POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Questionnaire
Examen final

MTH2120

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom :	**Prénom :**	
Signature :	**Matricule :**	**Groupe :**

Réservé	
1)	/9
2)	/7
3)	/7
4)	/6
5)	/8
6)	/8
	/45

Sigle et titre du cours			
MTH2120 - Analyse appliquée			
Professeur		*Groupe*	*Trimestre*
Antoine Saucier		**1**	**A2023**
Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Dimanche	**10 décembre 2023**	**2h30**	**9h30-12h**

Documentation	*Calculatrice*	*Outils électroniques*
☐ Aucune ☐ Toute ☒ Voir directives particulières	☐ Aucune ☐ Toutes ☒ Voir directives particulières	**Les appareils électroniques personnels sont interdits.**

Directives particulières

- **Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante.**
- **Il est strictement interdit de débrocher l'examen.**
- **IMPORTANT : inscrire votre matricule sur toutes les pages numérotées.**
- **Un aide-mémoire se trouve dans les trois dernières pages du cahier.**
- **Une calculatrice non-programmable autorisée est permise.**
- **Rappel: la pondération de cet examen est 45%.**

Cet examen contient **6** questions sur un total de **33** pages **(incluant cette page).**

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

Question 1 (9 points)

Les deux questions suivantes sont indépendantes l'une de l'autre.

a) (4 pts) Calculer le produit de convolution en temps continu $(f*g)(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si

$$f(t) = u(t-1) \text{ et } g(t) = u(t-2),$$

où u désigne la fonction échelon.

b) (5 pts) Calculer le produit de convolution en temps discret $(f*g)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si

$$f(n) = u(n-1) \text{ et } g(n) = n\,u(n),$$

où u désigne la fonction échelon.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

Question 2 (7 points)

Soit
$$F(s) := \frac{1}{s(s^2+1)}$$

la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$.

a) (3 pts) Calculer $f(t)$ en utilisant le théorème de convolution, et justifier chaque étape de votre démarche.

b) (4 pts) Calculer $f(t)$ en utilisant le théorème des résidus, et justifier chaque étape de votre démarche.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

Question 3 (7 points)

Soit le système linéaire en temps discret décrit par l'équation de récurrence

$$y(n+2) - 3\,y(n+1) + 2\,y(n) = x(n+1) - x(n),\ \ n = 0, 1, 2, ...$$

avec $x(0) = 0$ et $y(0) = y(1) = 0$.

a) (3 pts) Trouver et *simplifier* la fonction de transfert $H(z)$ du système.

b) (4 pts) Trouvez la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

Question 4 (6 points)

Les deux questions suivantes sont indépendantes l'une de l'autre.

a) (3 points) Le système linéaire T est défini pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$y(t) = T(x(t)) = x(t) - e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\theta}\, x(\theta)\, d\theta.$$

Ce système est-il stationnaire? Justifier votre réponse.

b) (3 pts) Les distributions

$$\delta(t) \quad \text{et} \quad 2\,\delta(2t),$$

où $\delta(t)$ désigne le delta de Dirac et $t \in \mathbb{R}$, sont-elles égales au sens des distributions? Justifier votre réponse.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

Question 5 (8 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction périodique de période 2π définie sur une période par

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

La série de Fourier de f est donnée par

$$s(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2\,n+1)x\right)}{2\,n+1}. \tag{1}$$

a) (2.5 pts) En utilisant (1), évaluer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1}.$$

b) (3 pts) En utilisant (1), évaluer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,n+1)^2}.$$

c) (2.5 pts) Écrire la série de Fourier $s(x)$ sous sa forme complexe.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

Question 6 (8 points)

Les deux questions suivantes sont indépendantes l'une de l'autre.

a) (4 pts) Évaluer la *réponse en fréquence* du système linéaire

$$y(t) = T(x(t)) = x(t) - e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\theta}\, x(\theta)\, d\theta.$$

b) (4 pts) Montrer que la fonction $e^{s\,t}$, où $t \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{C}$ est une constante, est une fonction propre pour tout système linéaire stationnaire, et donner l'expression de la valeur propre $\lambda(s) \in \mathbb{C}$ si le système est causal.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Simplifiez et justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

AIDE-MÉMOIRE

$$\text{Pôle simple : Res}\left(f(z); z=a\right) = \lim_{z\to a}\left((z-a)\,f(z)\right).$$

$$\text{Pôle double : Res}\left(f(z); z=a\right) = \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\Big((z-a)^2\,f(z)\Big).$$

Transformée en z:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^{-n}, \quad f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\,z^{n-1}\,dz.$$

$$Z\left(f(n-m)\,u(n-m)\right) = z^{-m}\,F(z),\ n\geq 0,\ m\geq 0.$$

$$Z\left(f(n+m)\right) = z^m\left(F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)\,z^{-k}\right),\ m=1,2,3,...$$

Transformée de Laplace:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\,t} f(t)\,dt, \quad f(t) = \sum_k \text{Res}\Big(e^{s\,t}F(s); s=s_k\Big)\ \text{si}\ \lim_{|s|\to\infty} F(s) = 0.$$

Théorèmes de convolution:

$$Z\left((f_1 * f_2)(n)\right) = F_1(z)\,F_2(z),$$

$$L\left(f(t)*g(t)\right) = F(s)\,G(s), \quad \mathcal{F}\left(f(t)*g(t)\right) = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega).$$

Produits de convolution:

$$\text{Général: } (x*y)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,y(n-k).$$

$$\text{Général: } (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\,g(t-\theta)\,d\theta.$$

$$\text{Transformée en z : } (x*y)(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)\,y(n-k).$$

$$\text{Transformée de Laplace: } (f*g)(t) = \int_0^t f(\theta)\,g(t-\theta)\,d\theta.$$

Transformée de Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,t}\,f(t)\,dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega\,t}\,\hat{f}(\omega)\,d\omega.$$

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Séries de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, \cos(n\pi x/L)\, dx,\ n \geq 0. \ \ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, \sin(n\pi x/L)\, dx,\ n \geq 1.$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(t)|^2\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\, n\, \pi\, x/L}, \quad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\, n\, \pi\, x/L}\, dx.$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Systèmes linéaires stationnaires:

$$T\left(a\ x_1(n) + b\ x_2(n)\right) = a\ T\left(x_1(n)\right) + b\ T\left(x_2(n)\right),\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$T\left(a\ x_1(t) + b\ x_2(t)\right) = a\ T\left(x_1(t)\right) + b\ T\left(x_2(t)\right),\ t \in \mathbb{R}.$$

$$y(n-m) = T\left(x(n-m)\right),\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}.$$

$$y(t-a) = T\left(x(t-a)\right),\ t \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$$

$$y(t) = (h * x)(t).$$

$T\left(e^{i\,\omega\, t}\right) = \text{RF}\ e^{i\,\omega\, t},\ \omega \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$ RF $\in \mathbb{C}$ est la réponse en fréquence.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Transformées de Laplace élémentaires

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Notes
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Ex. 4
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Ex. 5
3. $t^n; \quad n =$ entier positif	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Prob. 27
4. $t^p, \ p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Prob. 27
5. $\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Ex. 6
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Prob. 6
7. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Sec. 6.1 ; Prob. 8
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Sec. 6.1 ; Prob. 7
9. $e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Prob. 13
10. $e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Prob. 14
11. $t^n e^{at}, \ n =$ entier positif	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Prob. 18
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.3
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	Sec. 6.3
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	Sec. 6.3
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$	Sec. 6.3 ; Prob. 19
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	Sec. 6.6
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}	Sec. 6.5
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Sec. 6.2
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	Sec. 6.2 ; Prob. 28

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé