MTH1102 - Exercices de la semaine 8

Exercices de routine

Section 7.2 nos. 7, 9, 11, 23, 25, 27.

Section 7.3 nos. 3, 7, 9.

Section 7.4 nos. 7, 9.

Intégrales triples en coordonnées cylindriques

1. Soit E la région bornée par les surfaces $z = 9 - x^2$ et $z = y^2$. Évaluez l'intégrale
$$J_1 = \iiint_E z\, dV.$$
2. Soit E la région située au-dessus du plan $z = 0$ et à la fois en dessous du paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$ et du cône $z^2 = 2x^2 + 2y^2$. Évaluez l'intégrale
$$J_2 = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV.$$
3. Soit E la région délimitée par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 2x$. Évaluez l'intégrale
$$J_3 = \iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV.$$

Intégrales triples en coordonnées sphériques

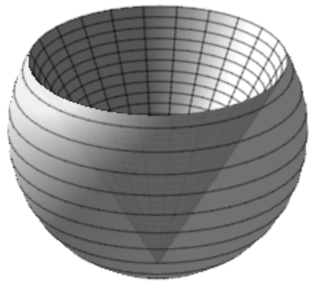
4. Soit E la région du premier octant (là où $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) située au-dessus du cône $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 100$. Évaluez l'intégrale
$$J_4 = \iiint_E z^2\, dV.$$
5. Soit E la région située à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ et entre les deux nappes du cône $z^2 = x^2 + y^2$. Évaluez l'intégrale
$$J_5 = \iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV.$$
6. Soit E la région située au-dessus du plan $z = 2$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Évaluez l'intégrale
$$J_6 = \iiint_E \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}\, dV.$$
Indice pour le calcul : $\frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)} = \frac{\sin(x)(1-\cos^2(x))}{\cos^3(x)}$.

Applications

7. Calculez le volume de la région E située entre les paraboloïdes $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ et $z = 2 - x^2 - y^2$.
8. Un solide occupe la région B de l'espace située à l'extérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$. La densité du solide est inversement proportionnelle à la distance à l'origine.
   (a) Déterminez les coordonnées du centre de masse du solide.

(b) Le centre de masse est-il à l'intérieur du solide ?

9. Soit B un solide ayant la forme d'une boule (sphère solide) percée d'un trou conique, comme illustré ci-dessous.



Ce solide peut être modélisé comme étant la région de l'espace située à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 25$ et sous le cône $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$.

(a) Décrivez le solide B en coordonnées cylindriques.

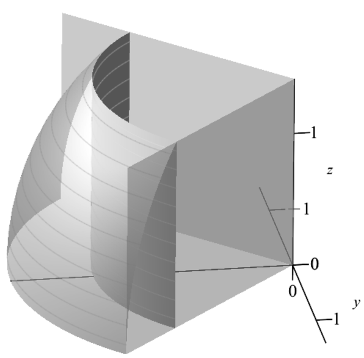
(b) Décrivez le solide B en coordonnées sphériques.

(c) Calculez la hauteur moyenne des points de B (par rapport au plan $z = 0$).

10. Soit E la région de l'espace située

- à droite du plan $x = 0$ (là où $x \geq 0$)
- entre les plans $y = -x$ et $y = x$
- au-dessus du plan $z = 0$
- à l'intérieur de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- et « à l'extérieur » du cylindre $x^2 + y^2 = 2$ (c'est-à-dire là où $x^2 + y^2 \geq 2$).

Les surfaces délimitant la région E sont représentées ci-dessous.



(a) Décrivez la région E en coordonnées cylindriques.

(b) Décrivez la région E en coordonnées sphériques.

(c) Un solide occupe la région E. La densité du solide est proportionnelle à la distance à l'axe des z. Déterminez les coordonnées du centre de masse de ce solide.

Exercices supplémentaires

À faire au besoin.

Section 7.1 nos. 19, 39, 45, 47.