

Définition

Soit un solide occupant une région E de l'espace et dont la densité en chaque point est donné par le fonction $\sigma(x, y, z)$. Les **moments d'inertie** (ou **seconds moments**) de E par rapport aux axes de coordonnées sont

$$\begin{aligned}
I_x &= \iiint_E (y^2 + z^2)\sigma(x, y, z)\, dV \quad \text{(p/r axe des } x\text{)} \\
I_y &= \iiint_E (x^2 + z^2)\sigma(x, y, z)\, dV \quad \text{(p/r axe des } y\text{)} \\
I_z &= \iiint_E (x^2 + y^2)\sigma(x, y, z)\, dV \quad \text{(p/r axe des } z\text{)}
\end{aligned}$$