POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Questionnaire Examen Intra

MTH2120

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom :	Prénom :	
Signature :	Matricule :	Groupe :

Réservé	
1)	/10
2)	/10
3)	/8
4)	/12
	/40

Sigle et titre du cours			
MTH2120 - Analyse Appliquée			
Professeur		**Groupe**	**Trimestre**
Antoine Saucier		1	A2023
Jour	**Date**	**Durée**	**Heures**
Dimanche	29 octobre 2023	2h	10h30-12h30

Documentation	Calculatrice	Outils électroniques
☐ Aucune ☐ Toute ☒ Voir directives particulières	☐ Aucune ☐ Toutes ☒ Voir directives particulières	Les appareils électroniques personnels sont interdits.

Directives particulières

- **Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante.**
- **Il est strictement interdit de débrocher l'examen.**
- **IMPORTANT : inscrire votre matricule sur toutes les pages numérotées.**
- **Un aide-mémoire se trouve à la dernière page du cahier.**
- **Une calculatrice non-programmable autorisée est permise.**
- **Rappel: la pondération de cet examen est 40%.**

Cet examen contient 4 questions sur un total de 22 pages **(incluant cette page).**

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

Question 1 (10 points)

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

a) (**3 pts**) Exprimer le nombre suivant sous la forme $a + i\,b$, où a et b sont réels:

$$(1+i)^{2023}.$$

b) (**2 pts**) La fonction

$$f(z) = \sin(z^{2023}) - 1 + \pi\, z^2$$

est-elle entière? Justifier votre réponse.

c) (**2 pts**) Exprimer le nombre suivant sous la forme $a + i\,b$, où a et b sont réels:

$$i^{3i} - (i^3)^i.$$

d) (**3 pts**) Expliquer la différence entre un pôle et une singularité essentielle.

10 pts

I) a) $\boxed{3 \text{ pts}}$ $(1+i)^{2023} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2023}$

$$= 2^{\frac{2023}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}2023} = 2^{\frac{2022+1}{2}} e^{i\frac{2\pi}{8}(2024-1)}$$

$$= 2^{1011}\sqrt{2}\, e^{i2\pi\left(253-\frac{1}{8}\right)}$$

$$= 2^{1011}\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i} = 2^{1011}\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$= 2^{1011} - i\, 2^{1011}.$$

b) $\boxed{2 \text{ pts}}$ $f(z) = \sin\left(z^{2023}\right) - 1 + \pi z^2$

z^{2023} est entière (polynôme) et $\sin(z)$ est entière,

donc $f_1(z) := \sin\left(z^{2023}\right)$ est entière car elle résulte

de la composition de deux fonctions entières.

$f_2(z) := -1 + \pi z^2$ est entière car c'est un polynôme.

$f(z) := f_1(z) + f_2(z)$ est entière car elle est la somme de deux fonctions entières.

c) $\boxed{2 \text{ pts}}$ $i^{3i} - (i^3)^i = e^{3i \ln(i)} - e^{i \ln(-i)}$,

$$= e^{3i \cdot i\frac{\pi}{2}} - e^{i \cdot (-i\frac{\pi}{2})},$$

$$= e^{-\frac{3\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}.$$

d) $\boxed{3 \text{ pts}}$ Pour une singularité en $z = z_0$, on considère la S.L. de f dans une couronne $|z - z_0| < R$ où z_0 est la seule singularité.

Pour un <u>pôle</u>, le nb. de terme avec des puissances négatives de $z - z_0$ est <u>fini</u>.

Pour une sing. ess., le nb. est <u>infini</u>.

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

Question 2 (10 points)

a) (**3 pts**) Soit $P(z)$ un polynôme d'une variable complexe z. On suppose que les coefficients de P sont réels. Montrer que si $z_0 \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $\overline{z}_0$ l'est aussi.

b) (**4 pts**) Trouver toutes les racines complexes z de l'équation

$$z^4 - 7\,z^3 + 13\,z^2 - 7\,z + 12 = 0.$$

c) (**3 pts**) Donner le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

valide pour $|z-2| > 1$.

10 pts

II a) $\boxed{3 \text{ pts}}$ $P(z_0) = 0$,

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N} a_n z_0^n = 0,$$

$$\Rightarrow \overline{\sum_{n=0}^{N} a_n z_0^n} = \overline{0} = 0,$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n z_0^n} = 0,$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n} (\overline{z_0})^n = 0,$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N} a_n (\overline{z_0})^n = 0 \quad \text{car } a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{a_n} = a_n,$$

$$\Rightarrow P(\overline{z_0}) = 0. \quad \blacksquare$$

b) $\boxed{4 \text{ pts}}$ $P(z) = z^4 - 7z^3 + 13z^2 - 7z + 12$

$z = i$ est racine car

$$P(i) = 1 - \cancel{7(-i)} - 13 - \cancel{7i} + 12 = 0.$$

Comme P a des coefficients réels, $-i$ est aussi racine et donc on peut mettre $(z+i)(z-i) = z^2+1$ en facteur.

Divisons P par z^2+1 :

$$\begin{array}{l|l} \cancel{z^4}-7z^3+13z^2-\cancel{7z}+12 & z^2+1 \\ \cline{2-2} -\cancel{z^4} \qquad\quad -z^2 & z^2-7z+12 \\ \cline{1-1} -\cancel{7z^3}+12z^2-\cancel{7z}+12 & \\ +\cancel{7z^3} \qquad\qquad +\cancel{7z} & \\ \cline{1-1} 12z^2+12 & \\ -12z^2-12 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$P(z)=(z^2+1)(z^2-7z+12)$$

$$z^2-7z+12=0 \Rightarrow z=\frac{1}{2}\left(7\pm\sqrt{49-48}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(7\pm 1)$$
$$=4 \text{ ou } 3.$$

Les racines sont $\pm i$, 3 et 4.

c) $\boxed{3_{\text{pts}}}$ S.L. de $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ valide pour $|z-2|>1$.

$$|z-2|>1 \Rightarrow \frac{1}{|z-2|}<1 \Rightarrow \left|\pm\frac{1}{z-2}\right|<1,$$

ce qui suggère de faire apparaître une S.G. de raison $\pm\frac{1}{z-2}$.

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)} \cdot \frac{1}{(z-2+1)} = \frac{1}{(z-2)} \quad \frac{1}{(z-2)\left(1 + \frac{1}{z-2}\right)}$$

$$= \frac{1}{(z-2)^2} \quad \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{-1}{z-2}\right)\right]},$$

$$= \frac{1}{(z-2)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{(z-2)}\right)^n \text{car} \left|\frac{-1}{z-2}\right| < 1,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^n}.$$

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

Question 3 (8 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(z) := \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z \sin(z)},$$

où $z \in \mathbb{C}$.

Déterminer la nature de toutes les singularités (c'est-à-dire: singularité apparente, singularité essentielle, pôle d'ordre à préciser ...) de f, et évaluer les résidus de toutes les singularités.

8 pts

III

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z \sin(z)}$$

C'est une forme indéterminée "$\frac{0}{0}$".

On voit que $f(z) = \frac{(1+z+\frac{1}{2}z^2+\cdots)-1}{z(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots)} \sim \frac{1}{z}$, $z \to 0$,

et donc $z=0$ est un pôle simple.
Vérifions le :

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{\sin(z)}$$

$$\overset{R.H.}{=} \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{\cos(z)} = 1 \neq 0,$$

donc $z=0$ est bien un pôle simple,

avec $\text{Res}(f ; z=0) = 1$.

Le dénominateur de f s'annule aussi si

$$\sin(z) = 0 \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0,$$

$$\Rightarrow e^{iz} = e^{-iz},$$
$$\Rightarrow e^{2iz} = 1,$$
$$\Rightarrow 2iz = \ln(1) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$= i2k\pi$$
$$\Rightarrow \boxed{z = k\pi =: z_k, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

Bonus +1

Montrons que $z = z_k$ est un pôle simple pour $k \neq 0$:

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = \lim_{z \to z_k} \frac{e^z - 1}{z} \frac{z - z_k}{\sin(z)},$$

$$= \lim_{z \to z_k} \frac{e^z - 1}{z} \cdot \lim_{z \to z_k} \frac{z - z_k}{\sin(z)}$$

$$\stackrel{\text{R.H.}}{=} \frac{e^{k\pi} - 1}{k\pi} \cdot \lim_{z \to z_k} \frac{1}{\cos(z)} \quad \text{si } k \neq 0$$

$$= \frac{e^{k\pi}-1}{k\pi}(-1)^k \neq 0,$$

$$= \mathrm{Res}(f\,; z = z_k).$$

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

Question 4 (12 points)

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

a) (**4 pts**) Évaluer

$$\oint_{|z|=\pi} \overline{z}\, dz,$$

où la courbe est parcourue dans le sens anti-horaire, et exprimer votre réponse sous la forme $a + i\, b$, où a et b sont réels.

b) (**3 pts**) Évaluer

$$\int_C \sinh(z) \cosh(z)\, dz,$$

où C est le segment de droite reliant les points 0 et $\alpha\, i$, parcourue de 0 à $\alpha\, i$, où α est une constante réelle. Exprimer votre réponse sous la forme $a + i\, b$, où a et b sont réels.

c) (**5 pts**) Évaluer

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega\, x)}{1 + x^2}\, dx,$$

où $\omega > 0$, et exprimer votre réponse sous la forme $a + i\, b$, où a et b sont réels. Justifier chaque étape de votre démarche.

12 pts

IV a) 4 pts $f(z)=\bar{z}$ n'est pas analytique, donc on doit passer par la paramétrisation :

$$I=\int_{|z|=\pi} \bar{z}\,dz \qquad z(\theta)=\pi e^{i\theta},\ 0\leq\theta\leq 2\pi,$$
$$z'(\theta)=\pi i e^{i\theta}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\left(\overline{\pi e^{i\theta}}\right)\pi i e^{i\theta}\,d\theta,$$

$$=\pi^2 i\int_0^{2\pi}\left(e^{-i\theta}\right)e^{i\theta}\,d\theta,$$

$$=\pi^2 i\int_0^{2\pi}d\theta,$$

$$=\pi^2 i\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)$$

$$=2\pi^3 i.$$

$$I:=\int_C \sinh(z)\cosh(z)\,dz$$

b) 3 pts $f(z):=\sinh(z)\cosh(z)$ est entière et la courbe C est ouverte, donc

$$I=\int_0^{i\alpha}f(z)\,dz=\frac{1}{2}\sinh^2(z)\Big|_0^{i\alpha},$$

$$= \frac{1}{2}\sinh^2(i\alpha) - \frac{1}{2}\sinh^2(0),$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2}\right)^2 - 0\right],$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\left(e^{i2\alpha} + e^{-i2\alpha} - 2\right)\right],$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 2\cos(2\alpha) - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos(2\alpha) - 1\right).$$

✓✓

c) $\boxed{5\text{ pts}}$ $$\int_0^\infty \underbrace{\frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}}_{=:f(x)} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2} dx$$

car f est paire

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega z}}{1+z^2} dz\right) =: I$$

où $J := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega z}}{1+z^2} dz$ est une intégrale de Fourier avec

$$g(z) := \frac{1}{1+z^2}.$$

g n'a aucune singularité réelle car $1+z^2 \geq 1$ pour tout $z \in \mathbb{R}$,

et $|g(z)| \sim \frac{1}{|z|^2}$, $|z| \to \infty$, donc $g(z) \to 0$ si $|z| \to \infty$.

g est ana. partout dans $\mathbb{C}$ sauf en $z_\pm = \pm i$.

Le théorème s'applique avec $\omega > 0$:

$$J = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega z}}{1+z^2} ; z = +i\right)$$

$z = i$ est un pôle simple de $\frac{e^{i\omega z}}{1+z^2}$:

$$J = 2\pi i \lim_{z \to i} (z-i) \frac{e^{i\omega z}}{(z+i)(z-i)}$$

$$= 2\pi i \frac{e^{i\omega i}}{2i} = \pi e^{-\omega}$$

donc $I = \frac{\pi}{2} e^{-\omega}$.

AIDE-MÉMOIRE

Conditions de Cauchy-Riemann : $u_x = v_y, u_y = -v_x$.

Première formule de Cauchy : $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint \dfrac{f(z)}{z-a}\, dz$.

Seconde formule de Cauchy : $f^{(n)}(a) = \dfrac{n!}{2\pi i} \oint \dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$.

Pôle simple en $z = a$: $\text{Res}\,(f(z); z = a) = \lim\limits_{z\to a} \left((z-a)\, f(z)\right)$.

Pôle double en $z = a$: $\text{Res}\,(f(z); z = a) = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{d}{dz} \Big((z-a)^2\, f(z)\Big)$.

Pôle d'ordre n en $z = a$: $\text{Res}\,(f(z); z = a) = \dfrac{1}{(n-1)!} \lim\limits_{z\to a} \dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-a)^n\, f(z)\right)$.