FINAL MTH2120, A2023, SOLUTIONS (A.S.)

9pts

I a) 4 pts

$u(t-1) * u(t-2) =: I(t), \quad t \in \mathbb{R}.$

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\theta-1)\, u(t-\theta-2)\, d\theta$$

$I(t) \neq 0$ ssi $\theta - 1 \geqslant 0$ et $t - \theta - 2 \geqslant 0$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leqslant \theta \leqslant t-2 \implies t \geqslant 3.$$

donc

$$I(t) = u(t-3) \int_1^{t-2} d\theta,$$

$$= u(t-3)\ \theta \Big|_1^{t-2},$$

$$= u(t-3)(t-3).$$

b)

5 pts

$$u(n-1) * n\,u(n) =: I(n)$$

$$I(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k-1)\,(n-k)\,u(n-k)$$

$I(n) \neq 0$ ssi $k-1 \geq 0$ et $n-k \geq 0$,

$$\Leftrightarrow\ 1 \leq k \leq n \iff \begin{cases} 1 \leq k \leq n, \\ n \geq 1, \end{cases}$$

d'où

$$I(n) = u(n-1) \sum_{k=1}^{n} (n-k),$$

$$= u(n-1)\left[n \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} k \right],$$

$$= u(n-1)\left[n \cdot n - \frac{n}{2}(n+1) \right],$$

$$= u(n-1)\left[\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \right],$$

$$= u(n-1)\,\frac{n}{2}(n-1),$$

$$= \frac{1}{2}\,n(n-1)\,u(n-2).$$

7 pts

II a) 3 pts

$$H(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{=:F(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{=:G(s)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{où} \\ f(t) = 1, \\ \text{et} \\ g(t) = \sin(t). \end{array} \right.$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)\,G(s)) = (f * g)(t)$$

$$= \int_0^t f(\theta)\, g(t-\theta)\, d\theta,$$

$$= \int_0^t 1 \cdot \sin(t-\theta)\, d\theta,$$

$$= \cos(t-\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=t},$$

$$= \cos(0) - \cos(t),$$

$$= 1 - \cos(t).$$

b) 4 pts

$H(s)$ est ana. partout dans $\mathbb{C}$ sauf en $s=0$ et en $s=\pm i$, qui sont des pôles simples.

De plus $|H(s)| \sim \dfrac{1}{|s|^3}$, $|s| \to \infty$,

et donc $H(s) \to 0$ si $|s| \to \infty$.

Donc

$$H(s) = \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{st}}{s(s^2+1)} \; ; \; s = s_k \right)$$

avec $s_1 = 0$, $s_2 = i$, $s_3 = -i$.

$$H(s) = \left.\frac{e^{st}}{s^2+1}\right|_{s=0} + \left.\frac{e^{st}}{s(s+i)}\right|_{s=i} + \left.\frac{e^{st}}{s(s-i)}\right|_{s=-i},$$

$$= 1 + \frac{e^{it}}{2i^2} + \frac{e^{-it}}{2i^2},$$

$$= 1 - \cos(t).$$

7 pts

III

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = x(n+1) - x(n), \quad n \geq 0. \qquad (1)$$

a) On prend la TZ de (1) avec $Y(z) := \mathcal{Z}(y(n))$
3pts et $X(z) := \mathcal{Z}(x(n))$:

$$z^2 Y(z) - 3zY(z) + 2Y(z) = zX(z) - X(z),$$

$$\Rightarrow H(z) := \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-1}{z^2 - 3z + 2}.$$

On remarque que le dénominateur s'annule en $z=1$.

$$\begin{array}{r|l} z^2 - 3z + 2 & z - 1 \\ \cline{2-2} -z^2 + z & z - 2 \\ \cline{1-1} -2z + 2 & \\ 2z - 2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc $\quad H(z) = \dfrac{z-1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-2}.$

b) 4 pts

$$h(n) = Z^{-1}(H(z))$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=3} \underbrace{\frac{z^{n-1}}{z-2}}_{=: f(z)} \, dz$$

Si $n \geq 1$,

f n'a qu'une seule singularité, un pôle simple, et f est ana. partout dans $\mathbb{C}$ sauf en $z=2$, d'où

$$h(n) = \frac{1}{2\pi i} \, 2\pi i \, \mathrm{Res}\left(\frac{z^{n-1}}{z-2} ; z=2 \right)$$

$$= z^{n-1} \Big|_{z=2} = 2^{n-1}.$$

Si $n=0$, $h(0) = \lim_{|z| \to \infty} H(z) = 0.$

Donc $\boxed{h(n) = 2^{n-1} u(n-1), \; n \geq 0.}$

6 pts

IV **a)** 3 pts $y(t) = T(x(t)) = x(t) - e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\theta}\, x(\theta)\, d\theta$

Comparons $y(t-\tau)$ avec $T(x(t-\tau))$:

$$y(t-\tau) = x(t-\tau) - e^{-(t-\tau)}\int_{-\infty}^{t-\tau} e^{\theta}\, x(\theta)\, d\theta \quad (1)$$

$$T(x(t-\tau)) = x(t-\tau) - e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\theta}\, x(\theta-\tau)\, d\theta$$

Posons $\xi = \theta - \tau$:

$$= x(t-\tau) - e^{-t}\int_{-\infty}^{t-\tau} e^{\tau+\xi}\, x(\xi)\, d\xi$$

$$= x(t-\tau) - e^{-(t-\tau)}\int_{-\infty}^{t-\tau} e^{\xi}\, x(\xi)\, d\xi \quad (2)$$

En comparant (1) et (2), on voit que

$y(t-\tau) = T(x(t-\tau))$ et donc T est stationnaire.

b) 3 pts

Soit φ une fonction test.

Évaluons $\int_{-\infty}^{\infty} 2\,\delta(2t)\,\varphi(t)\,dt =: I$

Posons $x = 2t$:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} 2\,\delta(x)\,\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{2}$$

$$= \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=0} = \varphi(0)$$

On a $\int_{-\infty}^{\infty} 2\,\delta(2t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\varphi(t)\,dt$

pour toute fonction test φ, alors

$2\,\delta(2t) \overset{d}{=} \delta(t)$, égalité en distribution.

8 pts

V a) 2.5 pts

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1}$$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^n$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

donc $1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$,

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

b) 3 pts

D'après l'identité de Parseval avec $L=\pi$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \frac{1}{2n+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{16} \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} 1 \, dx}_{=\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{8}.$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1}$$

c) 2.5 pts

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \, \frac{e^{i(2n+1)x} - e^{-i(2n+1)x}}{2i}$$

$$= \frac{2}{\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1} - \frac{2}{\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i(2n+1)x}}{2n+1}$$

Dans la $2^{ième}$ somme, changement de variable

$$2n+1 = -(2m+1) \Rightarrow m = \frac{-2n-1-1}{2} = -1-n$$

$$S(x) = \frac{2}{\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1} - \underbrace{\frac{2}{\pi i} \sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{e^{i(2m+1)x}}{(-(2m+1))}}_{= \frac{2}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1}}$$

$$= -\frac{2}{\pi} i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1}$$

8 pts

III

$$y(t) = T(x(t)) = x(t) - e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\theta} x(\theta)\, d\theta$$

a) 4 pts

$$T(e^{i\omega t}) = e^{i\omega t} - e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\theta} e^{i\omega\theta}\, d\theta,$$

$$= e^{i\omega t} - e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\theta(1+i\omega)}\, d\theta,$$

$$= e^{i\omega t} - e^{-t}\left[\frac{e^{\theta(1+i\omega)}}{1+i\omega}\Bigg|_{-\infty}^{t}\right],$$

$$= e^{i\omega t} - \frac{e^{-t}}{1+i\omega}\left[e^{t(1+i\omega)} - 0\right],$$

$$= e^{i\omega t} - \frac{1}{1+i\omega} e^{-t+t+i\omega t}$$

$$= e^{i\omega t}\left(1 - \frac{1}{1+i\omega}\right) = e^{i\omega t}\,\frac{1+i\omega-1}{1+i\omega}$$

$$= \frac{i\omega(1-i\omega)}{1+\omega^2} e^{i\omega t}$$

$$= \underbrace{\frac{\omega^2+i\omega}{1+\omega^2}}_{\text{Réponse en fréquence}} e^{i\omega t}$$

b) Pour un SLS,

4pts

$$y(t) = T(x(t)) = (h * x)(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, x(t-\theta)\, d\theta \quad \checkmark, \text{ d'où}$$

$$T(e^{st}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, e^{s(t-\theta)}\, d\theta \quad \checkmark$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, e^{-s\theta}\, d\theta\right] e^{st} \quad \checkmark$$

$$= \left[\int_{0}^{\infty} h(\theta)\, e^{-s\theta}\, d\theta\right] e^{st} \quad \checkmark$$

si T est causal $\Leftrightarrow h(\theta) = 0,\ \theta < 0,$

$$= H(s)\, e^{st}.$$

$\hookrightarrow$ T.L. de $h(t)$.